La connexité des ensembles et la propriété de Darboux.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Considérons un espace (V) de M. Fréchet[1]. C'est donc un ensemble d'éléments de nature quelconque, où l'on attache à chaque élément x une famille quelconque d'ensembles V_x de ces éléments. Chaque ensemble V_x est appelé *voisinage* de x.

Un point x est considéré comme *point d'accumulation d'un ensemble* E de points de l'espace (V), si chaque voisinage de x contient un point, au moins, de E, distinct de x. L'ensemble des points d'accumulation de E constitue *l'ensemble dérivé de* E.

Dans la théorie des espaces (V) on appelle *ensemble connexe* un ensemble S tel que si on le décompose en deux ensembles (non vides et disjoints) quelconques R et T, on a

$$R'T + RT' \neq 0. \quad ^{2)} \tag{1}$$

Si à tout point x d'un ensemble E de points d'un espace (V) correspond un nombre réel $f(x)$, on dit qu'on a défini une *fonctionnelle* $f(x)$ dans E[3]. On dit qu'une fonctionnelle (définie dans un ensemble E) est *continue dans* E *au point* x_0, s'il existe pour tout nombre positif ε un voisinage V_{x_0} (du point x_0), tel que tout point x de l'ensemble $E.V_{x_0}$ vérifie l'inégalité

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Nous dirons qu'un ensemble E de points d'un espace (V) jouit de la *propriété de Darboux*, si, $f(x)$ étant une fonctionnelle quelconque, continue dans E, et a et b étant deux points quelconques de E, $f(x)$ prend dans E toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

1) Voir p. e. M. Fréchet: *Fund. Math.* t. VIII, p. 152.
2) M. Fréchet, l. c. p. 152.
3) Cf. M. Fréchet: *Rendiconti Palermo*, t.

Le but de cette Note est de démontrer la proposition suivante:

Pour qu'un ensemble E de points d'un espace (V) soit connexe, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété de Darboux.

Démonstration.

La condition est nécessaire. Soit, en effet, E un ensemble connexe de points d'un espace (V), $f(x)$ — une fonctionnelle continue, définie dans E, a et b — deux points de E. Il faut démontrer que, m étant un nombre intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, p. e. tel que $f(a) < m < f(b)$, il existe un point x de E, tel que $f(x) = m$. Admettons qu'un tel point x de E n'existe pas et désignons par R l'ensemble de tous les points x de E, tels que $f(x) < m$, et par T l'ensemble de tous les points x de E, tels que $f(x) > m$. Nous aurons évidemment $R \neq 0$, $T \neq 0$ (puisque R contient le point a, et T le point b), $E = R + T$, $RT = 0$.

Soit x_0 un point de l'ensemble R: nous avons donc $f(x_0) < m$. Posons

$$\varepsilon = m - f(x_0) \tag{2}$$

ce sera donc un nombre positif. La fonctionnelle $f(x)$ étant continue dans E, et x_0, comme point de R, étant un point de E, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0, tel que tout point x de $E.V_{x_0}$ vérifie l'inégalité

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

qui donne, d'après (2):

$$f(x) < m,$$

et prouve que x est un point de R. Nous avons donc $E.V_{x_0} \subset R$, ce qui prouve (d'après la définition de l'ensemble dérivé et d'après $E - R = T$) que $RT' = 0$. Pareillement, on démontre que $R'T = 0$. La formule (1) ne subsiste donc pas et l'ensemble E n'est pas connexe, contrairement à l'hypothèse.

La condition est suffisante. Supposons, en effet, qu'un ensemble E de points d'un espace (V) n'est pas connexe. Il existe donc une décomposition $E = R + T$, telle que $R \neq 0$, $T \neq 0$, $RT = 0$ et

$$R'T + RT' = 0. \tag{3}$$

Posons $f(x)=0$ pour les points x de R, et $f(x)=1$ pour les points x de T. La fonctionnelle $f(x)$ est ainsi définie dans l'ensemble $E=R+T$. Je dis qu'elle est continue dans E. Soit, en effet, x_0 un point de R. D'après (3), nous avons $RT'=0$: x_0 n'est donc pas un point d'accumulation de l'ensemble T, et il existe un voisinage V_{x_0} de x_0, tel que $T.V_{x_0}=0$, donc (d'après $E=R+T$ et $RT=0$): $E.V_{x_0}=R.V_{x_0}\subset R$, et parsuite (d'après la définition de la fonction $f(x)$) $f(x)=0$ pour tout point x de EV_{x_0}, d'où résulte que la fonctionnelle $f(x)$ est continue dans E au point x_0. La fonctionnelle $f(x)$ est donc continue dans E en tout point de l'ensemble R. Pareillement, on démontre qu'elle est continue dans E en tout point de l'ensemble T. Elle est donc continue dans l'ensemble E (en chaque point de cet ensemble).

Or, d'après $R\neq 0$ et $T\neq 0$ il existe un point a de R et un point b de T et (d'après la définition de $f(x)$) nous avons $f(a)=0$ et $f(b)=1$, et il résulte de la définition de la fonction $f(x)$ qu'elle ne prend dans E aucune valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. L'ensemble E ne jouit donc pas de la propriété de Darboux.

Notre proposition est ainsi démontrée. Elle peut être regardée évidemment comme une généralisation de la propriété connue des fonctions d'une variable réelle, continues dans un intervalle.

Sur l'espace D_ω de M. Fréchet.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Fréchet appelle *espace* D_ω l'ensemble de toutes les suites infinies bornées de nombres réels $X(x_1, x_2, x_3, \dots)$ (la borne variant en général avec chaque suite X), la distance $\rho(X, Y)$ de deux éléments $X(x_1, x_2, x_3, \dots)$ et $Y(y_1, y_2, y_3, \dots)$ étant, par définition, la borne supérieure, quand n varie, de $|x_n - y_n|$.

Désignons par C_0 l'espace formé de toutes les fonctions continues bornées d'une variable réelle t (les bornes variant en général avec chaque fonction f de C_0), la distance $\rho_1(f, g)$ de deux fonctions f et g étant, par définition, la borne supérieure, quand t varie, de $|f(t) - g(t)|$.

M. Fréchet appelle *„application"* une transformation biunivoque d'un espace métrique en un autre conservant les distances. (On dit aussi *„transformation isométrique"* au lieu d'application [1]).

D'après M. Fréchet on dit que deux ensembles métriques M et N *ont métriquement même nombre de dimension,* s'il existe une application de M sur un sous-ensemble de N et une application de N sur un sous-ensemble de M.

Le but de cette Note est d'établir la proposition suivante:

Les espaces D_ω et C_0 ont métriquement même nombre de dimension.

$X(x_1, x_2, x_3, \dots)$ étant un élément donné quelconque de l'espace D_ω (donc une suite infinie bornée de nombres réels), désignons par $\varphi(X)$ la fonction $f=f(t)$ d'une variable réelle t, déterminée par les conditions suivantes:

[1]) V. p. e. A. Lindenbaum: *Fund. Math.* t. VIII, p. 213 ss.