pakten Teilmenge von A^* (nämlich in der abgeschlossenen Hülle von K in A^*) enthalten. Damit ist unser Satz bewiesen [1]).

Die (im Paragraph 6 gestellte) Frage, ob die Mengen von der Eigenschaft E^{**} mit den halbkompakten F_σ über einstimmen, kann demnach in die folgende Gestalt gebracht werden:

Ist eine Menge, die in abzählbar viele *bedingt kompakte* Mengen zerlegbar ist und diese Eigenschaft auch nach jeder topologischer Abbildung bewahrt, notwendig Summe von abzählbar vielen *absolut kompakten* Mengen?

[1]) Es sei darauf hingewiesen, dass ein analoger Satz auch für die Eigenschaft E besteht: *Eine Menge hat dann und nur dann die Eigenschaft E, wenn jedes topologische Bild von ihr Summe ist einer Folge M von Mengen, deren Durchmesser gegen 0 konvergieren.*

Sur les coupures de l'espace.

Par

S. Mazurkiewicz et S. Straszewicz (Varsovie).

1. Le but de cette Note est de démontrer deux théorèmes sur les coupures de R_3 (éspace Euclidien à trois dimensions). Les théorèmes en question présentent une certaine analogie avec ceux que Janiszewski avait démontrés en 1913 pour le plan Euclidien [1]).

2. A tout point τ de l'intervalle $\tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$ faisons correspondre un point $x(\tau)$ de R_3 et supposons que la fonction $x(\tau)$ est continue. Cette correspondance détermine une courbe continue $[x(\tau); \tau_1, \tau_2]$; nous l'appellerons fermée si $x(\tau_1) = x(\tau_2)$.

3. Soit $B \subset R_3$ un ensemble fermé, $[x(\tau); \tau_1, \tau_2]$ une courbe continue, fermée, dont l'image est contenue dans $R_3 - B$. Cette courbe sera dite: libre par rapport à B, s'il existe une fonction de deux variables $x(\tau, \lambda)$ déterminée et continue pour $\tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$ et telle que:

$$x(\tau, \lambda) \varepsilon (R_3 - B) \tag{1}$$

$$x(\tau_1, \lambda) = x(\tau_2, \lambda) \tag{2}$$

$$x(\tau, 1) = x(\tau); \quad x(\tau, 0) = x_0 = \text{constans}. \tag{3}$$

Dans le cas contraire nous dirons, que cette courbe est entrelacée avec B.

4. Un ensemble fermé $B \subset R_3$ sera dit entrelaçable, s'il existe une courbe continue fermée entrelacée avec B.

[1]) *Sur les coupures du plan faites par les continus.* Prace mat.-fiz. T. 26. p. 11—63.

5. Théorème I. *Si A_1, A_2 sont des ensembles fermés, dont aucun ne coupe R_3 entre les points a, b et si $A_1 A_2$ n'est pas entrelaçable, alors $A_1 + A_2$ ne coupe pas R_3 entre a et b.*

6. Démonstration. Il existe par hypothèse deux arcs simples à extrémités $a, b: L_1, L_2$, tels, que

$$A_1 L_1 = A_2 L_2 = 0 \tag{4}$$

donc

$$(L_1 + L_2) A_1 A_2 = 0 \tag{5}$$

L_1, L_2 étant de lignes de Jordan, il existe une courbe continue, fermée $[y(\tau); 0, 2\pi]$ telle que L_1, L_2 sont respectivement les images de $[y(\tau); 0, \pi]$ et de $[y(\tau); \pi, 2\pi]$ et que: $y(0) = y(2\pi) = a$; $y(\pi) = b$. $A_1 A_2$ n'etant pas entrelaçable, cette courbe est libre par rapport à $A_1 A_2$, c. à. d. il existe par definition une fonction $y(\tau, \lambda)$ continue pour $0 \leqq \tau \leqq 2\pi$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$ et telle que:

$$y(\tau, \lambda) \in (R_3 - A_1 A_2) \tag{6}$$

$$y(0, \lambda) = y(2\pi, \lambda) \tag{7}$$

$$y(\tau, 1) = y(\tau); \ y(\tau, 0) = y_o = \text{constans}. \tag{8}$$

Déterminons dans un plan P un systéme (r, φ) de coordonnées polaires et désignons par α, β respectivement les points: $r = 1, \varphi = 0$ et $r = 1, \varphi = \pi$. Faisons correspondre à tout point $\mu \in P$ un point $z(\mu) \in R_3$ de la manière suivante: soient r, φ les coordonnées polaires de μ. $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$. On pose:

$$\left.\begin{aligned} z(\mu) &= y(\varphi, r) \quad \text{pour } 0 \leqq r \leqq 1 \\ z(\mu) &= y\left(\varphi, \frac{1}{r}\right) \quad \text{pour } r > 1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

En vertu de la continuité de $y(\tau, \lambda)$, et des relations (7), (8) la fonction $z(\mu)$ est continue pour tout point $\mu \in P$. D'après (6):

$$z(\mu) \in (R_3 - A_1 A_2) \tag{10}$$

et d'après (8):

$$z(\alpha) = a; \ z(\beta) = b. \tag{11}$$

Soit $D_i (i = 1, 2)$ l'ensemble de tous les points μ pour lesquels $z(\mu) \in A_i$; $z(\mu)$ étant continue, D_1 et D_2 sont fermés. Soit E_1 la demi-circonférence $r = 1$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, aux extrémités α, β. Pour $\mu \in E_1$:

$$z(\mu) = y(\varphi, 1) = y(\varphi) \in L_1, \tag{12}$$

donc d'après (4) $D_1 E_1 = 0$, c. à. d. D_1 ne coupe pas le plan P entre α et β. Il en est de même pour D_2. D'autre part:

$$D_1 D_2 = 0. \tag{13}$$

En effet, dans le cas contraire on aurait pour un point $\mu_1 \in D_1 D_2$:

$$z(\mu_1) \in A_1; \ z(\mu_1) \in A_2, \text{donc } z(\mu_1) \in A_1 A_2 \tag{14}$$

contrairement à (10). En vertu du premier théorème de Janiszewski[1]), $D_1 + D_2$ ne coupe pas les plan P entre α et β. Il existe donc dans P un continu H, image d'une courbe continue:

$$\mu = \psi(\sigma) \quad 0 \leqq \sigma \leqq 1 \quad \psi(0) = \alpha, \ \psi(1) = \beta \tag{15}$$

tel que

$$H(D_1 + D_2) = 0. \tag{16}$$

$z(\mu)$ étant continue, $z(\psi(\sigma))$ est une fonction continue de σ dans l'intervalle $0 \leqq \sigma \leqq 1$.

Soit G l'image de $[z(\psi(\sigma)); 0, 1]$. C'est un continu, contenant a et b, car:

$$z(\psi(0)) = z(\alpha) = a; \ z(\psi(1)) = z(\beta) = b. \tag{17}$$

En vertu de (16) on aura de plus:

$$G(A_1 + A_2) = 0. \tag{18}$$

Donc $A_1 + A_2$ ne coupe pas R_3 entre a et b, c. q. f. d.

7. Une courbe continue, fermée $[x(\tau); \tau_1, \tau_2]$ sera dite simple si la relation $x(\tau') = x(\tau'')$ entraîne l'une des trois relations:

$$\tau' = \tau''; \ \tau' = \tau_1, \tau'' = \tau_2; \ \tau' = \tau_2, \tau'' = \tau_1. \tag{19}$$

L'image d'une courbe simple fermée est une ligne simple fermée.

[1]) l. c. p. 48, 62 Théorème *A*. Pour les ensembles non bornés v. Knaster et Kuratowski. Fund. Math. V p. 33—36.

8. Si une courbe simple fermée est libre par rapport à un ensemble B, resp. entrelacée avec cet ensemble, il en sera de-même pour toutes les autres courbes simples fermées qui ont la même image. Nous dirons dans ce cas que la ligne simple fermée qui est l'image de la courbe en question est libre par rapport à B, resp. entrelacée avec B.

9. On voit facilement que B étant entrelaçable, il existe une ligne simple fermée polygonale entrelacée à B.

10. Lemme I. *J_1, J_2, J_3 étant trois arcs simples coëxtrémaux sans autres points communs deux à deux, si $J_1 + J_2$ est entrelacée avec B et $J_3 \times B = 0$, alors une au moins des deux lignes: $J_1 + J_3$, $J_2 + J_3$ est entrelacée avec B.*

11. Démonstration. Nous montrerons que si $J_1 + J_3$ et $J_2 + J_3$ sont libres par rapport à B, il en sera de-même pour $J_1 + J_2$.

Les arcs simples J_1, J_2, J_3 sont les images biunivoques et bicontinues de trois courbes $[f_1(\tau), 0, 1]$, $[f_2(\tau), 0, 1]$, $[f_3(\tau), 0, 1]$, et on a:

$$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = c_1;\quad f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = c_2 \tag{20}$$

$J_1 + J_2$, $J_1 + J_3$, $J_2 + J_3$ sont donc les images de trois courbes simples fermées: $[u_i(\tau); 0, 2]$ $i = 1, 2, 3$ définies respectivement par les relations:

$$\begin{array}{llll} u_1(\tau) = f_1(\tau) & 0 \leqq \tau \leqq 1; & u_1(\tau) = f_2(2-\tau) & 1 < \tau \leqq 2 \\ u_2(\tau) = f_1(\tau) & 0 \leqq \tau \leqq 1; & u_2(\tau) = f_3(2-\tau) & 1 < \tau \leqq 2 \\ u_3(\tau) = f_2(\tau) & 0 \leqq \tau \leqq 1; & u_3(\tau) = f_3(2-\tau) & 1 < \tau \leqq 2. \end{array} \tag{21}$$

Il suffit évidemment d'établir l'existence de deux fonctions: $F_1(\tau, \lambda)$, $F_2(\tau, \lambda)$ continues pour $0 \leqq \tau \leqq 1$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$ et assujetties aux conditions:

$$\begin{array}{ll} F_i(\tau, \lambda) \in R_3 - B & i = 1, 2 \\ F_i(\tau, 1) = f_i(\tau); & F_i(\tau, 0) = x_0 = \text{constans} \\ F_1(0, \lambda) = F_2(0, \lambda); & F_1(1, \lambda) = F_2(1, \lambda). \end{array} \tag{22}$$

Or $J_1 + J_3$ et $J_2 + J_3$ étant libres par rapport à B, il existe 4 functions: $g_1(\tau, \lambda)$, $g_3(\tau, \lambda)$, $h_2(\tau, \lambda)$, $h_3(\tau, \lambda)$ continues pour $0 \leqq \tau \leqq 1$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, et remplissant les conditions:

$$\begin{array}{lll} g_i(\tau, \lambda) \in R_3 - B; & h_k(\tau, \lambda) \in R_3 - B & i = 1, 3,\ k = 2, 3 \\ g_i(\tau, 1) = f_i(\tau); & h_k(\tau, 1) = f_k(\tau) & i = 1, 3,\ k = 2, 3 \\ g_i(\tau, 0) = g_0 = \text{const.}; & h_k(\tau, 0) = h_0 = \text{const.}; & \\ g_1(0, \lambda) = g_3(0, \lambda); & h_2(0, \lambda) = h_3(0, \lambda) & \\ g_1(1, \lambda) = g_3(1, \lambda); & h_2(1, \lambda) = h_3(1, \lambda) & \end{array} \tag{23}$$

On peut supposer en outre, ce que nous ferons dans la suite, que:

$$g_0 = h_0. \tag{24}$$

En effet, si $g_0 \neq h_0$, nous pouvons remplacer les fonctions $h_k(\tau, \lambda)$ par des fonctions $\overline{h}_k(\tau, \lambda)$ définies de la manière suivante:

$$\begin{array}{ll} \overline{h}_k(\tau, \lambda) = g_1(0, 3\lambda) & \text{pour } 0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{3} \\ \overline{h}_k(\tau, \lambda) = h_k(0, 2 - 3\lambda) & \text{pour } \frac{1}{3} < \lambda \leqq \frac{2}{3} \\ \overline{h}_k(\tau, \lambda) = h_k(\tau, 3\lambda - 2) & \text{pour } \frac{2}{3} < \lambda \leqq 1. \end{array}$$

Déterminons maintenant les fonctions $F_i(\tau, \lambda)$ par les conditions:

$$F_1(\tau, \lambda) = \begin{array}{ll} h_3(\tau, 3\lambda) & 0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{3} \\ g_3(\tau, 2 - 3\lambda) & \frac{1}{3} < \lambda \leqq \frac{2}{3} \\ g_1(\tau, 3\lambda - 2) & \frac{2}{3} < \lambda \leqq 1 \end{array} \tag{25}$$

$$F_2(\tau, \lambda) = \begin{cases} h_2(\tau, 3\lambda) \quad 0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{3} \\ \left.\begin{array}{ll} g_3(0, 2 - 3\lambda + 3\tau), & 0 \leqq \tau \geqq \frac{3\lambda - 1}{3} \\ f_2\left(\frac{1 + 3(\tau - \lambda)}{5 - 6\lambda}\right), & \frac{3\lambda - 1}{3} < \tau < \frac{4 - 3\lambda}{3} \\ g_3(1, 5 - 3\lambda - 3\tau), & \frac{4 - 3\lambda}{3} \leqq \tau \leqq 1 \end{array}\right\} \frac{1}{3} < \lambda \leqq \frac{2}{3} \\ \left.\begin{array}{ll} g_3(0, 3\lambda + 3\tau - 2), & 0 \leqq \tau \leqq 1 - \lambda \\ f_2\left(\frac{\tau + \lambda - 1}{2\lambda - 1}\right), & 1 - \lambda < \tau < \lambda \\ g_3(1, 1 - 3\tau + 3\lambda), & \lambda \leqq \tau \leqq 1 \end{array}\right\} \frac{2}{3} < \lambda \leqq 1 \end{cases}$$

On vérifie sans peine que ces fonctions sont continues pour $0 \leqq \tau \leqq 1$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, et qu'elles remplissent les conditions (22).

12. Lemme II. *Soit L une ligne simple fermée sur laquelle nous supposons fixé un sens du parcours; soit $a_1, b_1 \dots a_n, b_n$ une suite de points de L se succèdant dans le sens du parcours; désignons par L_i l'arc simple de L décrit de a_i à b_i dans le sens du parcours; soit K_i un arc simple aux extrémités a_i, b_i tel que:*

$$K_i L = a_i + b_i \quad K_i K_j = 0 \quad i,j = 1, 2 \dots n \quad i \neq j. \tag{27}$$

Si L est enlacée avec un ensemble B et si $K_i B = 0$, alors une au moins de lignes simples fermées

$$K_i + L_i \quad (i = 1 \dots n); \quad (L - \sum_{i=1}^{n} L_i) + \sum_{i=1}^{n} K_i \tag{28}$$

est enlacée avec B.

On démontre ce lemme par induction en s'appuyant sur le Lemme I.

13. Théorème II. *A_1, A_2 étant deux ensembles fermés dont aucun ne coupe R_3, leur somme $A_1 + A_2$ coupe R_3, si $A_1 A_2$ est entrelaçable sans que A_1 et A_2 le soient.*

14. D é m o n s t r a t i o n. Faisons d'abord la remarque suivante: si la ligne simple fermée L n'a pas de points communs avec aucun des deux ensembles A_1, A_2, elle est libre par rapport à $A_1 A_2$. En effet, si p. e. $L A_1 = 0$, L est libre par rapport à A_1 (puisque A_1 n'est pas entrelaçable). L est donc à fortiori libre par rapport à $A_1 A_2$.

Supposons maintenant, que notre théorème est faux, c. à. d., qu'il existe un couple d'ensembles A_1, A_2 remplissant les conditions du théorème et dont la somme ne coupe pas R_3. Il existe alors un polygone simple fermé P entrelacé avec $A_1 A_2$. On a:

$$P A_1 A_2 = (P A_1)(P A_2) = 0, \quad P A_1 \neq 0, \quad P A_2 \neq 0. \tag{29}$$

Fixons sur P un sens du parcours. Les ensembles $P A_1$ et $P A_2$ étant fermés et sans points communs, on peut évidemment déterminer sur P une suite de points $a_1, b_1, a_2, b_2 \dots a_n, b_n$ se succédant dans le sens du parcours adopté, n'appartenant pas à $A_1 + A_2$ et telle que

$$P A_1 \subset \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i); \quad P A_2 \subset \sum_{i=1}^{n-1} (b_i a_{i+1}) + (b_n a_1) \tag{30}$$

les symboles $(a_i b_i)$ resp. $(b_i a_{i+1})$ resp. $(b_n a_1)$ désignant les arcs simples de P décrits toujours dans le sens du parcours adopté de a_i à b_i resp. de b_i à a_{i+1} resp. de b_n à a_1. Comme:

$$a_i \varepsilon P - (A_1 + A_2), \; b_i \varepsilon P - (A_1 + A_2), \tag{31}$$

on aura:

$$A_2 \times \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) = A_1 \times \left[P - \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) \right] = 0. \tag{32}$$

Comme $A_1 + A_2$ ne coupe pas R_3 on peut déterminer une ligne polygonale simple Q_i aux extrémités a_i, b_i telle que:

$$Q_i \times (A_1 + A_2) = 0 \quad i = 1, 2 \dots n. \tag{33}$$

En outre on peut s'arranger (ce qu'on démontre par des considérations géométriques élémentaires) de manière à avoir:

$$Q_i P = a_i + b_i \quad Q_i Q_j = 0 \quad i \neq j \quad i,j = 1, 2 \dots n. \tag{34}$$

Les relations (32) et (33) entraînent:

$$A_2 \times (Q_i + (a_i b_i)) = 0 \quad i = 1, 2 \dots n \tag{35}$$

$$A_1 \times \left\{ \left[P - \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) \right] + \sum_{i=1}^{n} Q_i \right\} = 0 \tag{36}$$

et il s'ensuit que les lignes simples fermées:

$$\left[P - \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) \right] + \sum_{i=1}^{n} Q_i; \quad Q_j + (a_j b_j) \quad j = 1 \dots n \tag{37}$$

sont libres par rapport à $A_1 A_2$ car elles le sont par hypothèse par rapport à A_1 et A_2. Mais d'autre part en vertu du Lemme II une au moins de ces lignes est entrelacée avec $A_1 A_2$ puisque P est entrelacée avec cet ensemble. On arrive donc à une contradiction, en supposant que $A_1 + A_2$ ne coupe pas R_3, c. q. f. d.