telle que

$$(8)\quad S^{(p+1)} = \Phi_{\Theta_{n,m+1'}n}(S^{(p)}).$$

Or, on a:

angle $(\Theta_{n,m+1'}\,\Theta) < \frac{\pi}{n^2}$, donc en vertu

de (8) et du lemme du § précédent:

$$\text{mes}\,(S_\Theta{}^{(p+1)}) < \frac{10^8}{n}.$$

Par conséquent, S étant contenu dans $S_\Theta{}^{(p+1)}$:

$$\text{mes}\,(S_\Theta) < \frac{10^8}{n}, \text{ d'où:}$$

$$\text{mes}\,(S_\Theta) = 0.$$

L'ensemble S jouit donc de toutes les propriétés demandées.

Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables.

Par

Maurice Fréchet (Université de Strasbourg).

Sens du mot compact. Dans une note récente[1]), M. P. Veress a étudié les ensembles compacts de fonctions mesurables au sens de M. Lebesgue.

Toutefois, il a attaché au sens du mot compact une signification qui n'est pas la seule qu'on pourrait lui donner. Il est bien vrai que la définition générale des ensembles compacts donnée dans ma Thèse (p. 6, § 9) m'a conduit à traduire cette définition dans le cas où leurs éléments sont des fonctions continues sur un intervalle borné fixe sous la forme employée par M. Veress dans un cas plus général. A savoir: un ensemble de fonctions serait compact lorsque de toute suite infinie de ces fonctions, on peut extraire une suite qui converge *uniformément*.

Mais la notion d'ensemble compact tire tout son intérêt du fait qu'elle caractérise une propriété de l'ensemble *quand on tient compte de la façon dont sont définies dans cet ensemble les suites convergentes d'éléments.* C'est dire que la définition d'un ensemble compact de fonctions ne peut être précisée que si l'on a précisé auparavant quelle est la définition adoptée pour la convergence d'une suite d'éléments de l'ensemble.

La dèfinition de l'ensemble compact de fonctions *continues* que j'avais adoptée comme conséquence de ma définition générale était basée sur le choix préalablement fait de la convergence dans le champ des fonctions continues. Il m'avait paru que dans ce champ, il convient, en vue des applications, de ne considérer

[1]) Ueber kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen, *Fund. Math.*, t. VII, 1925, p. 244.

une suite d'éléments comme convergente que si ces éléments sont des fonctions continues qui convergent *uniformément.*

La question qui se pose maintenant est celle-ci. Convient-il pour le cas du champ des fonctions mesurables de s'en tenir à la même convergence? C'est ce que fait M. Veress. Il n'y a aucune inexactitude, il n'y a aucun inconvénient logique à le faire. On peut même en le faisant obtenir des résultats utiles.

Convergence en mesure. Toutefois, il semble que les recherches sur les fonctions mesurables aient amené la plupart des auteurs à introduire une définition différente de la convergence. Sous des noms diffèrents, M. M. Hardy, F. Riesz, ... ont appelé convergence asymptotique, convergence en mesure etc. la propriété suivante:

On dit qu'une suite de fonctions $f_1(x), f_2(x), \cdots f_n(x), \cdots$ converge en mesure sur un ensemble E vers une fonction $f(x)$, si, à partir d'un rang assez élevé, $f_n(x)$ diffère aussi peu que l'on veut de $f(x)$ partout sur E sauf peut être sur un ensemble de mesure aussi petite que l'on veut. Autrement dit quels que soient les nombres $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, il existe un entier p tel que l'on ait, pour $n > p$ partout sur E

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \eta$$

sauf peut être sur un ensemble E_n de mesure $< \varepsilon$.

Si l'on adopte le point de vue de ces auteurs, on est amené à donner au sens du mot compact un sens différent de celui de M. Veress.

En effet, toutes les fois que dans un espace abstrait une définition de la convergence d'une suite de points abstraits a été donnée, on peut appeler ensemble compact de points un ensemble tel que de chaque suite infinie de ses points on puisse extraire une suite convergente.

Dans le cas où ces points abstraits sont des fonctions mesurables, on sera amené à supposer que la convergence dont il s'agit est la convergence *en mesure.*

Remarques. I. On peut ensuite sans inconvénient remplacer celle-ci par une convergence un peu *plus restrictive,* que nous pouvons appeler la convergence presque uniforme presque partout. En effet M. F. Riesz a démontré que de toute suite

de fonctions mesurables [1]) convergeant en mesure, on peut extraire une suite de fonctions qui convergent presque partout.

Au moyen d'un théorème bien connu de M. Egoroff, on en conclut qu'on peut même choisir cette suite de façon qu'elle converge uniformément sauf peut être dans un ensemble de mesure non nécessairement nulle, mais pouvant être fixée aussi petite que l'on veut.

II. Je rappelle en même temps, parce que cela nous sera utile par la suite, un résultat démontré dans mon mémoire de Calcutta cité en note plus haut: la définition de la convergence en mesure peut être exprimée par l'intermédiaire d'une „distance". Plus précisément, soient deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ définies sur un ensemble E, appelons distance de f et φ sur E et désignons par (f, φ) la borne inférieure de

$$\omega + M_{|f-\varphi|>\omega}$$

quand ω est un nombre $\geqslant 0$ quelconque, en représentant par $M_{|f-\varphi|>\omega}$ la mesure (extérieure) de l'ensemble des points de E où $\left|f-\varphi\right| > \omega$. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ en mesure sur l'ensemble fixe E est que la distance (f_n, f) tende vers zéro avec $1/n$.

III. Nous aurons aussi à utiliser une propriété des fonctions mesurables qu'on peut exprimer ainsi: toute fonction mesurable est presque uniformément continue. C'est à dire que si $f(x)$ est mesurable sur un ensemble borné E, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble e (éventuellement vide) de mesure $< \varepsilon$ tel que $f(x)$ soit uniformément continue sur $E - e$. (ε peut être arbitrairement petit, mais on ne peut pas en déduire qu'on peut le prendre nul; c'est pourquoi nous ne disons pas que $f(x)$ est uniformément continue, (ni même simplement continue), presque partout.

[1]) On peut même supprimer dans cet énoncé la restriction que les fonctions soient mesurables. Voir M. Fréchet, *Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable,* Bull. Calcutta Math. Soc., vol XI, 1921, p. 199.

On démontre d'abord que $f(x)$ est continue sur $E - e_1$, e_1, étant un ensemble convenable de mesure $< \varepsilon$ [1]); puis on couvre e_1, par un ensemble dénombrable d'intervalles de longueur totale $< \varepsilon$, et on appelle e l'ensemble des point *intérieurs* chacune à l'un au moins de ces intervalles. Alors $f(x)$ étant continue sur l'ensemble borné et fermé $E - e_1$ est aussi uniformément continue sur $E - e$.

Il en résulte que $\left|f(x)\right|$ a une borne supérieure finie A sur $E - e$ et que, quelque soit $\omega > 0$, on peut décomposer l'intervalle borné fixe J sur lequel est placé E en Q intervalles égaux $T_1, T_2, \cdots T_Q$ de sorte que l'oscillation de $f(x)$ soit $< \omega$ dans la partie commune à $E - e$ et à chacun des intervalles $T_1, T_2, \cdots T_Q$.

Ainsi étant donnés les nombres positifs ω et ε et la fonction $f(x)$ mesurable sur E, il existe deux nombres Q et A et un ensemble e de mesure $< \varepsilon$ tels que 1-o $|f(x)| < A$ sur $E-e$, 2-o l'oscillation de $f(x)$ soit inférieure à ω sur les points de $E - e$ appartenant à l'un des Q intervalles égaux $T_1, T_2 \cdots\cdots T_Q$.

IV. Il nous sera utile de remarquer si $f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots$ est une suite de fonction mesurables *qui convergent en mesure* sur E, il est possible de déterminer les nombres Q et A, (connaissant ω et ε) indépendamment de la fonction $f(x)$ prise en un rang quelconque de cette suite. C'est ce que nous exprimerons en disant que les termes de la suite sont „également" presque bornés et „également" presque continues sur E. (Pour la suite, il nous suffira de démontrer que cela a lieu à partir d'un certain rang).

Appelons en effet $\varphi(x)$ la limite en mesure de la suite $f_1(x)$, $f_2(x), \cdots$ C'est une fonction mesurable. Appelons q, a, α ce que deviennent Q, A, e quand on remplace ω, ε, $f(x)$ par $\frac{\omega}{3}$, $\frac{\varepsilon}{2}$ et $\varphi(x)$. Il existe un rang p tel que pour $n > p$

$$|f_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\omega}{3}$$

pour tout point x de E sauf peut être sur un ensemble β_n convenablement choisi, de mesure $< \frac{\varepsilon}{2}$. Alors l'ensemble $e_n = \alpha + \beta_n$ est de mesure $< \varepsilon$ et en dehors de e_n, on a

$$|f_n(x)| \leqslant |\varphi(x)| + |f_n(x) - \varphi(x)| < a + \frac{\omega}{3};$$

on peut donc prendre $a + \frac{\omega}{3}$ pour valeur de A corespondant à ε et f_n. A est donc indépendant du rang n de f_n, à partir du rang $p + 1$.

D'autre part, si on divise T (intervalle arbitraire fixe contenant E) en q intervalles égaux $T_1, T_2, \cdots T_q$ et si G_k est l'ensemble des points de $E - e_n$ appartenant à T_k, on aura pour deux points quelconque x, x' de G_k

$$|f_n(x) - f_n(x')| \leqslant |f_n(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x')| + |\varphi(x') - f_n(x')| < \varepsilon$$

pour $n > p$. Par suite, on peut prendre le même nombre q pour valeur de Q lorsqu'on remplace $f(x)$ par l'une quelconque des fonctions $f_{p+1}, f_{p+2}, \cdots$

[1]) Voir p. e. *Fund. Math.* t. III, p. 320.

Modification du problème de M. Veress. Nous allons maintenant résoudre le même problème que M. Veress: déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble F de fonctions mesurables soit compact. Mais nous attacherons au sens du mot compact la signification précisée plus haut. C'est à dire que dans la définition de M. Veress, nous substituerons la convergence en mesure à la convergence uniforme.

En outre, il ne nous sera pas nécessaire de nous limiter comme le fait M. Veress au cas des ensemble de fonctions uniformément bornés.

Réponse. L'analogie de la question posée avec le problème résolu par Arzelà concernant les ensembles de fonctions continues; et d'autre part, la remarque que nous venons de faire sur les suites de fonctions mesurables convergeant en mesure, nous suggèrent la réponse suivante:

étant donné un ensemble F de fonctions mesurables sur un ensemble linéaire borné fixe E, pour que de toute suite infinie de fonctions de F, on puisse tirer une suite convergeant en mesure sur E: il faut et il suffit que les fonctions de F soient „également" presque bornées et „également" presque continues sur E.

La condition précédente signifie que, pour tout système arbitraire de deux nombres positifs ε et ω, il existe deux nombres, Q et A tels que l'on puisse décomposer E en Q sous-ensembles fixes $E_1, E_2, \cdots E_Q$ et assigner à toute fonction $f(x)$ de F un ensemble e_f (éventuellement vide) de mesure $< \varepsilon$, de sorte que 1-o $|f(x)| \leqslant A$ sur $E - e_f$; 2-o l'oscillation de $f(x)$ sur chacun des ensembles $E_k - e_f$ est $< \omega$, $(k = 1, 2, \cdots Q)$.

Nous savons déjà que le choix de Q et A est possible pour chaque système $\varepsilon, \omega, f(x)$. La condition signifie que pour chaque système ε, ω, on peut prendre Q et A indépendamment du choix de $f(x)$ dans F.

Nous allons même prouver qu'on peut comme précédemment se limiter aux ensembles E_k obtenus en divisant l'intervalle fondamental fixe T en Q parties égales et appelant E_k l'ensemble commun à E et au $k^{ième}$ sous-intervalle.

D é m o n s t r a t i o n. La condition est nécessaire. Pour chaque système $\varepsilon, \omega, f(x)$, on peut déterminer Q et A. Soient $q(\varepsilon, \omega, f)$, $a(\varepsilon, \omega, f)$ les plus petites valeurs entières possibles des nombres Q et A (en remplaçant au besoin l'ensemble exceptionnel e_f par un autre jouant le même rôle pourvu que sa mesure reste $< \varepsilon$).

Il suffit de montrer que, si F est compact, pour chaque système ε, ω, les nombres $q(\varepsilon, \omega, f)$ et $a(\varepsilon, \omega, f)$ sont bornés supérieurement quand f varie parmi F. Car en prenant pour A la borne supérieure de $a(\varepsilon, \omega, f)$ la condition 1-o serait remplie. En ce qui concern 2-o, on évitera toute difficulté en supposant qu'on se limite, ce qui est possible, pour déterminer $q(\varepsilon, \omega, f)$ aux valeurs de Q qui sont de la forme $Q = 2^R$, R entier et relatives à des ensembles E_k obtenus en divisant l'intervalle fondamental fixe T en Q parties égales et prenant pour E_k l'ensemble commun à E et à la $k^{iéme}$ de ces parties. Alors en prenant pour Q indépendamment de f sur F la borne supérieure de $q(\varepsilon, \omega, f)$ quand f varie sur F, la condition 2-o sera aussi remplie.

Or si $q(\varepsilon, \omega, f)$ et $a(\varepsilon, \omega, f)$ n'étaient pas pour chaque système ε, ω, bornés quand f varie sur F, il existerait deux nombres $\varepsilon_o > o$, $\omega_o > o$ et une suite de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ de F telles que $q(\varepsilon_o, \omega_o \varphi_n) > n$ ou $a(\varepsilon_o, \omega_o \ \varphi_n) > n$, quel que soit l'entier n.

Puisque F est compact, on pourrait extraire de cette suite, une suite $f_1, f_2, \cdots$ qui converge en mesure sur E. A partir d'un certain rang p, les fonction de cette suite seraient „également" presque bornées et „également" presque continues sur E. Ceci est incompatible avec la définition de la suite des $\varphi_n(x)$.

La condition est aussi suffisante. Considérons une suite infinie de fonctions $\Psi_1, \Psi_2, \cdots \Psi_n, \cdots$ de F et deux nombres $\varepsilon > 0$, $\omega > 0$, puis les nombres correspondants Q et A et enfin les Q ensembles $E_1, E_2, \cdots E_Q$, tous utilisables à la fois pour $\Psi_1, \Psi_2 \cdots$. Appelons y_k^n la borne supérieure de $\Psi_n(x)$ dans $E_k - e_{\psi_n}$. On a, $0 \leqslant |y_k^n| \leqslant A$ quels que soient k et n. Donc le point Υ', de l'espace à Q dimensions, qui a pour coordonnées $y_1{}^n, \cdots y_Q{}^n$ reste quand n varie dans un domaine borné. Par suite on peut tirer de la suite des Υ^n une suite convergente $\Upsilon^{n_1}, \Upsilon'^{2}, \cdots$, et même, en commençant celle-ci à un rang assez élevé, on peut supposer que la distance de deux points quelconques de cette suite reste inférieure à une quantité donnée. Par conséquent, on peut extraire de la suite des Ψ_n, une suite $\Psi_{n_r}, \Psi_{n_r+1}, \cdots$ telle que

$$\left| y_k^{n_r+s} - y_k^{n_r+t} \right| < \omega \quad , \quad (k = 1, 2, \cdots Q)$$

quelque soient les entiers s et t. Alors, dans les mêmes conditions, on aura en posant $\theta_s(x) = \Psi_{n_r+s}(x)$

$$\left| \theta_s(x) - \theta_t(x) \right| \leqslant \left| \theta_s(x) - y_k^{n_r+s} \right| + \left| y_k^{n_r+s} - y_k^{n_r+t} \right| +$$

$$+ \left| y_k^{n_r+t} - \theta_t(x) \right| < 3\,\omega$$

sur E, sauf, peut être, sur l'ensemble $\gamma = e_{\theta_r} + e_{\theta_s}$ qui est de mesure $< 2\,\varepsilon$. Par suite,

$$3\,\omega + \mathcal{M}_{|\theta_r - \theta_s| > 3\,\omega} \qquad < 3\,\omega + 2\,\varepsilon$$

Donc la distance de deux fonctions quelconques de la suite $\theta_1, \theta_2, \cdots$ tirée de la suite $\Psi_1, \Psi_2, \cdots$ est inférieure à $3\,\omega + 2\,\varepsilon$.

On pourra extraire de la suite $\Psi_1, \Psi_2, \cdots$ une suite $\Psi_{11}, \Psi_{21}, \Psi_{31}, \cdots$; puis de cette suite une suite $\Psi_{12}, \Psi_{22}, \Psi_{32}, \cdots$ et ainsi de suite, de sorte que les distances de deux fonctions quelconques prises dans la suite $\Psi_{1n}, \Psi_{2n}, \Psi_{3n}, \cdots$ soient toutes $< \frac{1}{n}$, quelque soit l'entier n. Alors la suite $\Psi_{11}, \Psi_{22}, \cdots \Psi_{nn}, \cdots$ est une suite extraite de la suite donnée et qui converge en mesure sur E.

Généralisations. 1⁰ Dans ce qui précédé, nons avons supposé que l'ensemble linéaire E était borné. Dans le cas général, on pourra évidemment énoncer la généralisation suivante:

étant donné un ensemble F de fonctions mesurables sur toute partie bornée et mesurable d'un ensemble linéaire fixe E, pour que de toute suite infinie de fonctions de F, on puisse extraire une suite convergeant en mesure sur toute partie bornée de E, il faut et il suffit que sur toute partie bornée de E les fonctions de E soient „également" presque bornées et „également" presque continues.

2⁰ La condition que E soit un ensemble linéaire n'est nullement essentielle; on peut au moins supposer que E appartienne à un espace à un nombre fini de dimensions.

Un probléme à résoudre. J'ai eu à faire allusion dans ce qui précède à la seconde partie d'un mémoire de Calcutta cité plus haut en note. La première partie de ce mémoire contenait certains résultats qui suggérent la question que nous allons poser et pourraient peut être en faciliter la solution:

Est-il possible de définir directement d'une façon simple le mode de convergence le plus général d'une suite de fonctions, qui, tout en impliquant la convergence ordinaire, soit susceplible, en outre, d'être defini par l'intermédiaire d'une definition de la „distance" ou au moins de „l'écart de deux fonctions"?[1]). On pourrait ne traiter le problème que pour des fonctions d'une nature déterminée (fonctions uniformément continues sur un intervalle fixe, par exemple).

16 février 1926.

[1]) Voir le mémoire cité pour la signification de ces termes.

Remarque sur la convergence en mesure

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

D'après M. Fréchet on dit que la suite de fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ converge vers $f(x)$ *en mesure* dans un intervalle I si, quel que soit le nombre $\varepsilon>0$, l'ensemble des points x de I, où $|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon$, peut être enfermé dans un ensemble E_n formé d'une suite finie ou non d'intervalles dont la longueur totale tend vers 0 quand n croit indéfiniment.[1])

On démontre sans peine que pour une suite de fonctions *mesurables* la convergence ordinaire entraîne la convergence en mesure (vers la même fonction limite). Or, ce n'est pas le cas pour une suite de fonctions quelconques d'une variable réelle: *une suite de fonctions non mesurables peut converger vers $f(x)$ au sens ordinaire, sans converger en mesure.*

En effet, il existe, comme on sait, dans l'intervalle (0, 1) une suite infinie d'ensembles $H_1, H_2, H_3, \ldots$, sans points communs deux à deux et dont chacun est de mesure extérieure 1, $m_e(H_n)=1$, pour $n=1, 2, 3, \ldots$.[2])

Désignons par $f_n(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $H_n+H_{n+1}+H_{n+2}+\ldots$: nous aurons évidemment

$$\lim_{n=\infty} f_n(x)=0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

[1]) M. Fréchet: *Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable*, Bulletin of the Calcutta Math. Soc. Vol. XI (1921), p. 197. Cf. aussi *Fund. Math.* t. IX, p. 26.

[2]) Voir p. e. ma note *Sur un ensemble non mesurable* dans Tôhoku Math. Journ. Vol. 12 (1917), p. 205.