On pourra extraire de la suite $\Psi_1, \Psi_2, \cdots$ une suite $\Psi_{11}, \Psi_{21}, \Psi_{31}, \cdots$; puis de cette suite une suite $\Psi_{12}, \Psi_{22}, \Psi_{32}, \cdots$ et ainsi de suite, de sorte que les distances de deux fonctions quelconques prises dans la suite $\Psi_{1n}, \Psi_{2n}, \Psi_{3n}, \cdots$ soient toutes $< \frac{1}{n}$, quelque soit l'entier n. Alors la suite $\Psi_{11}, \Psi_{22}, \cdots \Psi_{nn}, \cdots$ est une suite extraite de la suite donnée et qui converge en mesure sur E.

Généralisations. 1^0 Dans ce qui précéde, nons avons supposé que l'ensemble linéaire E était borné. Dans le cas général, on pourra évidemment énoncer la généralisation suivante: étant donné un ensemble F de fonctions mesurables sur toute partie bornée et mesurable d'un ensemble linéaire fixe E, pour que de toute suite infinie de fonctions de F, on puisse extraire une suite convergeant en mesure sur toute partie bornée de E, il faut et il suffit que sur toute partie bornée de E les fonctions de E soient „également" presque bornées et „également" presque continues.

2^0 La condition que E soit un ensemble linéaire n'est nullement essentielle; on peut au moins supposer que E appartienne à un espace à un nombre fini de dimensions.

Un probléme à résoudre. J'ai eu à faire allusion dans ce qui précède à la seconde partie d'un mémoire de Calcutta cité plus haut en note. La première partie de ce mémoire contenait certains résultats qui suggérent la question que nous allons poser et pourraient peut être en faciliter la solution:

Est-il possible de définir directement d'une façon simple le mode de convergence le plus général d'une suite de fonctions, qui, tout en impliquant la convergence ordinaire, soit susceplible, en outre, d'être defini par l'intermédiaire d'une definition de la „distance" ou au moins de „l'écart de deux fonctions"? [1]). On pourrait ne traiter le problème que pour des fonctions d'une nature déterminée (fonctions uniformément continues sur un intervalle fixe, par exemple).

16 février 1926.

[1]) Voir le mémoire cité pour la signification de ces termes.

Remarque sur la convergence en mesure

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

D'après M. Fréchet on dit que la suite de fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ converge vers $f(x)$ *en mesure* dans un intervalle I si, quel que soit le nombre $\varepsilon>0$, l'ensemble des points x de I, où $|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon$, peut être enfermé dans un ensemble E_n formé d'une suite finie ou non d'intervalles dont la longueur totale tend vers 0 quand n croit indéfiniment.[1])

On démontre sans peine que pour une suite de fonctions *mesurables* la convergence ordinaire entraîne la convergence en mesure (vers la même fonction limite). Or, ce n'est pas le cas pour une suite de fonctions quelconques d'une variable réelle: *une suite de fonctions non mesurables peut converger vers $f(x)$ au sens ordinaire, sans converger en mesure.*

En effet, il existe, comme on sait, dans l'intervalle (0, 1) une suite infinie d'ensembles $H_1, H_2, H_3, \ldots$, sans points communs deux à deux et dont chacun est de mesure extérieure 1, $m_e(H_n)=1$, pour $n=1, 2, 3, \ldots$ [2])

Désignons par $f_n(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $H_n+H_{n+1}+H_{n+2}+\ldots$: nous aurons évidemment

$$\lim_{n=\infty} f_n(x)=0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

[1]) M. Fréchet: *Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable*, Bulletin of the Calcutta Math. Soc. Vol. XI (1921), p. 197. Cf. aussi *Fund. Math.* t. IX, p. 26.

[2]) Voir p. e. ma note *Sur un ensemble non mesurable* dans Tôhoku Math. Journ. Vol. 12 (1917), p. 205.

Or, l'ensemble E_n de points x de $(0, 1)$, où $f_n(x) = 1$, contient évidemment H_n et parsuite: $m_e(E_n) = 1$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ La suite $f_n(x)$ ne converge donc pas vers 0 en mesure dans l'intervalle $(0, 1)$.

Il en résulte que la définition de la convergence en mesure perd une partie de son intérêt quand on l'applique à des fonctions non mesurables.

Dans son mémoire cité M. Fréchet exprime aussi la définition de la convergence en mesure par l'intermédiaire d'une „distance" de deux fonctions. Il s'impose donc la question si l'on pourrait définir autrement la distance de deux fonctions (mesurables on non) de sorte qu'elle fournisse une généralisation de la convergence ordinaire. Or, nous prouverons qu'*il est impossible de définir la „distance" et même „l'écart" de deux fonctions quelconques, de sorte que quelques conditions simples, imposées par l'intuition, soient vérifiées.*

Nous ne considérerons d'ailleurs que l'ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions pérodiques $f(x)$ à période $= 1$ et n'admettant que deux valeurs: 0 et 1. Nous prouverons qu'il est impossible d'attacher à tout couple f, φ de fonctions appartenant à $\mathcal{F}$ un nombre $(f, \varphi) = (\varphi, f) \geqslant 0$, dit l'écart de f et φ dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$, de sorte que les trois conditions suivantes soient verifiées:

1) 0 désignant la fonction identiquement nulle et 1 — la fonction constamment $= 1$, on a $(0, 0) = 0$ et $(1, 0) > 0$.

2) Pour tout nombre réel a (indépendant de x) l'écart des fonctions $f(x+a)$ et $\varphi(x+a)$ est égal à l'écart de $f(x)$ et $\varphi(x)$.

3) Si $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $\lim\limits_{n=\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$.

En effet, divisons tous les nombres réels en classes, en rangeant deux nombres x et y dans une même classe dans ce et seulement dans ce cas, lorsque $y - x$ et un nombre de la forme $k\sqrt{2} + l$, où k et l sont des nombres entiers [1]. Dans chaque classe choisissons un élément: soit N l'ensemble de tous le éléments ainsi choisis. Pour tout nombre réel x il

[1]) Cf. H. Lebesgue: *Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo.* Bull. Soc. Math. de France t. 35 (1907).

existe donc un et un seul nombre $\nu(x)$ de l'ensemble N qui appartient à la même classe que x: le nombre $x - \nu(x)$ est donc de la forme $k\sqrt{2} + l$, où k et l sont des entiers. L'égalité $k\sqrt{2} + l = k'\sqrt{2} + l'$ entraînant, pour k, l, k', l' entiers, les égalités $k = k', l = l'$, on voit sans peine qu'à tout nombre réel x correspondent deux entiers bien déterminés $k(x)$ et $l(x)$, tels que

$$x - \nu(x) = k(x).\sqrt{2} + l(x).$$

Désignons, pour tout entier p, par M_p l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $k(x) \geqslant p$, et soit $f_p(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble M_p. On voit sans peine qu'une translation de longueur 1 transforme l'ensemble M_p en lui même (puisque $k(x+1) = k(x)$ pour tout x réel). Donc, on a

$$f_p(x+1) = f_p(x) \text{ pour tout } x \text{ réel et } p \text{ entier.}$$

Les fonctions $f_p(x)$ appartiennent donc toutes à l'ensemble $\mathcal{F}$.

Or, on voit sans peine que les ensembles M_p et M_{p+1} sont superposables par une translation de longueur $\sqrt{2}$ (puisque $\nu(x + \sqrt{2}) = \nu(x)$, $l(x+\sqrt{2}) = l(x)$ et $k(x+\sqrt{2}) = k(x) + 1$, pour tout x réel). Il en résulte que tous les ensembles M_p $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sont superposables, et que

$$f_{p+1}(x) = f_p(x + \sqrt{2}) \text{ pour tout } x \text{ réel et } p \text{ entier,}$$

donc, d'aprés la propriété 2) de l'écart:

$$(1) \qquad (f_{p+1}, 0) = (f_p, 0) \quad \text{pour} \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

0 désignant la fonction identiquement nulle.

Or, il résulte de la définition des ensembles M_p qu'on a

$$(2) \qquad x \,\varepsilon\, M_p \quad \text{pour} \quad p \leqslant k(x)$$

et

$$(3) \qquad x \text{ non } \varepsilon\, M_p \quad \text{pour} \quad p > k(x).$$

D'après (3) et la définition de $f_p(x)$, nous avons évidemment pour tout x réel

$$f_p(x) = 0 \quad \text{pour} \quad p > k(x),$$

donc

$$\lim_{p=\infty} f_p(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \text{ réel}$$

et parsuitè, d'après les proprietétés 3) et 1) d'écart:

(4) $$\lim_{p=\infty} (f_p, 0) = (0, 0) = 0.$$

Or, d'après (1), les termes de la suite $(f_p, 0)$ ont tous une valeur fixe: donc, d'après (4):

(5) $$(f_p, 0) = 0 \text{ pour tout } p \text{ entier.}$$

D'autre part, d'après (2) et la définition de $f_p(x)$, nous avons

$$f_p(x) = 1 \quad \text{pour} \quad p < k(x),$$

donc

$$\lim_{p=-\infty} f_p(x) = 1 \text{ pour tout } x \text{ réel}$$

et parsuite, d'après les propriétés 3) et 1) d'écart:

$$\lim_{p=-\infty} (f_p, 0) = (1, 0) > 0,$$

donc, d'après (1):

$$(f_p, 0) > 0 \text{ pour tout } p \text{ entier,}$$

ce qui est incompatible avec (5).

Notre assertion est ainsi démontrée.

Sur la notion du groupe abstrait topologique.

Par

F. Leja (Varsovie).

1. Soit G un *espace topologique*, c'est-à-dire un ensemble dont les éléments sont pourvus de certains voisinages satisfaisant aux quatre axiomes connus de M. Hausdorff[1]). Les éléments de G seront désignés par des lettres minuscules $a, b, \ldots x$, les sous-ensembles de G par des lettres majuscules $A, B, \ldots$, et les voisinages d'un élément x par des symboles U_x ou V_x.

Supposons qu'à chaque couple (a, b) d'éléments de G on ait fait correspondre un autre élément de G appelé *produit* de a par b et désigné par ab, cette correspodance étant assujettie aux conditions suivantes:

1^0 Quels que soient a, b, et c on a

$$(ab)\,c = a\,(bc)$$

2^0 Il existe un élément e de G, appelé *unité*, tel que, quel que soit a, on a

$$ae = ea = a$$

3^0 A chaque élément a, il existe un autre élément, appelé *élément inverse* de a et désigné par a^{-1}, tel qu'on a

$$aa^{-1} = e$$

4^0 A chaque voisinage U_{ab} du produit de deux éléments quelconques a et b il existe des voisinages U_a et U_b tels qu'on a[2])

$$U_{ab} \supset U_a \cdot U_b.$$

[1]) F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914, p. 213.

[2]) A et B étant deux sous-ensembles de G, AB désignera l'ensemble de tous les produits ab, où $a \subset A$ et $b \subset B$. La signification de Ab où bA sera analogue. $A \supset B$, ou $A \supset b$, signifiera que chaque élément de B, ou l'élement b, appartient à A.