Remarque sur la mesure linéaire des ensembles plans.

Par

S. Saks (Varsovie)

I.

§ 1. Le but de cette note est de donner la réponse affirmative à la question suivante posée par M. M. Bloch et Valiron: *existe-t-il des ensembles plans dont la mesure linéaire au sens de* M. Carathéodory[1]) *soit positive tandis que leurs projections sur chaque droite soient de mesure nulle?*

Je vais construire notamment, dans la deuxième partie de cette note, *un ensemble parfait,* contenu dans le domaine $1 < x^2 + y^2 < 2$, *dont la projection sur toute droite est de mesure nulle et qui admet des points communs avec toute demi-droite issue de l'origine* [2]).

Un tel ensemble est évidemment de longueur positive au sens de M. Carathéodory[3]).

Par une modification convenable du raisonnement on obtient un ensemble qui jouit des mêmes propriétés et dont la longueur est, de plus, infinie.

[1]) C. Caratheodory. *Über lineare Mass von Punktmengen.* Götting. Nachr. 1914 p. 404—426.

[2]) Le procédé dont je me sers pour cette construction est analogue à celui qui a été employé déjà dans la Note de M. Mazurkiewicz et de moi: *„Sur les projections d'un ensemble fermé".* (*Fund. Math.* t. VIII p. 109—113).

[3]) Car, pour qu'un ensemble soit de mesure linéaire de Carathéodory nulle, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il soit la somme d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles dont la somme des diamètres soit inférieure à ε.

§ 2. L'ensemble parfait dont les propriétés essentielles viennent d'être signalées met en évidence quelques relations entre la mesure linéaire de M. Carathéodory et celle de Gross[1]).

Notamment, pour qu'un ensemble soit de mesure linéaire nulle au sens de Gross, il faut et il suffit que sa projection sur chaque droite soit de mesure nulle.

Notre ensemble montre parsuite qu'il existe des ensembles plans et parfaits dont la mesure linéaire de Gross est nulle tandis que celle de Carathéodory est positive (et même infinie[2]).

Remarquons que c'est Gross encore qui avait construit déjà dans le Mémoire cité un ensemble parfait dont les deux mesures sont différentes[3]); mais dans son exemple ces mesures sont toutes les deux, positives et finies.

§ 3. Une autre différence qui paraît assez essentielle a lieu encore entre les notions de la mesure de M. Carathéodory et de celle de Gross.

Soit donnée une transformation univoque $\bar{p} = \varphi(p)$ d'un domaine plan D et supposons qu'il existe un nombre fini N tel que, pour tout couple de points diférents p, q du domaine D, on ait;

$$\frac{\rho(\bar{p}, \bar{q})}{\rho(p, q)} < N$$

($\bar{p}$, $\bar{q}$ désignant les transformés de p, q, et $\rho(p, q)$, $\rho(\bar{p}, \bar{q})$ les

[1]) W Gross. *Über das Flächenmass von Punktmengen.* Monatshefte f. Math. u. Phys. Bd. 29. 1918. p. 145—176. Cf. aussi: J. P. Schauder. *The theory of surface measure.* Fund. Math. t. VIII. p. 1—6.

Dans la note présente nous n'employons la notion de la mesure de Gross qu'au sens du Mémoire cité; dans un autre Mémoire Gross a donné une autre définition qui n'équivaut pas à celle dont nous nous occupons ici.

[2]) Cela prouve que les mesures linéaires de Carathéodory et de Gross sont d'ordres différents, plus précisément incomparables, au sens de M. Hausdorff. On dit notamment que deux mesures sont d'un même ordre lorsque, pour chaque ensemble mesurable, elles sont simultanément nulles, finies ou infinies. (Hausdorff. *Dimension und äusseress Mass. Math. Ann.* Bd. 77, p. 158).

[3]) Gross l. c. p. 163—173.

distances mutuelles des points compris dans les paranthèses).[1]).

Une telle transformation fait correspondre à toute ligne réctifiable une ligne réctifiable, le quotient de ses longueurs étant inférieur à N. Cette propriété reste valable pour la mesure de Carathéodory: on voit, en effet, qu'étant donné un ensemble F de longueur carathéodoryenne finie, le quotient de la longueur de son transformé et de celle de F ne dépasse pas N. En particulier, tout ensemble de longueur carathéodoryenne nulle est transformé en un ensemble de même longueur.

Cela est en défaut lorsque, au lieu de la mesure linéaire de Carathéodory, on considère celle de Gross: on le verra immédiatement sur l'exemple suivant d'un ensemble parfait qui sera transformé par une homographie.

Considérons notamment le sous-ensemble E de l'ensemble du § 1, contenu dans la partie $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ du plan. E est de mesure linéaire nulle au sens de Gross (§ 2). Soit $\mathfrak{h}$ une homographie rejetant à l'infini la droite $x+y=0$. Le domaine $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ contenant E est transformé par $\mathfrak{h}$ en un domaine également borné. D'autre part, le faisceau de droites $my=nx$ $(mn \geqslant 0)$ est transformé en un faisceau de droites parallèles remplissant une bande comprise entre deux parallèles. Or, chacune des droites $my=nx$ rencontrant l'ensemble E, chacune de leurs transformées contient des points de $\mathfrak{h}(E)$, et $\mathfrak{h}(E)$ est, parsuite, de longueur grossienne positive.

Observons que, en tenant compte de la remarque du § 1, on peut même construire un ensemble de longueur grossienne nulle qui, par une homographie convenable est transformé en un ensemble de longueur infinie.

II.

§ 4. Pour construire maintenant l'ensemble annoncé dans les §§ précédents, je vais considérer certains systèmes de trapèzes contenus dans le domaine $1 < x^2+y^2 < 2$ et que j'appellerai, pour simplifier le langage, les trapèzes réguliers. J'entendrai par là chaque trapèze situé dans le domaine envisagé et tel que ses côtés se trouvent sur les demi-droites issues de l'origine.

J'appellerai aire régulière E toute somme d'un nombre fini de trapèzes réguliers et tels que chaque demi-droite issue de l'origine en traverse l'un au plus; (elle peut d'ailleurs toucher à deux trapèzes).

Je dirai que deux aires régulières sont équivalentes si toute demi-droite issue de l'origine et admettant des points communs avec l'une des aires envisagées, les admet aussi avec l'autre.

§ 5. Je commencerai par énoncer deux lemmes d'un caractère géométrique et élémentaire, et dont la démonstration qui ne présente pas d'aucunes difficultés, peut être omise:

Lemme 1. *Etant données un trapèze régulier s et une droite θ passant par l'origine et sans points communs avec s, on peut toujours subdiviser s en un nombre fini de trapèzes réguliers tels qu'en chacun d'eux existe un segment parallel à θ et dont les extrémités soient intérieures aux côtés opposés du trapèze.*

Toute aire régulière étant, par définition, somme d'un nombre fini de trapèzes réguliers, on conclut aussitôt du lemme 1 le suivant

Lemme 2. *Etant donnés un nombre $\varepsilon > 0$, une aire régulière S et une droite θ passant par l'origine et sans points communs avec S, il existe toujours une aire régulière $\bar{S}$ telle que:*

1⁰ $S \supset \bar{S}$;

2⁰ *$\bar{S}$ équivaut à S;*

3⁰ *$\bar{S}$ est une somme d'un nombre fini de trapèzes dont les bases sont parallèles à θ et dont la somme des côtés est inférieure à ε*

[1]) On voit que cette condition est remplie, en particulier, pour toute transformation determinée par deux fonctions $\bar{x} \equiv f(x, y)$, $\bar{y} \equiv \varphi(x, y)$, admettant toutes les dérivées partielles du premier ordre bornées uniformément dans le domaine D.

§ 6. Le lemme 2 permet d'établir maintenant, pour toute droite θ passant par l'origine et tout nombre naturel $n \geqslant 2$, une opération $\Phi_{\theta,n}$ qui fera correspondre à toute aire régulière une autre aire y contenue.

Dans ce but, désignons par $\overline{\theta}$ la droite passant par l'origine et perpendiculaire à θ, et par t_1, t_2 les droites passant aussi par l'origine et faisant avec $\overline{\theta}$ les angles aigus $\pm \frac{1}{n}$

Je désignerai maintenant par Σ_1 la partie du plan contenue dans deux angles obtus et opposés entre t_1 et t_2; pareillement, j'appellerai Σ_2 la partie du plan contenue dans les angles *aigus* entre ces mêmes droites.

S est alors ausi partagée en deux aires régulières: l'une contenue dans Σ_1 et l'autre dans Σ_2; on les désignera par S_1 et S_2 respectivement.

$\overline{\theta}$ étant contenu dans Σ_2 et n'admettant pas parsuite des points communs avec S_1, on peut d'après le lemme précédent construire à l'intérieur de S_1 une aire régulière $\overline{S}_1$ satisfaisant par rapport à $\varepsilon = \frac{1}{n}$, S_1 et $\overline{\theta}$ aux conditions (1^0, 2^0, 3^0) dudit lemme. D'une manière analogue, on construit dans S_2 une aire régulière $\overline{S}_2$ satisfaisant aux mêmes conditions relativement à $\varepsilon = \frac{1}{n}$, S_2 et à θ. On posera par définition:

$$\overline{S} = \Phi_{\theta,n}(S) = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 \quad ^{1})$$

§ 7. En conservant les notations du § précédent désignons encore par Δ_i, δ_i $(i = 1,2)$ la somme des longueurs de toutes les bases, respectivement de tous les côtés des trapèzes dont l'aire régulière $\overline{S}_i$ $(i = 1,2)$ vient d'être formée.

Nous allons évaluer ces quatre nombres.

[1]) La manière de construire $\overline{S}$ n'est pas évidemment unique. Mais on voit facilement qu'étant donné θ et n en peut toujours, si l'on veut, définir d'une façon *univoque* tous les procédés qui sont nécessaires pour déterminer *effectivement* l'opération $\Phi_{\theta,n}$.

D'abord, d'après la définition même, on a:

$$(1) \quad \delta_1 < \frac{1}{n}, \qquad (2) \quad \delta_2 < \frac{1}{n}.$$

Pour évaluer Δ_i, on procédera comme il suit: soient d_i $(i = 1,2)$ plus grandes de deux bases des trapèzes dont $\overline{S}_1$ vient d'être formée. On a:

$$(2) \qquad \Delta_1 \leqslant 2 \sum_i d_i.$$

Soit, d'autre part, b_i la distance de d_i de l'origine. Toute d_i peut être régardée comme la base d'un triangle au sommet à l'origine; ces triangles étant contenus dans le cercle $x^2 + y^2 = 2$ et n'empiétant pas, la somme de leurs aires est moindre que 4π donc:

$$(3) \qquad \frac{1}{2} \sum_i b_i d_i \leqslant 4\pi < 16;$$

d'autre part, les segments d_i étant parallels à $\overline{\theta}$, et situés dans Σ_1 et en dehors du cercle $x^2 + y^2 = 1$, on a, pour tout i:

$$b_i \geqslant \sin \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Donc, d'aprés (3) et (2):

$$(4) \qquad \Delta_1 \leqslant 64\, n$$

On procède tout pareillement pour obtenir l'évaluation de Δ_2. On désigne par e_i plus grandes de deux bases des trapèzes dont $\overline{S}_2$ est formée, et par p_i la distance de e_i de l'origine. On peut aussi regarder e_i comme les bases des triangles aux sommets à l'origine; ces triangles étant contenus dans le cercle $x^2 + y^2 = 2$ et dans Σ_2, on a:

$$(5) \qquad \frac{1}{2} \sum_i p_i e_i < \frac{8}{n}.$$

Or, on voit facilement que pour tout i:

$$p_i \geqslant \cos \frac{1}{n} > \frac{1}{2},$$

donc, d'après (5):

$$(6) \qquad \Delta_2 < \frac{64}{n}.$$

§ 8. **Lemme 3.** *Etant donnés un nombre $n \geqslant 2$ et une droite θ, on a pour toute aire régulière S et toute droite θ', telle que*

$$(7) \qquad \text{angle } (\theta', \theta) \leqslant \frac{\pi}{n^2}:$$

$$\text{mes } \left(\overline{S}_{\theta'}\right) < \frac{10^8}{n},$$

où: $\overline{S} = \Phi_{\theta, n}(S)$ et $\overline{S}_{\theta'}$ désigne la projection de $\overline{S}$ sur la droite θ'.

Démonstration: en effet, en conservant les notations des §§ précédents, on voit d'abord qu'en vertu de (1) et de (6) la projection de $\overline{S}_2$ sur aucune droite ne dépasse $\frac{65}{n}$.

De même, en vertu de (1), la projection des côtés des trapèzes dont on a formé $\overline{S}_1$, ne dépasse pas $\frac{1}{n}$.

Il reste donc à évaluer la mesure de la projection sur θ' des bases de ces trapèzes.

Or, ces bases étant perpendiculaires à θ, elles font, en vertu de (7), avec la droite θ' les angles aigus $\geqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n^2}$. Donc, la mesure de la somme de leurs projections sur θ' est au plus égale à $\Delta_1 \cdot \sin \frac{\pi}{n^2} < 64n \cdot \frac{\pi}{n^2} < \frac{64 \cdot 4}{n}$.

Par suite:

$$\text{mes } \left(\overline{S}_{\theta'}\right) < \frac{65}{n} + \frac{1}{n} + \frac{64 \cdot 4}{n} < \frac{10^8}{n},$$

ce qui justifie notre lemme.

§ 9. Le lemme précédent prouvé, on peut définir l'ensemble annoncé au debut de cette Note comme le produit d'une suite d'aires régulières.

Appelons d'abord, pour tout couple de nombres naturels (n, m), par $\theta_{n,m}$ la droite dont l'équation est: $y = x \operatorname{tg} \frac{m}{n^2}\pi$.

Cela posé, désignons par $S^{(o)}$ une aire régulière telle que toute demi-droite issue de l'origine contienne des points de $S^{(o)}$; de telles aires régulières évidemment existent.

Soit encore

$$S^{(1)} = \Phi_{\theta_{2,0}, 2}\left(S^{(0)}\right),$$

et, en général, soit pour $p \geqslant 2$:

$$S^{(p+1)} = \Phi_{\theta_{n+1,0}, n+1}\left(S^{(p)}\right), \text{ lorsque:}$$

$$S^{(p)} = \Phi_{\theta_{n, n^2-1}, n}\left(S^{(p-1)}\right).$$

et:

$$S^{(p+1)} = \Phi_{\theta_{n,m+1}, n}\left(S^{(p)}\right), \text{ lorsque: } S^{(p)} = \Phi_{\theta_{n,m}, n}\left(S^{(p-1)}\right),$$

$$\text{où: } m < n^2 - 1.$$

On obtient ainsi, par l'induction, une suite d'aires régulières $\{S^{(p)}\}$ équivalentes à $S^{(o)}$, donc admettant des points communs avec toute demi-droite issue de l'origine.

En posant donc:

$$S = \prod_{p=1} S^{(p)},$$

on obtient un ensemble parfait et borné S contenant en vertu du théorème bien connu de M. Cantor des points communs avec toute demi-droite issue de l'origine.

Il reste à prouver que la projection de S sur toute droite θ est de mesure nulle.

Soit, en effet, n un nombre naturel quelconque, assez élévé pour qu'on puisse désigner un nombre m tel que $m < n^2 - 1$ et que la droite θ soit contenue dans les angles aigus entre les droites $\theta_{n,m}$ et $\theta_{n,m+1}$.

Il existe alors dans la suite $\{S^{(p)}\}$ une aire régulière $S^{(p+1)}$

telle que

$$(8) \quad S^{(p+1)} = \Phi_{\Theta_{n,m+1'}n}(S^{(p)}).$$

Or, on a:

$$\text{angle}\,(\Theta_{n,m+1'}\,\Theta) < \frac{\pi}{n^2}, \text{ donc en vertu}$$

de (8) et du lemme du § précédent:

$$\text{mes}\,(S_\Theta{}^{(p+1)}) < \frac{10^3}{n}.$$

Par conséquent, S étant contenu dans $S_\Theta{}^{(p+1)}$:

$$\text{mes}\,(S_\Theta) < \frac{10^3}{n}, \text{ d'où:}$$

$$\text{mes}\,(S_\Theta) = 0.$$

L'ensemble S jouit donc de toutes les propriétés demandées.

Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables.

Par

Maurice Fréchet (Université de Strasbourg).

Sens du mot compact. Dans une note récente [1]), M. P. Veress a étudié les ensembles compacts de fonctions mesurables au sens de M. Lebesgue.

Toutefois, il a attaché au sens du mot compact une signification qui n'est pas la seule qu'on pourrait lui donner. Il est bien vrai que la définition générale des ensembles compacts donnée dans ma Thèse (p. 6, § 9) m'a conduit à traduire cette définition dans le cas où leurs éléments sont des fonctions continues sur un intervalle borné fixe sous la forme employée par M. Veress dans un cas plus général. A savoir: un ensemble de fonctions serait compact lorsque de toute suite infinie de ces fonctions, on peut extraire une suite qui converge *uniformément*.

Mais la notion d'ensemble compact tire tout son intérêt du fait qu'elle caractérise une propriété de l'ensemble *quand on tient compte de la façon dont sont définies dans cet ensemble les suites convergentes d'éléments.* C'est dire que la définition d'un ensemble compact de fonctions ne peut être précisée que si l'on a précisé auparavant quelle est la définition adoptée pour la convergence d'une suite d'éléments de l'ensemble.

La définition de l'ensemble compact de fonctions *continues* que j'avais adoptée comme conséquence de ma définition générale était basée sur le choix préalablement fait de la convergence dans le champ des fonctions continues. Il m'avait paru que dans ce champ, il convient, en vue des applications, de ne considérer

[1]) Ueber kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen, *Fund. Math.*, t. VII, 1925, p. 244.