(4) $$\lim_{p=\infty}(f_p, 0) = (0, 0) = 0.$$

Or, d'après (1), les termes de la suite $(f_p, 0)$ ont tous une valeur fixe: donc, d'après (4):

(5) $$(f_p, 0) = 0 \text{ pour tout } p \text{ entier.}$$

D'autre part, d'après (2) et la définition de $f_p(x)$, nous avons

$$f_p(x) = 1 \quad \text{pour} \quad p < k(x),$$

donc

$$\lim_{p=-\infty} f_p(x) = 1 \text{ pour tout } x \text{ réel}$$

et parsuite, d'après les propriétés 3) et 1) d'écart:

$$\lim_{p=-\infty}(f_p, 0) = (1, 0) > 0,$$

donc, d'après (1):

$$(f_p, 0) > 0 \text{ pour tout } p \text{ entier,}$$

ce qui est incompatible avec (5).

Notre assertion est ainsi démontrée.

Sur la notion du groupe abstrait topologique.

Par

F. Leja (Varsovie).

1. Soit G un *espace topologique*, c'est-à-dire un ensemble dont les éléments sont pourvus de certains voisinages satisfaisant aux quatre axiomes connus de M. Hausdorff[1]). Les éléments de G seront désignés par des lettres minuscules $a, b, \ldots x$, les sous-ensembles de G par des lettres majuscules $A, B, \ldots$, et les voisinages d'un élément x par des symboles U_x ou V_x.

Supposons qu'à chaque couple (a, b) d'éléments de G on ait fait correspondre un autre élément de G appelé *produit* de a par b et désigné par ab, cette correspodance étant assujettie aux conditions suivantes:

1^0 Quels que soient a, b, et c on a

$$(ab)\,c = a\,(bc)$$

2^0 Il existe un élément e de G, appelé *unité*, tel que, quel que soit a, on a

$$ae = ea = a$$

3^0 A chaque élément a, il existe un autre élément, appelé *élément inverse* de a et désigné par a^{-1}, tel qu'on a

$$aa^{-1} = e$$

4^0 A chaque voisinage U_{ab} du produit de deux éléments quelconques a et b il existe des voisinages U_a et U_b tels qu'on a[2])

$$U_{ab} \supset U_a \cdot U_b.$$

1) F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914, p. 213.

2) A et B étant deux sous-ensembles de G, AB désignera l'ensemble de tous les produits ab, où $a \subset A$ et $b \subset B$. La signification de Ab où bA sera analogue. $A \supset B$, ou $A \supset b$, signifiera que chaque élément de B, ou l'élement b, appartient à A.

5^0 À chaque voisinage U_e de l'unité il existe un autre voisinage V_e tel qu'on a [1])

$$U_e \supset (V_e)^{-1}.$$

Dans ces conditions, l'espace G sera dit *groupe topologique*. Il sera dit groupe connexe, compacte, métrique etc, lorsque l'espace G l'est aussi [2]).

Le but de cette note est d'indiquer quelques propriétés générales des groupes topologiques et, en particulier, des groupes connexes.

2. Les trois propositions suivantes, valables pour les groupes abstraits finis, résultent immédiatement des hypothèes 1^0, 2^0 et 3^0:

Il n'existe qu'un seule élément-unité.

L'élément inverse de a^{-1} est a.

Lorsque $ac = bc$, ou $ca = cb$ on a $a = b$ quels que soient a, b, c.

Lemme 1. *Quels que soient deux éléments a et b d'un groupe topologique, il existe à chaque voisinage U_a un voisinage U_{ab} et un voisinage U_{ba} tels que*

$$(1) \qquad U_a \cdot b \supset U_{ab} \quad , \quad b\, U_a \supset U_{ba}.$$

Démonstration: Soit G un groupe topologique et a et b deux éléments de G. Etant $a = ab.\, b^{-1}$ il existe, d'après l'hypothèse 4^0, deux voisinages U_{ab} et U_{b-1} tels que

$$U_a \supset U_{ab} \cdot U_{b-1}$$

[1]) A étant un sous-ensemble de G, A^{-1} désignera l'ensemble de tous les éléments a^{-1} où $a \subset A$.

[2]) Les groupes continus de Lie sont, abstraction faite de la signification spéciale de leurs éléments, des cas spéciaux des groupes topologiques.

En m'appuyant sur les *classes* (L) de Fréchet, j'ai posé autrefois (v. *Annales de la Soc. Polon. de Mathem.* (Cracovie) t. III p. 153) la définition analogue d'un groupe, dit groupe (L), comme il suit:

C'est une classe (L) dans laquelle le produit de deux éléments quelconques est défini de sorte que les hypothèses 1^0, 2^0 et 3^0 de ci-dessus soient satisfaites et que les hypothèses 4^0 et 5^0 soient remplacées par les suivantes (adaptées à la notion de la limite définie dans la classe (L):

4^0 Lorsque $a_n \to a$ et $b_n \to b$ on a $a_n b_n \to ab$.

5^0 Lorsque $a_n \to e$ on a $a_n^{-1} \to e$.

Voir aussi: O. Schreier: Abstr. cont. Gruppen (*Abh. Mathem. Seminar. d. Hamburger Univ.* t. IV. 1925, p. 15).

donc

$$(2) \qquad U_a \supset U_{ab} \cdot b^{-1}$$

car b^{-1} appartient à U_{b-1}. Il suffit de multiplier la formule (2) par b pour obtenir la première des formules (1). La seconde d'elles se démontre pareillement.

Lemme 2. *Quels que soient a^{-1} et U_{a-1} il existe un voisinage U_a tel que*

$$U_{a-1} \supset (U_a)^{-1}.$$

Démonstration: Il existe, d'après le lemme précédant, un voisinage U_e tel que

$$U_{a-1} \cdot a \supset U_e$$

et, d'après 5^0, il existe à U_e un voisinage V_e tel que

$$U_e \supset (V_e)^{-1}$$

donc

$$U_{a-1} \cdot a \supset (V_e)^{-1}$$

et par suite [1]),

$$U_{a-1} \supset (V_e)^{-1}\, a^{-1} = (a\, V_e)^{-1}.$$

D'autre part, il existe à a et V_e un voisinage U_a tel qu'on a

$$a\, V_e \supset U_a;$$

les deux dernières formules prouvent notre lemme.

Lemme 3. *Lorsque un sous-ensemble A de G est connexe* [2]) *les trois ensembles*

$$A\, x, \; x\, A \; , \; A^{-1}$$

sont connexes quel que soit $x \subset G$.

Démonstration: Posons $Ax = C + D$ et supposons que les ensembles C et D ne soient pas vides et qu'ils n'aient pas des éléments communs. Les ensembles $C\,x^{-1}$ et $D\,x^{-1}$ n'auront, de même, aucun élément commun. Mais on a

$$A = C\,x^{-1} + D\,x^{-1},$$

donc, A étant connexe, il existe un élément γ appartenant, par

[1]) On prouvera facilement les formules

$$(ab)^{-1} = b^{-1}\,a^{-1} \quad , \quad (Aa)^{-1} = a^{-1}\,A^{-1}.$$

[2]) au sens de M. Hausdorff.

exemple, à Cx^{-1} tel que chaque voisinage U_γ contient des éléments de Dx^{-1}. Posons $\gamma = cx^{-1}$ et soit U_c un voisinage quelconque de c. D'àprès le lemme 1, il existe un U_γ tel que

$$U_c \cdot x^{-1} \supset U_\gamma.$$

Soit δ un élément de Dx^{-1} appartenant à U_γ et soit $\delta = dx^{-1}$; on aura

$$U_c\, x^{-1} \supset d\, x^{-1}$$

et, par suite,

$$U_c \supset d.$$

Mais, on a évidemment $c \subset C$ et $d \subset D$, donc chaque voisinage d'un élément de C contient des éléments de D ce qui prouve la connexité de l'ensemble Ax.

La connexité de xA et de A^{-1} se démontre d'une manière analogue.

3. Théorème I. *Le groupe topologique contenant au moins un élément d'accumulation*[1]) *est dense en soi.*

Démonstration: Soit G un groupe topologique dont un élément a est isolé je dis que tous les éléments de G sont isolés. En effet, Soit U_a un voisinage de a ne contenant qu'un nombre fini d'éléments et soit x un élément quelconque de G et $y = a^{-1}x$. A U_a et à y il existe, d'après le lemme 1, un voisinage $U_{ay} = U_x$ tel que

$$U_a \cdot y \supset U_x,$$

donc U_x ne contient qu'un nombre fini d'éléments et, par suite, x est isolé.

Les groupes connexes jouissent d'une propriété encore plus singulière que voici: Appelons *parfaitement dense en soi* chaque espace topologique dans lequel l'ensemble des éléments contenus dans un voisinage quelconque est de la même puissance que l'espace lui-même.

Théorème II. *Les groupes connexes sont parfaitement denses en soi.*[2]).

[1]) x est l'élément d'accumulation de G, si chaque U_x contient une infinité d'éléments de G; dans le cas contraire x est dit isolé. Dense en soi = sans points isolés.

[2]) Je suppose vraies les relations

$$2m = m,\ m^n = m,\ m\aleph_0 = m,$$

m étant un nombre cardinal transfini et n un nombre naturel quelconque.

Démonstration: Soit G un groupe connexe, a un de ses élements et U_a un voisinage quelconque de a. Considérons l'ensemble A de tous les produits

$$(3) \qquad a_1^{s_1}\, a_2^{s_2} \ldots a_n^{s_n}$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont des éléments de U_a, $s_i = \pm 1$ et n est un nombre naturel quelconque. Je dis que

$$A = G.$$

En effet, soit α un élément quelconque de G dont chaque voisinage U_α contient des éléments de A. D'après le lemme 1, il existe à U_a un voisinage U_α tel que

$$(4) \qquad U_a \cdot a^{-1}\alpha \supset U_\alpha.$$

Soit c un élément de A appartenant à U_α et $b = c\alpha^{-1}a$, d'où

$$\alpha = ab^{-1}c.$$

L'élément b appartiendra à U_a et, par suite, $b^{-1} \subset A$. Il en résulte que $\alpha \subset A$, car le produit d'un nombre fini d'éléments appartenant à A y appartient aussi, donc l'ensemble A est *fermé dans* G.

D'autre part, soit α un élément de A; la formule (4) montre qu'un certain voisinahe U_α appartient entièrement à A donc α est un élément *intérieur* de A.

Il en resalte, en vertu de la connexité de G, que l'ensemble $G - A$ est vide et, par conséquent, que $A = G$. Posons

$$U = U_a + (U_a)^{-1}$$

et

$$B = U + U^2 + \cdots + U^n + \cdots$$

et désignons par $|U_a|$ le nombre cardinal de U_a. On a, d'une part,

$$|U_a| = |U| = |U^n|$$

et

$$|B| = |U_a| \cdot \aleph_0 = |U_a|;$$

d'autre part, les ensembles A et B sont identiques, car chaque élément de B est de la forme (3) et chaque produit (3) appartient à B, donc $B = G$ et, par suite, $|U_a| = |G|$.

4. Soit U_e un voisinage quelconque de l'unité. Je dirai que l'ensemble, composé de tous les produits

(5) $$a_1\, a_2 \cdots a_n,$$

où chaque $a_i \subset U_e$ et n est un nombre naturel quelconque, *est obtenu par la composition des éléments de* U_e.

Théorème III. *Chaque groupe connexe peut être obtenu par la composition des éléments appartenant à un voisinage quelconque de l'unité.*

Démonstration: Soit G un groupe connexe, U_e un voisinage de l'unité et E l'ensemble des tous les produits (5), où chaque $a_i \subset U_e$. Je dis que l'ensemble E est *fermé* dans G.

En effet, soit α un élément-d'accumulation de E et $U_{\alpha-1}$ un vosinage tel que

$$U_e \cdot \alpha^{-1} \supset U_{\alpha-1}.$$

D'après le lemme 2, il existe un voisinage U_α tel que

$$U_{\alpha-1} \supset (U_\alpha)^{-1}$$

donc

(6) $$U_e\, \alpha^{-1} \supset (U_\alpha)^{-1}.$$

Soit a un élèment de E appartenant à U_α et b un tel qu'on ait $b\,\alpha^{-1} = a^{-1}$, où

$$\alpha = ab.$$

D'après (6) b appartiendra à U_e et, par suite, $\alpha \subset E$.

D'autre part, en vertu de la seconde des formules (1), on a

$$\alpha\, U_e \supset U_\alpha$$

donc, lorsque $\alpha \subset E$, un certain voisinage de α appartient entièrement à E et, par suite, α est un élément intérieur de E. Mais, G est connexe donc $G - E$ est vide et, par suite, $E = G$, c. q. f. d.

5. Soit G un groupe topologique *non connexe*. Désignons par E la composante[1]) de G contenant l'unité. Je dis que:

L'ensemble E forme un groupe, c'est-à-dire, lorsque a et b appartiennent à E, ab et a^{-1} y appartiennent aussi.

En effet, soient a et b deux éléments quelconques de E. L'ensemble $E\,b$ est, en vertu du lemme 3, connexe et contient

1) c'est-á-dire le plus grand sous-ensemble connexe.

l'élément b, donc $E\,b$ fait partie de E. Mais $ab \subset E\,b$ donc $ab \subset E$. D'autre part, $E\,a^{-1}$ est connexe et contient l'onité donc $E\,a^{-1}$ fait partie de E et, par suite, $a^{-1} \subset E$, car $a^{-1} \subset$ $\subset E\,a^{-1}$, c. q. f. d.

Désignons par Γ l'ensemble de toutes les composantes de G et par $E, A, B, \ldots$ les éléments de Γ, dont E séra supposé contenir l'unité de G. Je dis que:

Deux composantes quelconques A et B sont homéomorphes c'est-à-dire, il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de A et de B telle que, quels que soient deux éléments correspondants a et b, où $a \subset A$, $b \subset B$, et deux sous-ensembles correspondants A' et B', où $A' \subset A$, $B' \subset B$, si a est un élément-d'accumulation de A', b l'est aussi pour B' et réciproquement.

En effet soient A et E deux composantes dont A est quelconque et E contient l'unité de G et soit a un élément quelconque de A. L'ensemble

$$a\,E$$

est le plus grand sous-ensemble connexe de G contenant a donc $a\,E = A$. La correspondance

$$x \sim ax, \text{ où } x \subset E$$

entre les éléments de E et ceux de A est évidemment biunivoque. Soit E' un sous-ensemble de E; $aE' = A'$ sera le sous-ensemble correspondant de A. Supposons que chaque U_x, où $x \subset E$, contienne une infinité des éléments de E' et soit U_{ax} un voisinage quelconque de ax. On a U_x étant convenablement choisi,

$$U_{ax} \supset a\,U_x$$

donc U_{ax} contient une infinité des éléments de A'. La réciprocité est encore vraie, donc les composantes A et E et, par suite, deux composantes quelconques sont homéomorphes.

En terminant, nous donnons encore un *exemple* d'un *groupe métrique*. Soit

$$G = \{\, f(x),\ g(x), \ldots \}$$

l'ensemble de toutes les fonctions réelles, définies dans l'intervalle $<0, 1>$ et bornées et soit

$$\rho\,(f, g) = \text{borne sup. de } |\, f(x) - g(x)\,|$$

la distance des éléments $f(x)$ et $g(x)$. Définissons le produit (fg) de deux éléments $f(x)$ et $g(x)$ comme il suit:

$$(fg) = f(x) + g(x)$$

et soit

$$e = \epsilon(x) \equiv 0$$

l'unité et

$$f^{-1} = -f(x)$$

l'élément inverse de $f(x)$. Les voisinages étant définis comme ordinairement on voit que toutes les hypothèses specifiées au début sont satisfaites, donc G forme un groupe métrique. Il est connexe et de puissance plus grande que celle du continu.

Sur la puissance des ensembles d'une certaine classe

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Introduction. Dans la Note *„Un théorème concernant la puissance d'ensembles de points"* [1]) M. Kuratowski a démontré que les ensembles qu'on obtient en partant des intervalles et en appliquant un nombre fini ou une infinité dénombrable de fois les opérations A et C (complémentaire), ensembles dont l'étude a été proposée par M. Lusin [2]) et dont la classe nous désignerons par L, jouissent de la propriété P suivante:

Tout ensemble de la classe L ne contenant aucun sous-ensemble parfait est de puissance $\leqslant \aleph_1$.

La démonstration de M. Kuratowski s'appuit sur la même propriété des ensembles que j'ai nommés *hyperboreliens*, propriété que j'ai établie dans la note *„Sur les ensembles hyperboreliens"* [3]). M. Kuratowski prouve par l'induction transfinie que tout ensemble de la classe L est un ensemble hyperborelien.

Dans la présente note nous démontrerons sans recours à l'induction transfinie (en utilisant seulement quelques propriétés des ensembles (A) antérieurement démontrées) que tout ensemble de la classe L est un ensemble hyperborelien, et nous indiquerons comment on pourrait démontrer directement (sans

[1]) Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie. Séance du 29 avril 1925.

[2]) Voir: Fund. Math. t. V, p. 165, note [3]).

[3]) C. R. de la Soc. des Sciences de Varsovie, séance du 29 avril 1926.