une suite infinie croissante d'indices n_k $(k = 1, 2, 3, \cdots)$, telle que les suites x_{n_k} et x'_{n_k} convergent pour $k \to \infty$, et, d'après (2), on a

$$\lim_{k=\infty} x_{n_k} = \lim_{k=\infty} x'_{n_k} = x_0, \tag{4}$$

où x_0 est un nombre de (a, b).

Or, soit ε un nombre positif donné quelconque. La fonction $\varphi(x)$ étant semi-continue supérieurement au point x_0 et la fonction $\psi(x)$ — inférieurement, il résulte de (4) que

$$\varphi(x_0) + \varepsilon > \varphi(x_{n_k}) \text{ et } \psi(x'_{n_k}) > \psi(x_0) - \varepsilon, \text{ pour } k > \mu,$$

ce qui donne, d'après (3):

$$\varphi(x_0) + \varepsilon > \psi(x_0) - \varepsilon - \frac{1}{n_k}, \text{ pour } k > \mu,$$

donc, en limite pour $k \to \infty$:

$$\varphi(x_0) + \varepsilon \geqslant \psi(x_0) - \varepsilon \tag{5}$$

Le nombre positif ε étant arbitraire, l'inégalité (5) prouve que $\varphi(x_0) \geqslant \psi(x_0)$, contrairement à (1). Notre théorème est ainsi démontré.

Corollaire: *$f(x)$ étant une fonction semi-continue supérieurement dans l'intervalle fini (a, b) et $g(x)$ étant une fonction semi-continue inférieurement dans (a, b), telles que*

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \text{pour} \quad a \leqslant x \leqslant b, \text{ [1]}$$

il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$, tel que pour tous les nombres x et x' de (a, b) l'inégalité

$$|x - x'| \leqslant \delta$$

entraîne l'inégalité

$$f(x) < g(x') + \varepsilon$$

Pour déduire ce corollaire, il suffit, ε étant donné, de poser dans notre théorème $\varphi(x) = f(x)$ et $\psi(x) = g(x) + \varepsilon$

Pour obtenir le théorème sur la continuité uniforme d'une fonction continue dans un intervalle fini, il suffit de prendre dans notre corollaire pour $f(x)$ une fonction continue et de poser $g(x) = f(x)$.

[1] Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfaisant aux conditions énoncées étaient étudiées par H. Hahn (V. p. e. *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 164) et F. Hausdorff (*Math. Zeitschr.* Bd. 5, 1919, p. 295).

Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique.

Par

Miron Zarycki (Léopol — Lwów).

La première partie de la Thèse de M. Kuratowski[1]) est consacrée à l'analyse de la notion de la *fermeture* d'un ensemble. La fermeture de A est la somme de A et de l'ensemble des points limites de A; je la désigne par A^r.

Voilà les axiomes qui forment la base de tous les raisonnements de M. Kuratowski:

$$I_r:\ (A+B)^r = A^r + B^r \qquad III_r:\ 0^r = 0$$

$$II_r:\ A \subset A^r \qquad IV_r:\ A^{rr} = A^r.$$

Dans la Note présente j'envisage des systèmes analogues d'axiomes pour quelques autres notions fondamentales de l'Analysis Situs, à savoir pour les notions de *l'extérieur*, de *l'intérieur*, de la *frontière* et du *bord*. Je démontre l'équivalence de ces systèmes à celui de M. Kuratowski et j'en déduis quelques théorèmes concernants les propriétés fondamentales des notions mentionnées.

Je tiens à remèrcier ici M. Kuratowski pour ses précieux conseils concernants la rédaction définitive de cet article.

§ 1. Les systèmes d'axiomes.

1 Je désigne l'espace par le symbole C et le complémentaire d'un ensemble A par A^c. Je suppose données quatre

[1]) Sur l'opération $\overline{A}$ de l'Analysis Situs, Fund. Math. III. p. 182—199.

fonctions: A^e (extérieur), A^i (intérieur), A^f (frontière) et A^b (bord), univoques et telles que, pour tout ensemble A contenu dans C, A^e, A^i, A^f et A^b y sont contenus également et que chacune de ces fonctions remplit un certain système d'axiomes.

Voilà ces systèmes (je les désigne respectivement par S_e S_i, S_f, S_b, le symbole S_r désignant le système I_r — IV_r):

$$
\begin{array}{llll}
I_e\colon & (A+B)^e = A^e B^e & I_i\colon & (AB)^i = A^i B^i \\
II_e\colon & A^e \subset A^c & II_i\colon & A^i \subset A \\
III_e\colon & 0^e = C & III_i\colon & C^i = C \\
IV_e\colon & A^{ece} = A^e & IV_i\colon & A^{ii} = A^i
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
I_f\colon & AB(AB)^f = AB(A^f + B^f) & I_b\colon & (AB)^b = AB^b + BA^b \\
II_f\colon & A^f = A^{cf} & II_b\colon & C^b = 0 \\
III_f\colon & 0^f = 0 & III_b\colon & A^{cbcb} \subset A. \\
IV_f\colon & A^{ff} \subset A^f & &
\end{array}
$$

2. Posons: $A^e = A^{rc}$, $A^i = A^{crc}$, $A^f = A^r A^{cr}$, $A^b = AA^{cr}$. On en déduit sans peine les formules suivantes qui définissent chacune des 5 fonctions considerées dans chacun de nos 5 systèmes:

$$A^r = A^{ec} = A^{cic} = A + A^f = A + A^{cb}$$
$$A^e = A^{rc} = A^{ci} = A^c A^{fc} = A^c A^{cbc}$$
$$A^i = A^{crc} = A^{ce} = A A^{fc} = A A^{bc}$$
$$A^f = A^r A^{cr} = A^{ec} A^{cec} = A^{ic} A^{cic} = A^b + A^{cb}$$
$$A^b = A A^{cr} = A A^{cec} = A A^{ic} = A A^f$$

3. Pour établir l'équivalence des systèmes S_r, S_e, S_i, S_f et S_b on prouve que 1⁰: S_r entraîne S_e, 2⁰: S_e entraîne S_i, 3⁰: S_i entraîne S_f, 4⁰: S_f entraîne S_b et 5⁰: S_b entraîne S_r. Dans ce but on tiendra compte des formules: $A^e = A^{rc}$, $A^i = A^{ce}$, $A^f = A^{ic} A^{cic}$, $A^b = A A^f$ et $A^r = A + A^{cb}$.

J'omets les démonstrations qui ne présentent pas de difficulté; je me borne à citer les démonstrations suivantes qui ne sont peut-être pas immédiates:

1⁰. *S_i entraîne I_f.*

Démonstration: Nous avons: $M^{ci} \subset M^c$ (II_i), d'où: $M \subset M^{cic}$ (α).

On obtient ensuite:

$$(AB)^{ic} = A^{ic} + B^{ic} \ (I_i), \text{ et:}$$
$$AB\,(AB)^{ic} = AB\,A^{ic} + AB\,B^{ic}.$$

En tenant compte de la formule (α) on peut écrire la dernière relation de la manière suivante:

$$AB\,(AB)^{cic}(AB)^{ic} = AB\,A^{cic}A^{ic} + AB\,B^{cic}B^{ic}$$
$$\text{or: } AB\,(AB)^f = AB\,(A^f + B^f), \ c.\ q.\ f.\ d.$$

2⁰. *S_i entraîne IV_f.*

Démonstration: Nous avons:

$(MN)^i = M^i N^i$ (I_i). Posons: $M = A^i$ et $N = A^i + B^i$.

On obtient alors:

$$A^{ii} = A^{ii}\,(A^i + B^i)^i, \text{ or: } A^{ii} = A^i \subset (A^i + B^i)^i.$$

On obtient pareillement:

$$B^i \subset (A^i + B^i)^i, \text{ donc: } A^i + B^i \subset (A^i + B^i)^i.$$

Mais, d'autre part, on obtient: $(A^i + B^i)^i \subset A^i + B^i$ (II_i), or: $(A^i + B^i)^i = A^i + B^i$. En tenant compte de cette formule:

$$A^{ff} = (A^{ic}\ A^{cic})^{ic}\,(A^{ic}\ A^{cic})^{cic} \subset (A^{ic}\ A^{cic})^{cic} = (A^i + A^{ci})^{ic} =$$
$$= (A^i + A^{ci})^c = A^{ic}\ A^{cic} = A^f, \ c.\ q.\ f.\ d.$$

3⁰. *S_f entraîne I_b.*

Démonstration:

$$(AB)^b = AB\ (AB)^f = AB\ (A^f + B^f) = ABB^f + BAA^f = AB^b + BA^b.$$

4⁰ *S_f entraîne III_b.*

Démonstration:

Nous avons: $M^c N^c (M^c N^c)^f = M^c N^c (M^f + N^f)$, (I_f), (II_f).

or: $M + N + (M^c N^c)^{fc} = M + N + M^{fc} N^{fc}$.

En multipliant par $M^c N^c$, on obtient:

$$M^c N^c (M^c N^c)^{fc} =$$

$= M^c N^c\ M^{fc} N^{fc}$, or: $M + N + (M + N)^f = M + N + M^f + N^f$. On en déduit sans peine que la relation: $M \subset N$ entraîne: $M^f \subset N + N^f$.

Posons maintenant: $M = A^c A^f$ et: $N = A^f$. Il en résulte alors:

$(A^c A^f)^f \subset A^f + A^{ff} = A^f$, d'où: $(A^c A^f)^f A^{fc} = O$.

On obtient, en tenant compte de la dernière relation:

$$A^{cbcb} = (A^c A^{cf})^c (A^c A^{cf})^{cf} = (A + A^{fc})(A^c A^f)^f =$$

$$= A(A^c A^f)^f + A^{fc}(A^c A^f)^f = A(A^c A^f)^f \subset A, \qquad c.\ q.\ f.\ d.$$

5⁰. S_b *entraîne* I_r.

D é m o n s t r a t i o n: Nous avons:

$A + A^c B^{cb} = A + A B^{cb} + A^c B^{cb} = A + B^{cb}$ et pareillement: $B + B^c A^{cb} = B + A^{cb}$

En s'appuyant sur les deux dernières formules on obtient:

$$(A+B)^r = A + B + (A+B)^{cb} = A + B + (A^c B^c)^b =$$

$$= A + B + A^c B^{cb} + B^c A^{cb} = A + A^{cb} + B + B^{cb} = A^r + B^r \qquad c.\ q.\ f.\ d.$$

6⁰. S_b *entraîne* IV_r

D é m o n s t r a t i o n: En s'appuyant sur (I_b) et (III_b) on obtient:

$$A^{rr} = A + A^{cb} + (A + A^{cb})^{cb} = A + A^{cb} + (A^c A^{cbc})^b =$$

$$= A + A^{cb} + A^c A^{cbcb} + A^{cb} A^{cbc} = A + A^{cb} = A^r, \qquad c.\ q.\ f.\ d.$$

§ 2. Propriétés fondamentales des ensembles A^e, A^i, A^f, et A^b.

1. *Th.*[1] 1_e: $(A + B)^e \subset A^e + B^e \subset (A B)^e$

„ 2_e: $A^e - B^e \subset (A - B)^e$

„ 3_e: $A^{ec} B^{ce} \subset (A B)^{ec}$

„ 4_e: $A^{ce} \subset A^{ec}$

„ 5_e: $A^{eeee} = A^{ee}$

Th. 1_i: $(A B)^i \subset A^i + B^i \subset (A + B)^i$

„ 2_i: $A^{ic} B^{ci} \subset (A + B)^{ic}$

„ 3_i: $A^{ci} \subset A^{ic}$

„ 4_i: $(A - B)^i \subset A^i - B^i$

„ 5_i: $A^{icicici} = A^{ici}$

[1]) J'omets les formules qui se déduisent d'un quelconque de nos théorèmes par des transformations simples de l'algèbre de la logique. Ainsi, par exemple, si $A \subset B$, on a: $A + B = B$ et $AB = A$, donc il résulte du th. 1_e que: $B^e \subset A^e$. Il résulte de la même manière du th. 1_i que la relation $A \subset B$ implique $A^i \subset B^i$.

Th. 1_f: $(A B)^f \subset (A + B)^f + (A + B)(A^f + B^f) = A^f + B^f$

„ 2_f: $A^{fff} = A^{ff}$

Th. 1_b: $A \subset B$ implique $A B^b \subset A^b$

„ 2_b: $A^{cbcb} \subset A^b \subset A \subset A^{cbc} \subset A^{bcbc}$

„ 3_b: $A^{bb} = A^b$

„ 4_b: $(A + B)^b \subset A^b + B^b$

„ 5_b: $A^b B^b \subset (A B)^b \subset A^b + B^b$

2. D é m o n s t r a t i o n du th. 1_e: α) La relation $M \subset N$ implique $N^e \subset M^e$, or $(A + B)^e \subset A^e$ et $(A + B)^e \subset B^e$, donc: $(A + B)^e \subset A^e + B^e$. β) On obtient de la même manière: $A^e \subset (A B)^e$ et $B^e \subset (A B)^e$, donc: $A^e + B^e \subset (A B)^e$.

D é m o n s t r a t o n du th. 2_e: Nous avons: $A^e \subset (A B^c)^e$ (*th.* 1_e) et a fortiori: $A^e B^{ec} \subset (A B^c)^e$, c. q. f. d.

D é m o n s t r a t i o n du th. 3_e: Nous avons la relation évidente: $A \subset A B + B^c$, or: $(A B + B^c)^e \subset A^e$ et $(A B)^e B^{ce} \subset A^e$ (ax. I_e), donc: $A^{ec} \subset (A B)^{ec} + B^{cec}$ En multipliant par B^{ce} on en obtient: $A^{ec} B^{ce} \subset (A B)^{ec} B^{ce} \subset (A B)^{ec}$

D é m o s t r a t i o n du th. 4_e: Il résulte de l'axiome II_e la formule: $C^e = O$.

Nous avons maintenant: $A^e = C A^e = C^{ec} A^{cce} \subset (C A^c)^{ec} = A^{cec}$, d'où: $A^{ce} \subset A^{ec}$.

D é m o n s t r a t i o n du th. 5_e: Nous avons: $A^{ee} \subset A^{ec}$ (ax II_e), d'où: $A^{ece} \subset A^{eee}$ et: $A^{eeee} \subset A^{ecee} = A^{ee}$ (ax IV_e).

Nous avons d'autre part: $A^{eee} \subset A^{eec}$ (ax II_e), donc: $A^{ee} = A^{eece} \subset A^{eeee}$ (ax IV_e).

Les rélations: $A^{eeee} \subset A^{ee}$ et $A^{ee} \subset A^{eeee}$ donnent le th. 5_e.

Remarque. Le théorème 5_e ne peut être remplacé ni par la formule $A = A^{ee}$ ni par la formule $A^e = A^{eee}$. La condition $A = A^{ee}$ (ou bien $A = A^{cici}$) définit, en effet, les domaines ouverts *réguliers* et la condition $A^e = A^{eee}$ (ou biens $A^{ci} = A^{cicici}$) caractérise les ensembles, dont la fermeture est un ensemble fermé régulier:[1]).

[1]) L'ensemble A est dit (selon M. K u r a t o w s k i) un domaine ouvert *régulier*, lorsqu'il est identique à l'intérieur de sa fermeture; l'ensemble A est dit un ensemble fermé régulier, lorsqu'il est identique à la fermeture de son intérieur.

3. Démonstration du th. 1_i: On déduit ce théorème des formules évidentes: $AB \subset A$, $AB \subset B$, $A \subset A+B$, $B \subset A+B$ et du théorème: $M \subset N$ implique $M^i \subset N^i$.

Démonstration du th. 2_i: Nous avons la relation évidente $(A+B)B^c \subset A$. On en obtient: $\{(A+B)B^c\}^i \subset A^i$, et $(A+B)^i B^{ci} \subset A^i$ (ax. I_i), or: $A^{ic} \subset (A+B)^{ic} + B^{cic}$. En multipliant par B^{ci} on a:

$$A^{ic} B^{ci} \subset B^{ei} (A+B)^{ic} \subset (A+B)^{ic}.$$

Démonstration du th. 3_i: On déduit de l'axiome II_i la formule: $0^i = 0$. Il s'en suit: $A^{ci} = 0^{ic} A^{ci} \subset A^{ic}$ (th. 2_i),

Démonstration du th. 4_i: Nous avons: $A^i B^{ci} \subset A^i B^{ic}$ (th. 3_i). Mais: $A^i B^{ci} = (AB^c)^i$ (ax. I_i), donc: $(AB^c)^i \subset A^i B^{ic}$ c. q. f. d.

Démonstration du th. 5_i: Nous avons: $A^{ici} \subset A^{ic}$ (ax. II_i), d'où: $A^i \subset A^{icic}$, or: $A^i \subset A^{icici}$ (ax. IV_i) $A^{icicic} \subset A^{ic}$. donc: $A^{icicici} \subset A^{ici}$. Nous avons d'autre part: $A^{icici} \subset A^{icic}$ (ax. II_i), or: $A^{ici} \subset A^{icicic}$, donc: $A^{ici} \subset A^{icicici}$ (ax. IV_i). Les deux relations obtenues donnent le th. 5_i.

4. Démonstration du th. 1_f: Nous avons: $(A^c B^c)(A^c B^c)^f = A^c B^c (A^f + B^f)$, (ax. I_f, II_f). On en obtient d'après la formule de Morgan: $A + B + (A+B)^{fc} = A + B + A^{fc} B^{fc}$. En multipliant par $A^c B^c$ on en déduit: $A^c B^c (A+B)^{fc} = A^c B^c A^{fc} B^{fc}$, d'où:

$$(\alpha) \qquad A + B + (A+B)^f = A + B + A^f + B^f$$

Envisageons maintenant l'identité suivante:

$$(A+B)^f = \{A + B + (A+B)^f\} \{A^c B^c + (A+B)^f\}.$$

On en obtient d'après la formule (α):

$$(A+B)^f = \{A + B + A^f + B^f\} \{A^c B^c + (A+B)^f\}.$$

En ajoutant $(A+B)(A^f+B^f)$ on en tire:

$$(A+B)^f + (A+B)(A^f+B^f) = (A^f+B^f)\{A+B+A^cB^c + (A+B)^f\} + (A+B)(A+B)^f = A^f + B^f + (A+B)(A+B)^f \quad \beta).$$

Mais on démontre à l'aide de l'axiome I_f que la relation $M \subset N$ implique: $MN^f \subset M^f$. Il en résulte les formules:

$A(A+B)^f \subset A^f$ et $B(A+B)^f \subset B^f$. En tenant compte de ces formules on obtient de la formule β) la seconde relation du th. 1_f.

Une conséquence immédiate de cette identité est l'inclusion: $(A+B)^f \subset A^f + B^f$, qui fut établie par Janiszewski[1]). Lorsqu'on y pose A^c et B^c au lieu de A et B, on obtient à l'aide de l'axiome II_f la première relation du th. I_f.

Remarque. La formule analogue: $(A+B)^{ff} \subset A^{ff} + B^{ff}$ ne subsiste pas. En effet, soient: R_1 l'ensemble de nombre rationnels: $1 < x < 2$, R_2 l'ensemble de nombres rationnels $2 < x < 3$, I l'ensemble de nombres irrationnels: $1 < x < 2$ Posons: $A = I + R_2$ et $B = R_1 + R_2$. En définissant A^f comme dans la théorie des ensembles de points (dans l'espace linéaire) on reconnait sans peine que: $(A+B)^{ff} = (1, 2, 3)$ et $A^{ff} + B^{ff} = (1, 3)$.

Démonstration du th. 2_f: En substituant A^{ff} et A^f à A et B dans l'axiome I_f, on obtient: $A^{ff} A^f (A^{ff} A^f)^f = A^{ff} A^f (A^{fff} + A^{ff})$. Or, nous avons: $A^{ff} \subset A^f$ et $A^{fff} \subset A^{ff}$ (ax. IV_f), donc: $A^{fff} = A^{ff}$.

Remarque. Chacune des relations: $A = A^f$ et $A = A^{ff}$ implique la formule: $A = A^f = A^{ff}$.

La formule $A = A^f$ (ainsi que $A = A^{ff}$) est une condition suffisante et nécessaire pour que l'ensemble A soit un ensemble frontière et fermé[2]).

Quant à relation $A^f = A^{ff}$ je démontre le théorème suivant:

Th. 3_f. La condition nécessaire et suffisante pour que $A^f = A^{ff}$ est que le bord de A soit non-dense[3]).

[1]) **Sur les coupures du plan,** Prace matematyczno-fizyczne, T. XXVI, 1915, p. 20.

[2]) L'ensemble A est fermé lorsque $A^f \subset A$; A est un ensemble frontière lorsque $A \subset A^f$.

[3]) L'ensemble A est dit non-dense lorsque l'intérieur de sa fermeture est vide.

On peut exprimer cette condition par la formule $A^{ee} = 0$, ou bien par la formule équivalente: $(A + A^f)^f = A + A^f$.

On démontre sans peine qu'un ensemble frontière et fermé est toujours non-dense.

Démonstration du th. 3_f:

I. Supposons d'abord $A^{ff} = A^f$. L'ensemble A^f est toujours fermé (car $A^{ff} \subset A^f$). Mais par l'hypothèse A^f est aussi un ensemble frontière (car $A^f \subset A^{ff}$), or il est non-dense. Nous avons donc $A^{fee} = O$. Mais: $A^b \subset A^f$, d'où $A^{fe} \subset A^{be}$ et $A^{bee} \subset A^{fee} = O$, or A^b est aussi non-dense.

II. Supposons maintenant $A^{bee} = O$.

α) Nous avons: $A^{bi} = (A A^{ic})^i = A^i A^{ici} = O$. Mais on vérifie sans peine que la formule $M^i = O$ est équivalente à la formule: $M \subset M^f$, or $A^b \subset A^{bf}$. Mais nous avons par l'hypothèse: $(A^b + A^{bf})^f = A^b + A^{bf}$, donc: $A^{bff} = A^{bf}$. Il s'en suit que A^{bf} est non-dense.

β) Nous avons: $A^{icici} A^{ici} \subset A^{icic} A^{ici} = O$. On obtient à présent:

$$A^{ffi} = A^{ifcic} A^{ific} = A^{ifcic} (A^{icic} A^{ic})^{ic} = A^{ifcic} (A^{icici} A^{ici})^c = A^{ifcic}$$

Mais: $M \subset M^{cic}$, or: $A^{if} \subset A^{iff}$, donc: $A^{iff} = A^{if}$. L'ensemble A^{if} est donc non-dense (pour tout A).

γ) A^{bf} et A^{if} étant non-denses, leur somme l'est également.[1]) Mais: $A^{bf} + A^{if} = A^f$. En effet, nous avons:

$$A^{bf} = (A A^f)^f \subset A^f + A^{ff} = A^f,\ A^{if} = (A A^{fc})^f \subset A^f + A^{ff} = A^f;$$

or: $A^{bf} + A^{if} \subset A^f$.

Nous avons d'autre part: $A^f = (A^i + A^b)^f \subset A^{if} + A^{bf}$, donc: $A^{if} + A^{bf} = A^f$. Il en résulte, que A^f est non-dense et on obtient: $(A^f + A^{ff})^f = A^f + A^{ff}$, d'où: $A^{ff} = A^f$, c. q. f. d.

5. Démonstration du th. 1_b: Lorsque $A \subset B$, on obtient de l'axiome I_b: $A^b = A B^b + B A^b$, donc: $A B^b \subset A^b$.

Démonstration du th. 2_b:

α) La relation $A^b \subset A$ résulte de l'axiome I_b lorsqu'on y pose $B = A$.

β) Nous avons à présent: $A^{cb} \subset A^c$, d'où: $A \subset A^{cbc}$.

γ) L'inclusion $A \subset A^{cbc}$ donne d'après le th. 1_b: $A A^{cbcb} \subset A^b$, or d'après l'axiome III_b: $A^{cbcb} \subset A^b$.

[1]) On trouve dans la Note citée de M. Kuratowski la démonstration du théorème, que la somme de deux ensembles non-denses est non-dense.

δ) Nous avons $A^{cbcb} \subset A^b$. En y posant A^c au lieu de A on obient: $A^{bcb} \subset A^{cb}$, donc: $A^{cbc} \subset A^{bcbc}$.

Ainsi toutes les inclusions renfermées dans le th. 2_b sont démontrées.

Démonstration du th. 3_b: Nous avons $A^b \subset A$, d'où: $A^b \subset A^{bb}$ (th. 1b). Mais $A^{bb} \subset A^b$ (th. 2b), donc $A^{bb} = A^b$.

Démonstration du th. 4_b: Ce théorème résulte du th. 1_b et des formules: $A \subset A + B$ et $B \subset A + B$.

Démonstration du th. 5_b: Ce théorème résulte du th. 1_b, des formules: $A B \subset A$, $A B \subset B$ et de l'axiome I_b.

§ 3. Les ensembles qui proviennent de l'application de l'opération A^c et de l'une des opérations A^e, A^i, A^f, A^b.

1. Dans ce § j'étudie les fonctions que l'on peut obtenir d'un ensemble quelconque A en combinant l'opération A^c et une des opérations A^e, A^i, A^f et A^b. Je calcule en particulier le nombre des fonctions que l'on peut ainsi obtenir et je présente toutes les inclusions possibles qui subsistent entre elles.

2. Quant aux opérations A^e et A^i, on peut démontrer à l'aide de nos axiomes, qu'il n'existe que 14 ensembles différents que l'on peut obtenir d'un ensemble arbitraire A, en combinant les opérations A^c et A^e (resp. A^i). Voici la table des relations d'inclusion entre ces ensembles (on obtient une table analogue pour A^i en s'appuyant sur la formule $A^e = A^{ci}$):

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} & & A^{ceee} & \subset & A^{ee} & \subset & A^{eeec} & & \\ A^{ce} & \subset & A^{ceee} & \subset & A^{ceec} & \subset & A^{eeec} & \subset & A^{ec} \\ & & A^{ce} & \subset & A & \subset & A^{ec} & & \\ & & A^{e} & \subset & A^{c} & \subset & A^{cec} & & \\ A^{e} & \subset & A^{eee} & \subset & A^{eec} & \subset & A^{ceeec} & \subset & A^{cec} \\ & & A^{eee} & \subset & A^{cee} & \subset & A^{ceeec} & & \end{array}\right\} \quad (T)$$

J'omets les démonstrations des propositions que je viens de citer, car on les déduit immédiatement des résultats analogues de M. Kuratowski — concernant l'opération A^r — en s'appuyant sur les formules $A^r = A^{ec}$ et $A^r = A^{cic}$.

Je cite seulement un simple exemple, qui prouve que tous les ensembles renfermés dans la table (T) sont différents et qu'il ne subsiste aucune autre inclusion entre eux, sauf celles, que l'on trouve dans cette table [1]).

Soit C l'ensemble de tous les nombres réels. L'ensemble demandé A est la somme des ensembles suivants:

$A_1 =$	l'ensemble des nombres réels:		$0 \leqslant x < 1$,
$A_2 =$	„ „ „		$1 < x < 2$,
$A_3 =$	„ „	rationnels:	$3 \leqslant x < 4$,
$A_4 =$	„ composé du seul nombre 5.		

Cet exemple nous sera encore utile dans la suite.

3. En s'appuyant sur l'axiome II_f, sur le théorème 2_f et sur le principe de la double négation, on démontre sans peine, que toute fonction que l'on obtient d'un ensemble donné A en combinant les opérations A^c et A^f, est identique à une des six fonctions suivantes: A, A^f, A^{ff}, A^c, A^{fc}, A^{ffc}.

Lorsqu'on définit la frontière comme dans la théorie des ensembles des points, on reconnait, en examinant notre exemple cité ci-dessus, que tous les six ensembles mentionnés sont différents et qu'il ne subsiste aucune relation d'inclusion entre eux, sauf les relations: $A^{ff} \subset A^f$ et $A^{fc} \subset A^{ffc}$ (l'axiome IV_f et le principe de la contraposition).

4. L'ensemble A^{cbcb} est le (premier) résidu de A (au sens de M. Hausdorff). On sait, qu' il y a des ensembles de points dont l'ensemble des résidus différents est transfini. Or, on peut obtenir une infinité de fonctions différentes d'un ensemble A en combinant les opérations A^c et A^b.

Posons: $A^1 = A$ et $A^{n+1} = A^{cnbc}$. Je démontrerai le théorème suivant:

Th. 6_b: Quel que soit A, on a les deux suites doublement infinies d'inclusions:

[1]) Ce résultat a été d'ailleurs obtenu déjà par M. Kuratowski par un raisonnement un peu différent.

$$\begin{array}{l} \ldots\ldots \subset A^{4b} \subset A^{3b} \subset A^{2b} \subset A^{1b} \subset A^1 \subset A^2 \subset A^3 \subset A^4 \subset \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \subset A^{c4b} \subset A^{c3b} \subset A^{c2b} \subset A^{c1b} \subset A^{c1} \subset A^{c2} \subset A^{c3} \subset A^{c4} \subset \ldots\ldots \end{array}$$ [1])

Démonstration du th. 6_b:

Nous démontrerons d'abord que $A^n \subset A^{n+1}$ (pour tout n naturel). Pour $n=1$, et $n=2$ le théorème a déjà été démontré (th. 2_b). Or, il reste encore à démontrer que, lorsque $A^{m-1} \subset A^m$ et $A^m \subset A^{m+1}$, on a aussi $A^{m+1} \subset A^{m+2}$.

Or, nous avons: $A^{c(m-1)bcbcb} \subset A^{c(m-1)b}$ (ax III b). α) Mais: $A^{(m-1)b} \subset A^m = A^{c(m-1)bc}$. La relation $A^{(m-1)b} \subset A^{c(m-1)bc}$ étant vraie pour tout A, elle est aussi vraie pour A^c, or: $A^{c(m-1)b} \subset A^{(m-1)bc}$. Nous obtenons maintenant de la formule α): $A^{c(m-1)bcbcb} \subset A^{(m-1)bc}$, d'où (d'après la définition de A^m): $A^{mbcb} \subset A^{cc(m-1)bc} = A^{cm}$. β) Mais nous avons par l'hypothèse: $A^{cm} \subset A^{c(m+1)} = A^{mbc}$, or: A^{cm} $A^{mbcb} \subset A^{cmb}$ (th. 1_b). Il s'en suit d'après la formule β): $A^{mbcb} \subset A^{cmb}$ et $A^{cmbc} \subset A^{mbcbc}$. Mais: $A^{cmbc} = A^{m+1}$ et $A^{mbcbc} = A^{ccmbcbc} = A^{c(m+1)bc} = A^{m+2}$, donc: $A^{m+1} \subset A^{m+2}$.

La formule $A^n \subset A^{n+1}$ est donc démontrée. On en déduit par la contraposition: $A^{(n+1)c} \subset A^{nc}$. En posant dans les deux dernières formules A^c au lieu de A, on obtient: $A^{cn} \subset A^{c(n+1)}$ et $A^{c(n+1)c} \subset A^{cnc}$. Mais: $A^{nc} = A^{c(n-1)bcc} = A^{c(n-1)b}$ et $A^{cnc} = A^{cc(n-1)bcc} = A^{(n-1)b}$, et notre théorème est démontré complètement.

Il est aisé de voir que chaque ensemble obtenu de A par les opérations A^c et A^b est un terme d'une des deux suites du théorème 6_b et qu'aucune inclusion ne subsiste entre ces ensembles, outre celles qui y sont données.

§ 4. Applications aux ensembles bien ordonnés.

1. Les systèmes d'axiomes S_r, S_e, S_i, S_f et S_b et leurs conséquences peuvent être appliqués non seulement dans la topologie, mais aussi dans des espaces beaucoup plus généraux.

[1]) Voici l'expression explicite de quelques termes de nos suites:

$$\begin{array}{l} \ldots \subset A^{cbcbcbcb} \subset A^{bcbcb} \subset A^{cbcb} \subset A^b \subset A \subset A^{cbc} \subset A^{bcbc} \subset A^{cbcbcbc} \subset \ldots\ldots \\ \ldots \subset A^{bcbcbcb} \subset A^{cbcbcb} \subset A^{bcb} \subset A^{cb} \subset A^c \subset A^{bc} \subset A^{cbcbc} \subset A^{bcbcbc} \subset \ldots \end{array}$$

J'en donne une interprétation à l'aide de la notion du *reste* d'un ensemble bien ordonné.

Soit C un ensemble bien ordonné et A un sous-ensemble de C. Définissons la fermeture A^r comme „le reste de A", c. à. d. l'ensemble des éléments qui ne précèdent pas le premier élément de A. On vérifie sans peine que l'ensemble A^r, ainsi défini, satisfait aux axiomes du système S_r.

2. Je signalerai encore le sens des autres notions fondamentales de l'Analysis Situs dans notre interprétation. J'adopte dans ce but, les définitions suivantes:

L'ensemble A est un ensemble *initial*, lorsqu'il contient le premier élément de C et un ensemble *non-initial* en cas contraire.

On appelle (selon M. Hausdorff) l'ensemble $A^{s_1} = A^{cbcb}$ le premier résidu de A, et $A^{s_n} = (A^{s_{n-1}})^{s_1}$ le n-ième résidu de A.

J'appelle l'ensemble $A^{m_1} = AA^{s_1 c}$ la première, $A^{m_n} = (A^{m_{n-1}})^{m_1}$ la n-ième portion de A[1]).

On démontre sans peine les relations suivantes:

$$A^{s_n} = A - \sum_{i=1}^{n} A^{m_i} \quad (n=1, 2, 3, \ldots) \quad \text{et} \quad A^{m_n} = A^{s_{n-1}} - A^{s_n} \quad (n=2, 3, 4, \ldots).$$

3. Il est maintenant aisé de vérifier les propositions suivantes:

L'ensemble A est „fermé", lorsqu'il est identique à son reste.

A est „partout dense" ($A^e = 0$), lorsqu'il est un ensemble initial.

A est un „ensemble frontière" ($A^i = 0$), lorsqu'il est non-initial.

A est un „domaine ouvert" ($A^b = 0$), lorsqu'il est un ensemble initial et ne contient qu'une seule portion.

[1]) On a p. e., lorsque $C = (1, 2, 3, 4, \ldots)$ et $A = (1, 2, 7, 10, 11, 12, 20, 21, \ldots)$: $A^{m_1} = (1,2)$, $A^{m_2} = (7)$, $A^{m_3} = (10, 11, 12)$, $A^{m_4} = (20, 21, 22, \ldots)$ et $A^{m_n} = 0$ pour $n > 4$, $A^{s_1} = (7, 10, 11, 12, 20, 21, \ldots)$, $A^{s_2} = (10, 11, 12, 20, 21, \ldots)$, $A^{s_3} = (20, 21, \ldots)$ et $A^{s_n} = 0$ pour $n > 3$.

On peut aussi définir la notion de la portion comme suit:

A^{m_1} est dit la première portion de A, lorsqu'elle possède les 4 propriétés suivantes: 1) $A^{m_1} \subset A$ 2) A^{m_1} contient le premier élément de A 3) A^{m_1} est une différence de deux restes 4) A^{m_1} est le plus grand ensemble jouissant des propriétés 1 — 3.

„L'intérieur" d'un ensemble initial est sa première portion, „l'intérieur" d'un ensemble non-initial est vide.

„L'extérieur" de A est l'ensemble de tous les éléments de C, qui précèdent le premier élément de A.

La „frontière" d'un ensemble initial A est la différence de C et de la première portion de A, la „frontière" d'un ensemble non-initial est identique à son reste.

Le „bord" d'un ensemble initial A est identique au premier résidu de A, le „bord" d'un ensemble non-initial est identique à cet ensemble même.

Deux ensembles arbitraires (non vides) A et B ne peuvent jamais être „séparés"[1]), donc tout ensemble est „connexe". Tout reste est donc un „continu".

Il n'existe que 6 ensembles différents, non vides et différents de C, que l'on obtient d'un ensemble arbitraire A, en combinant les opérations A^r et A^c. Voilà ces ensembles: A, A^r, A^{rc}, A^c, A^{cr}, A^{crc}.

[1]) On dit (selon M. Mazurkiewicz) que les ensembles A et B sont séparés, lorsque: $AB^r = BA^r = 0$.