Posons $f(x)=0$ pour les points x de R, et $f(x)=1$ pour les points x de T. La fonctionnelle $f(x)$ est ainsi définie dans l'ensemble $E=R+T$. Je dis qu'elle est continue dans E. Soit, en effet, x_0 un point de R. D'après (3), nous avons $RT'=0$: x_0 n'est donc pas un point d'accumulation de l'ensemble T, et il existe un voisinage V_{x_0} de x_0, tel que $T.V_{x_0}=0$, donc (d'après $E=R+T$ et $RT=0$): $E.V_{x_0}=R.V_{x_0}\subset R$, et parsuite (d'après la définition de la fonction $f(x)$) $f(x)=0$ pour tout point x de EV_{x_0}, d'où résulte que la fonctionnelle $f(x)$ est continue dans E au point x_0. La fonctionnelle $f(x)$ est donc continue dans E en tout point de l'ensemble R. Pareillement, on démontre qu'elle est continue dans E en tout point de l'ensemble T. Elle est donc continue dans l'ensemble E (en chaque point de cet ensemble).

Or, d'après $R\neq 0$ et $T\neq 0$ il existe un point a de R et un point b de T et (d'après la définition de $f(x)$) nous avons $f(a)=0$ et $f(b)=1$, et il résulte de la définition de la fonction $f(x)$ qu'elle ne prend dans E aucune valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. L'ensemble E ne jouit donc pas de la propriété de Darboux.

Notre proposition est ainsi démontrée. Elle peut être regardée évidemment comme une généralisation de la propriété connue des fonctions d'une variable réelle, continues dans un intervalle.

Sur l'espace D_ω de M. Fréchet.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Fréchet appelle *espace* D_ω l'ensemble de toutes les suites infinies bornées de nombres réels $X(x_1, x_2, x_3, \dots)$ (la borne variant en général avec chaque suite X), la distance $\rho(X, Y)$ de deux éléments $X(x_1, x_2, x_3, \dots)$ et $Y(y_1, y_2, y_3, \dots)$ étant, par définition, la borne supérieure, quand n varie, de $|x_n - y_n|$.

Désignons par C_0 l'espace formé de toutes les fonctions continues bornées d'une variable réelle t (les bornes variant en général avec chaque fonction f de C_0), la distance $\rho_1(f, g)$ de deux fonctions f et g étant, par définition, la borne supérieure, quand t varie, de $|f(t) - g(t)|$.

M. Fréchet appelle *„application"* une transformation biunivoque d'un espace métrique en un autre conservant les distances. (On dit aussi *„transformation isométrique"* au lieu d'application [1])).

D'après M. Fréchet on dit que deux ensembles métriques M et N *ont métriquement même nombre de dimension*, s'il existe une application de M sur un sous-ensemble de N et une application de N sur un sous-ensemble de M.

Le but de cette Note est d'établir la proposition suivante:

Les espaces D_ω et C_0 ont métriquement même nombre de dimension.

$X(x_1, x_2, x_3, \dots)$ étant un élément donné quelconque de l'espace D_ω (donc une suite infinie bornée de nombres réels), désignons par $\varphi(X)$ la fonction $f=f(t)$ d'une variable réelle t, déterminée par les conditions suivantes:

[1]) V. p. e. A. Lindenbaum: *Fund. Math.* t. VIII, p. 213 ss.

1) On a
$$f(k)=x_k \quad \text{pour } k=1,2,3,\ldots,$$
$$f(k)=x_1 \quad \text{pour } k=0,-1,-2,\ldots$$

2) Dans chaque intervalle $(k, k+1)$, où k est un entier, la fonction $f(t)$ est linéaire.

La fonction $f=f(t)$ sera évidemment continue et bornée dans l'ensemble de tous les nombres réels t (la suite $X(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ étant bornée). Donc $\varphi(X)=f$ est un élément de l'espace C_o.

Désignons par C_1 l'ensemble de tous les éléments $f=\varphi(X)$ de C_o correspondant aux éléments X de D_ω. L'ensemble C_1 est donc une image univoque de l'espace D_ω. Je dis que la transformation de D_ω en C_1 ainsi obtenue est une application. Il suffira évidemment de démontrer que, X et Y étant deux éléments quelconques de D_ω, on a toujours la formule
$$\rho(X, Y)=\rho_1(\varphi(X), \varphi(Y)). \tag{1}$$

Soient donc X et Y deux éléments de D_ω, et posons: $\varphi(X)=f$, $\varphi(Y)=g$. De la définition des nombres $\rho(X, Y)$ et $\rho_1(f,g)$ résulte tout de suite que
$$\rho(X, Y)\leqslant\rho_1(f,g). \tag{2}$$

Or, il résulte de 2) que la fonction $f(t)-g(t)$ est linéaire dans chaque intervalle $(k, k+1)$, où k est un entier; sa borne supérieure, quand t varie en parcourant tous les nombres réels, ne dépasse donc pas la borne supérieure de $f(k)-g(k)$ pour k entier, donc, d'après 1), la borne supérieure de $|x_k-y_k|$ pour $k=1,2,3,\ldots$, c'est-à-dire, d'après la définition de $\rho(X, Y)$, le nombre $\rho(X, Y)$. On a donc, d'après la définition du nombre $\rho_1(f,g)$:
$$\rho_1(f,g)\leqslant\rho(X, Y). \tag{3}$$

Les formules (2) et (3) donnent, d'après $f=\varphi(X)$, $g=\varphi(Y)$, la formule (1), ce qui prouve que D_ω est applicable sur C_1.

Soit maintenent
$$r_1, r_2, r_3, \ldots \tag{4}$$
une suite infinie formée de tous les nombres rationnels.

$f=f(t)$ étant un élément donné quelconque de l'espace C_o (donc une fonction continue bornée d'une variable réelle t), désignons par $\psi(f)$ la suite infinie
$$X(f(r_1), f(r_2), f(r_3), \ldots); \tag{5}$$
la fonction f étant bornée, la suite (5) sera bornée: ce sera donc un élément de l'espace D_ω.

Désignons par Q l'ensemble de tous les éléments $X=\psi(f)$ de D_ω correspondant aux éléments f de C_o. L'ensemble Q est donc une image univoque de C_o. Nous prouverons que, f et g étant deux éléments donnés quelconques de C_o, on a toujours la formule
$$\rho_1(f,g)=\rho(\psi(f), \psi(g)), \tag{6}$$
d'où résultera, comme on sait, que C_o est applicable sur Q.

Soient donc f et g deux éléments de C_o, et soit ε un nombre positif donné quelconque. Posons:
$$\psi(f)=X(f(r_1), f(r_2), \ldots)=X, \text{ et } \psi(g)=Y(g(r_1), g(r_2), \ldots)=Y. \tag{7}$$

Il résulte de la définition du nombre $\rho_1(f,g)$, et de celle de la borne supérieure d'un ensemble de nombres réels, qu'il existe un nombre réel t, tel que
$$|f(t)-g(t)|>\rho_1(f,g)-\varepsilon. \tag{8}$$

Or, les fonctions f et g étant continues, il existe un nombre rationnel, donc un nombre de la suite (5), soit r_n, tel que
$$|f(t)-f(r_n)|<\varepsilon \text{ et } |g(r_n)-g(t)|<\varepsilon. \tag{9}$$

Les inégalités (8) et (9) donnent:
$$\rho_1(f,g)-\varepsilon<|f(t)-g(t)|=$$
$$=|f(t)-f(r_n)+g(r_n)-g(t)+f(r_n)-g(r_n)|\leqslant|f(t)-f(r_n)|+$$
$$+|g(r_n)-g(t)|+|f(r_n)-g(r_n)|<2\varepsilon+|f(r_n)-g(r_n)|,$$
donc
$$\rho_1(f,g)<|f(r_n)-g(r_n)|+3\varepsilon. \tag{10}$$

Or, d'après (7) et d'après la définition du nombre $\rho(X, Y)$, nous avons
$$|f(r_n)-g(r_n)|\leqslant\rho(X, Y), \tag{11}$$
et les formules (10) et (11) donnent:
$$\rho_1(f,g)<\rho(X, Y)+3\varepsilon. \tag{12}$$

L'inégalité (12) subsistant pour nombre positif ε, il en résulte:

$$\rho_1(f,g) \leqslant \rho(X,Y). \tag{13}$$

D'autre part, il résulte de la définition du nombre $\rho_1(f,g)$ que

$$|f(r_k) - g(r_k)| \leqslant \rho_1(f,g) \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots;$$

d'après (7) et d'après la définition du nombre $\rho(X,Y)$, nous avons donc

$$\rho(X,Y) \leqslant \rho_1(f,g). \tag{14}$$

Les formules (13) et (14) donnent l'égalité $\rho_1(f,g) = \rho(X,Y)$, donc, d'après (7), l'égalité (6), c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré que l'espace D_ω est applicable sur un sous-ensemble C_1 de l'espace C_0 et que l'espace C_0 est applicable sur un sous-ensemble Q de l'espace D_ω. Les espaces D_ω et C_0 ont donc métriquement même nombre de dimension, et notre proposition est démontrée.

Il est à remarquer que l'espace C de toutes les fonctions continues dans un intervalle fermé *fini* (avec la même définition de distance que dans l'espace C_0) a, d'après M. Fréchet, un nombre de dimension inférieur à celui de D_ω.

Quant à l'espace D_ω observons encore qu'il est *nulle part séparable*, c'est-à-dire qu'aucun ensemble ouvert contenu dans l'ensemble D_ω n'est séparable [1]).

En effet, soit U un ensemble ouvert contenu dans l'espace D_ω, $X(x_1, x_2, \ldots)$ un élément de U. L'ensemble U étant ouvert, il existe un nombre positif r, tel que tout élément Y de l'espace D_ω satisfaisant à l'inégalité $\rho(X,Y) \leqslant r$ appartient à U. Faisons maintenant correspondre à chaque ensemble N de nombres naturels l'élément $\Xi(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ de l'espace D_ω, où $\xi_n = x_n + r$ pour $n \varepsilon N$ et $\xi_n = x_n$ pour n *non* εN. On aura évidemment toujours $\rho(X, \Xi) \leqslant r$, donc $\Xi \varepsilon U$. Or, N et N_1 étant deux ensembles distincts de nombres naturels, on a évidemment $\rho(\Xi(N), \Xi(N_1)) = r$. L'ensemble de tous les éléments $\Xi(N)$ de l'espace D_ω, où N est un ensemble quelconque de nombres naturels, est donc un ensemble isolé contenu dans U, ayant la puissance du continu, ce qui prouve que l'ensemble U n'est pas séparable, c. q. f. d.

[1]) Un exemple d'un espace métrique nulle part séparable a été donné par P. Urysohn, ce volume, p. 119—121.

Über Folgen stetiger Funktionen.

Von

Witold Hurewicz (Amsterdam).

In der vorliegenden Arbeit wird das Verhalten von Folgen stetiger Funktionen untersucht und in Zusammenhang gebracht mit gewissen Überdeckungseigenschaften von Punktmengen [1]). Die behandelten Fragen stehen zugleich in engen Beziehungen zu den sogenannten Pantachieproblemen.

1. Sind zwei Folgen reeller Zahlen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gegeben, so schreiben wir mit Hausdorff [2]), $\{a_n\} > \{b_n\}$, bzw. $\{a_n\} < \{b_n\}$, bzw. $\{a_n\} = \{b_n\}$ wenn die Ungleichungen $a_n > b_n$, bzw. $a_n < b_n$, bzw. $a_n = b_n$ für fast allen n (d. h. für alle hinreichend grossen n) gelten. Diese drei Fälle bilden bekanntlich keine vollständige Disjunktion, es können vielmehr leicht zwei Folgen angegeben werden, zwischen denen keine dieser drei Grössenrelationen besteht.

Eine Menge A von Zahlenfolgen nennen wir nach oben (bzw. nach unten) *beschränkt*, wenn es eine Zahlenfolge α gibt, die grösser (bzw. kleiner) ist als alle Elemente von A. Die Menge A heisst nach oben (nach unten) *halbbeschränkt*, wenn eine Zahlenfolge α existiert, so dass kein Element von A grösser (kleiner) ist als α. Eine Menge von Zahlenfolgen, die sowohl nach oben als nach unten beschränkt bzw. halbbeschränkt ist, nennen wir schlechthin beschränkt bzw. halbbeschränkt.

[1]) Im Anschluss an eine Problemstellung von K. Menger in seiner Abhandlung „Einige Überdeckungsätze der Punktmengenlehre" (Wiener Berichte 133, 1924, S. 421) habe ich diese Überdeckungseigenschaften näher untersucht in der Arbeit „Eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems". (Math. Zeitschr. 24, 1925, S. 401). Über die dimensionstheoretischen Anwendungen der zitierten Menger'schen Untersuchungen vgl. Menger, Bericht über die Dimensionstheorie (Jahresber. d. deutschen Math. Ver. 36, 1926).

[2]) Vgl. Hausdorff, die Graduierung nach dem Endverlauf, Abhandl. d. Sächs. Ges. d. Wiss. 31, 1909 und Untersuchungen über Ordnungstypen, Berichte d. Sächs. Ges. d. Wiss. 59, 1909.