Sur la densité linéaire des ensembles plans[1].

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

D'après le théorème bien connu de M. H. Lebesgue presque tous les points d'un ensemble mesurable sont points de densité de cet ensemble. On peut étendre ce théorème aux ensembles quelconques, en disant qu'en presque tous les points d'un ensemble quelconque la densité extérieure de cet ensemble est égale à 1[2]. Le but de ce travail est d'examiner si ce théorème subsiste pour la *densité linéaire* des ensembles plans, la longueur (extérieure) des ensembles étant prise au sens de M. Carathéodory. Nous prouverons qu'il ne subsiste que partiellement (Théorèmes I et II)[3].

Soit E un ensemble plan donné, ρ — un nombre positif donné. Considérons toutes les décompositions

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots \tag{1}$$

[1]) Ce travail a été déjà rédigé lorsque j'ai pris connaissance d'une Note de M. A. S. Besikovitch (*Comptes Rendus* t. 183, p. 553, séance du 4 octobre 1926) contenant les énoncés de plusieurs théorèmes dont le premier contient les résultats principaux de ce travail. Le théorème de M. Besikovitch étant énoncé sans démonstration, et ma démonstration étant basée sur quelques lemmes d'un caractère élémentaire et assez général, pouvant présenter quelque intérêt par eux-mêmes, j'ai décidé de la publier. D'ailleurs les théorèmes I et II de ce travail sont un peu plus généraux que le théorème I de M. Besikovitch qui ne considère que les ensembles mesurables linéairement au sens de Carathéodory.

[2]) Voir *Fundamenta Mathematicae* t. IV, p. 167.

[3]) La densité linéaire d'un ensemble plan de longueur finie peut être > 1 en certains points de cet ensemble: p. e. au point d'intersection de deux segments elle est égale à 2, et on peut sans peine donner des exemples d'ensembles plans de longueur finie dont la densité est infinie en certains points. Le théorème I est donc loin d'être évident.

de l'ensemble E en une infinité dénombrable d'ensembles E_n (disjoints ou non), satisfaisant à la condition

$$\delta(E_n) \leqslant \rho, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

où $\delta(E_n)$ désigne le diamètre de l'ensemble E_n.

A toute décomposition (1) correspond un nombre non-négatif fini ou infini

$$\delta(E_1) + \delta(E_2) + \delta(E_3) + \cdots \tag{3}$$

Désignons par $l(E, \rho)$ la borne inférieure (finie ou infinie) de tous les nombres (3) correspondant aux décompositions (1) qui satisfont à la condition (2).

On voit sans peine que

$$l(E, \rho') \geqslant l(E, \rho) \text{ pour } \rho' \leqslant \rho.$$

Il existe donc la limite (finie ou infinie)

$$l_e(E) = \lim_{\rho = +0} l(E, \rho) \tag{4}$$

que nous appellerons *longueur extérieure* de l'ensemble E. C'est donc toujours un nombre fini $\geqslant 0$ ou $= +\infty$.

Le diamètre d'une projection orthogonale d'un ensemble ne surpassant pas le diamètre de cet ensemble, il résulte sans peine de la définition de la longueur extérieure que *la longueur extérieure d'une projection orthogonale d'un ensemble ne surpasse pas la longueur extérieure de cet ensemble.*

De la définition de la longueur extérieure d'un ensemble résultent sans peine les propriétés suivantes:

I. $l_e(E)$ est un nombre $\geqslant 0$ et $\leqslant +\infty$, bien déterminé par l'ensemble E. Si E est un segment, $l_e(E)$ est sa longueur.

II. Pour $E_1 \subset E_2$ on a $l_e(E_1) \leqslant l_e(E_2)$.

III. On a $l_e(E_1 + E_2 + E_3 + \cdots) \leqslant l_e(E_1) + l_e(E_2) + \cdots$ pour toute suite infinie (dénombrable) d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$

IV. E_1 et E_2 étant deux ensembles dont la distance est positive, on a

$$l_e(E_1 + E_2) = l_e(E_1) + l_e(E_2).$$

En s'appuyant sur les propriétés I à IV on peut démontrer la propriété suivante[1]:

[1]) La démonstration détaillée se trouve chez C. Carathéodory: *Vorlesungen über reelle Funktionen.* Leipzig und Berlin 1918, § 237 (p. 241 — 246).

IV^a. *E étant un ensemble plan quelconque, tel que* $l_e(E)$ *est un nombre fini, et H étant un ensemble plan ouvert, on a*

$$l_e(E) = l_e(EH) + l_e(E - H).$$

Nous allons maintenant démontrer quelques lemmes qui seront nécessaires dans la suite.

Lemme 1. *E étant un ensemble plan donné quelconque, il existe toujours un ensemble* G_δ, $H \supset E$, *tel que* $l_e(E) = l_e(H)$.

Il suffit évidemment de traiter le cas, où le nombre $l = l_e(E)$ est fini.

Soit n un nombre naturel donné. D'après (4) il existe un nombre positif $\rho < 1/n$, tel que

$$l(E, \rho) < l + \frac{1}{n} \tag{5}$$

et il résulte de la définition du nombre $l(\rho, E)$ l'existence d'une décomposition (1) telle que

$$\delta(E_k) \leqslant \rho < \frac{1}{n} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

et

$$\delta(E_1) + \delta(E_2) + \cdots < l(E, \rho) + \frac{1}{n} < l + \frac{2}{n}. \tag{7}$$

Désignons par U_k l'ensemble de tous les points du plan, dont la distance à un au moins point de E_k est moindre que $\frac{1}{n \cdot 2^k}$: les ensembles U_k seront évidemment ouverts et $\supset E_k$, et nous aurons

$$\delta(U_k) = \delta(E_k) + \frac{2}{n \cdot 2^k}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

donc, d'après (6):

$$\delta(U_k) < \frac{1}{n} + \frac{2}{n \cdot 2^k} < \frac{3}{n}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

et, d'après (7):

$$\delta(U_1) + \delta(U_2) + \cdots < l + \frac{2}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n \cdot 2^k} = l + \frac{4}{n}. \tag{10}$$

Posons

$$H_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots \tag{11}$$

— ce sera évidemment un ensemble ouvert $\supset E$. Donc, l'ensemble

$$H = H_1 H_2 H_3 \ldots \tag{12}$$

sera un G_δ contenant E.

Soit maintenant r un nombre positif donné quelconque, n un nombre naturel, tel que $\frac{3}{n} \leqslant r$. D'après (12), (11), (10) et (9) nous trouvons

$$l(H, r) < l + 2r,$$

donc, à la limite pour $r = +0$:

$$l_e(H) \leqslant l.$$

Or, de $H \supset E$ et $l_e(E) = l$ résulte, d'après II, que

$$l_e(H) \geqslant l:$$

nous avons donc $l_e(H) = l_e(E)$ et notre lemme est démontré.

Lemme 2. *E étant un ensemble plan, tel que* $l_e(E) < +\infty$, *M étant un ensemble plan donné quelconque et* ε *un nombre positif, il existe toujours un ensemble ouvert* $U \supset M$, *tel que*

$$l_e(EU) \leqslant l_e(M) + \varepsilon.$$

Il suffit évidemment de traiter le cas, où $l_e(M) < +\infty$. D'après le lemme 1, il existe un G_δ, soit H, tel que $H \supset M$ et $l_e(H) = l_e(M)$. Soit

$$H = H_1 H_2 H_3 \ldots,$$

où les ensembles H_n sont ouverts; nous pouvons encore supposer que $H_n \supset H_{n+1}$. Posons $R_n = H_n - H_{n+1}$ (pour $n = 1, 2, \ldots$). D'après la propriété IV^a nous avons:

$$l_e(E) = l_e(E - H_1) + l_e(EH_1),$$
$$l_e(EH_1) = l_e(EH_1 - H_2) + l_e(EH_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l_e(EH_n) = l_e(EH_n - H_{n+1}) + l_e(EH_n),$$

donc

$$l_e(E) = l_e(E - H_1) + l_e(ER_1) + l_e(ER_2) + \ldots + l_e(ER_n) + l_e(EH_n)$$

et

$$l_e(E) \geqslant l_e(ER_1) + l_e(ER_2) + l_e(ER_3) + \ldots$$

Le nombre $l_e(E)$ étant fini, il en résulte qu'il existe pour le nombre $\varepsilon > 0$ un indice n, tel que

$$l_e(ER_n) + l_e(ER_{n+1}) + l_e(ER_{n+2}) + \ldots < \varepsilon.$$

Or, nous avons

$$EH_n = EH + E(H_n - H_{n+1}) + E(H_{n+1} - H_{n+2}) + \ldots =$$
$$= EH + ER_1 + ER_2 + \ldots,$$

donc, d'après III:

$$l_e(EH_n) \leqslant l_e(EH) + l_e(ER_1) + l_e(ER_2) + \ldots <$$
$$< l_e(EH) + \varepsilon \leqslant l_e(H) + \varepsilon = l_e(M) + \varepsilon.$$

H_n étant un ensemble ouvert $\supset H \supset M$, notre lemme est démontré.

Lemme 3. *Soit E un ensemble plan borné et F une famille de cercles K, telle que tout point de E est centre d'un cercle de F dont le diamètre est aussi petit que l'on veut. Il existe alors une suite de cercles de F: $K_1, K_2, K_3, \ldots$, telle que $K_i K_j = 0$ pour $i \neq j$ et que si l'on désigne par R_n un cercle concentrique avec K_n et tel que $\delta(R_n) = 3\,\delta(K_n)$, on a*

$$E \subset R_1 + R_2 + R_3 + \ldots.$$

Démonstration [1]). Nous pouvons évidemment supposer que tous les cercles K de la famille F ont le diamètre $\leqslant 1$ et que les centres de ces cercles sont des points de E.

Soit M_1 la borne supérieure des diamètres de cercles K de F. Il existe donc un cercle K_1 de F, tel que $\delta(K_1) > \frac{1}{2} M_1$ et par suite, pour tout cercle K de F:

$$\delta(K_1) > \frac{1}{2}\,\delta(K).$$

Définissons maintenant par récurrence la suite de cercles $K_1, K_2, K_3, \ldots$ de sorte qu'on ait

I) $K_n K_j = 0$, pour $j = 1, 2, \ldots, n-1$,

II) pour tout cercle K de F, tel que $KK_j = 0$ où $j = 1, 2, \ldots, n-1$, on a

$$\delta(K_n) > \frac{1}{2}\,\delta(K).$$

Si la condition I) est possible a remplir, on peut évidemment remplir II), en se servant d'un nombie M_n égal à la borne supérieure de $\delta(K)$ pour tous les K de F, tels que $KK_j = 0$ où $j = 1, 2, \ldots, n-1$, et en procédant comme pour $n = 1$. Si I) était impossible pour un certain n, étant possible pour les indices $< n$, l'ensemble fermé $K_1 + K_2 + \ldots + K_{n-1}$ aurait des points communs avec tout cercle K de F, et parsuite contiendrait E, puisque, d'après la condition du lemme, tout point de E est centre d'un cercle de F de rayon aussi petit que l'on veut. En ce cas notre lemme serait évidemment vrai.

1) Cf. S. Banach: *Fund. Math.* t. V, p. 131—133.

Supposons donc que la suite $K_1, K_2, K_3, \ldots$ est infinie, et supposons que le point p de E n'appartient pas à $K_1 + K_2 + \ldots + K_{n-1}$. Ce dernier ensemble étant fermé, il existe, d'après la propriété de la famille F, un cercle $K^{(n)}$ de F, ayant p pour centre et tel que

$$K^{(n)} K_j = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{13}$$

Si (13) subsistait pour tout indice j, on aurait, d'après II):

$$\delta(K_k) > \frac{1}{2}\,\delta(K^{(n)}) \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui est impossible, puisque, les cercles K_k $(k = 1, 2, \ldots)$ étant sans point commun deux à deux et leur somme étant bornée (en tant que E), nous avons $\lim\limits_{k=\infty} \delta(K_k) = 0$.

Il existe donc un indice $s \geqslant n$, tel que

$$K^{(n)} K_s \neq 0 \tag{14}$$

et

$$K^{(n)} K_j = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, s-1. \tag{15}$$

Or, (15) implique, d'après II):

$$\delta(K_s) > \frac{1}{2}\,\delta(K^{(n)}). \tag{16}$$

De (14) et (16) et de la définition du cercle R_s résulte tout de suite que le cercle R_s contient le centre du cercle $K^{(n)}$, c'est-à-dire le point p. La formule $E \subset R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$ est ainsi établie.

Lemme 4. *Soient E un ensemble plan borné, F une famille de cercles K, telle que tout point de E est centre d'un cercle de diamètre aussi petit que l'on veut appartenant à F, μ un nombre réel, tel que $\mu < l_e(E)$. Il existe alors une suite finie* *de cercles de F sans éléments communs deux à deux, $K_1, K_2, \dots, K_n$,* telle que $\sum_{j=1}^{n} \delta(K_j) < \mu$.

Démonstration. Distinguons deux cas:

1) $l_e(E) = +\infty$. Soit μ un nombre réel donné quelconque. D'après (4) il existe un nombre $\rho > 0$, tel que

$$l(E, \rho) > 3\mu. \tag{17}$$

En vertu du lemme 3 et d'après la propriété de la famille F, il existe une suite $K_1, K_2, K_3, \dots$ de cercles de F, tels que $\delta(K_j) < \rho/3$ $(j = 1, 2, \dots)$ et que si l'on désigne par R_j un cercle concentrique avec K_j et tel que $\delta(R_j) = 3\delta(K_j)$, on a

$$E \subset R_1 + R_2 + R_3 + \dots,$$

donc

$$E = ER_1 + ER_2 + ER_3 + \dots \tag{18}$$

De $\delta(K_j) < \rho/3$ et $\delta(R_j) = 3\delta(K_j)$ résulte que $\delta(R_j) < \rho$ et, à plus forte raison, $\delta(ER_j) < \rho$; d'après (18) et la définition du nombre $l(E, \rho)$, nous avons donc

$$l(E, \rho) \leqslant \delta(ER_1) + \delta(ER_2) + \dots \leqslant 3[\delta(K_1) + \delta(K_2) + \dots],$$

donc, d'après (17), pour n suffisamment grand:

$$\delta(K_1) + \delta(K_2) + \dots + \delta(K_n) > \mu,$$

c. q. f. d.

2) $\lambda = l_e(E) < +\infty$. Soit μ un nombre réel, tel que $\mu < l_e(E)$. Posons

$$E = \frac{\lambda - \mu}{5} \tag{19}$$

D'après (4) il existe un nombre $r > 0$, tel que

$$l(E, r) > l_e(E) - \varepsilon, \tag{20}$$

et nous pouvons supposer que tout cercle de F est de diamètre $< r$.

Or, d'après (4) il existe un nombre $\rho > 0$, tel que

$$l(E, \rho) > \frac{1}{2} l_e(E) = \frac{\lambda}{2}. \tag{21}$$

En vertu du lemme 3, il existe une suite $K'_1, K'_2, \dots$ de cercles de F de diamètres $< \rho/3$, disjoints et tels que si l'on désigne

par R'_j un cercle concentrique avec K'_j et tel que $\delta(R'_j) = 3\delta(K'_j)$, on a

$$E \subset R'_1 + R'_2 + R'_3 + \dots$$

Comme plus haut, il en résulte que

$$l(E, \rho) \leqslant 3[\delta(K'_1) + \delta(K'_2) + \dots],$$

donc, d'après (21) pour m_1 suffisamment grand:

$$\sigma_1 = \delta(K'_1) + \delta(K'_2) + \dots + \delta(K'_{m_1}) > \frac{\lambda}{6}$$

Posons

$$S_1 = K'_1 + K'_2 + \dots + K'_{m_1}$$

— ce sera un ensemble fermé. D'après la propriété IV^a nous aurons

$$\lambda = l_e(E) = l_e(ES_1) + l_e(E - S_1),$$

donc, en posant $\lambda_1 = l_e(ES_1)$:

$$l_e(E - S_1) = \lambda - \lambda_1.$$

Désignons par F_1 la partie de la famille F, formée de tous les cercles K de F, tels que $KS_1 = 0$; S_1 étant fermé, on voit sans peine que tout point de l'ensemble $E_1 = E - S_1$ est centre d'un cercle de la famille F_1 de diamètre aussi petit que l'on veut. En partant de l'ensemble E_1 et de la famille F_1 au lieu de E et F et en répétant le raisonnement précédent, nous obtiendrons une suite finie de cercles $K''_1, K''_2, \dots, K''_{m_2}$ de la famille F_1, disjoints et tels que

$$\sigma_2 = \delta(K''_1) + \delta(K''_2) + \dots + \delta(K''_{m_2}) > \frac{\lambda - \lambda_1}{6}$$

En répétant notre raisonnement k fois, nous obtenons une suite finie de cercles $K'_1, K'_2, \dots, K'_{m_1}, K''_1, K''_2, \dots, K''_{m_2}, \dots, K_1^{(k)}, K_2^{(k)}, \dots, K_{m_k}^{(k)}$ disjoints, appartenant à F et tels qu'en posant

$$S_j = K_1^{(j)} + K_2^{(j)} + \dots + K_{m_j}^{(j)}, \quad \sigma_j = \delta(K_1^{(j)}) + \dots + \delta(K_{m_j}^{(j)}),$$
$$\lambda_j = l_e(ES_j),$$

on a

$$\sigma_j > \frac{\lambda - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_j}{6} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, k. \tag{22}$$

Les ensembles $S_1, S_2, \ldots, S_k$ étant disjoints et fermés, nous avons, d'après IV:

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k=l_e(ES_1+ES_2+\ldots+ES_k)\leqslant l_e(E)=\lambda. \quad (23)$$

Distinguons maintenant deux cas:

α) $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots=\lambda$. Il existe dans ce cas un indice k, tel que

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k>\lambda-\varepsilon \quad (24)$$

L'ensemble $T_k=S_1+S_2+\ldots+S_k$ étant fermé, nous aurons, d'après la propriété IV^a:

$$l_e(E)=l_e(ET_k)+l_e(E-T_k),$$

donc, d'après (23) et (24):

$$l_e(E-T_k)=\lambda-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k)<\varepsilon \quad (25)$$

Or, nous avons

$$l(E-T_k, \frac{r}{2})\leqslant l_e(E-T_k); \quad (26)$$

d'après la définition du nombre $l(E-T_k, \frac{r}{2})$ il existe donc une décomposition $E-T_k=H_1+H_2+\ldots$, telle que (d'après (26) et (25)): $\delta(H_j)<r/2$ pour $j=1,2,\ldots$, et

$$\delta(H_1)+\delta(H_2)+\ldots<l(E-T_k)+\varepsilon<2\varepsilon \quad (27)$$

D'après $\delta(H_j)<r/2$. tout ensemble H_j peut être enfermé dans un cercle L_j, tel que $\delta(L_j)=2\delta(H_j)$; nous aurons donc, d'après (27):

$$\delta(L_1)+\delta(L_2)+\ldots<4\varepsilon \quad (28)$$

et $\delta(L_j)<r$, pour $j=1,2,\ldots$

Or, $E\subset T_k+H_1+H_2+\ldots$, donc

$$E\subset K'_1+K'_2+\ldots+K'_{n_1}+\ldots+K_1^{(k)}+\ldots+K_{m_k}^{(k)}+L_1+L_2+\ldots,$$

les diamètres de tous les cercles figurant à droite étant $<r$. D'après (20) nous avons donc

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k+\delta(L_1)+\delta(L_2)+\ldots\geqslant l(E,r)>l_e(E)-\varepsilon,$$

donc, d'après (28):

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k>l_e(E)-5\varepsilon$$

et, d'après (19):

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k>\mu,$$

ce qui prouve notre lemme.

β) $\lambda_1+\lambda_2+\ldots<\lambda$. Il existe dans ce cas un nombre $\eta>0$, tel que $\lambda_1+\lambda_2+\ldots\leqslant\lambda-\eta$ et parsuite $\lambda-\lambda_1-\ldots-\lambda_j\geqslant\eta$ pour $j=1,2,\ldots$, donc, d'après (22): $\sigma_j>\eta/6$ pour $j=1,2,\ldots$, ce qui prouve que

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\ldots=+\infty.$$

Il suffira donc prendre k suffisamment grand pour qu'on ait

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k>\mu.$$

Notre lemme est ainsi démontré.

Soit E un ensemble plan donné, p — un point appartenant à E ou non. Désignons par $K(p,r)$ le cercle de rayon r et ayant le point p pour centre. Le nombre

$$\overline{d}_e(E,p)=\overline{\lim_{r=0}}\frac{l_e(E.K(p,r))}{2r} \quad (29)$$

sera dit *densité linéaire extérieure supérieure* de l'ensemble E au point p.

Théorème I. *E étant un ensemble plan de longueur extérieure finie, l'ensemble de tous les points du plan, auxquels la densité linéaire extérieure supérieure de l'ensemble E est >1, est de longueur (extérieure) nulle.*

Démonstration. Il suffira évidemment de considérer le cas où l'ensemble E est borné et de démontrer que pour l'ensemble E_1 de tous les points p du plan, où l'on a $\overline{d}_e(E,p)>>1+\sigma$, où $\sigma>0$, on a $l_e(E_1)=0$.

D'après le lemme 2 il existe pour le nombre $\varepsilon>0$ un ensemble ouvert $U\supset E_1$, tel que

$$l_e(EU)\leqslant l_e(E_1)+\varepsilon. \quad (30)$$

De la définition de l'ensemble $E_1\subset U$ et de la formule (29) résulte qu'il existe pour tout point p de E_1 un cercle $K=K(p,r)$

de rayon r aussi petit que l'on veut, tel que $K \subset U$ et

$$\frac{l_e(EK)}{\delta(K)} > 1 + \sigma.$$

D'après le lemme 4, il existe un nombre fini de cercles $K_1, K_2, \ldots, K_n$, disjoints, contenus dans U et tels que

$$l_e(EK_j) > (1+\sigma)\,\delta(K_j) \quad \text{pour } j = 1, 2, \ldots$$

et

$$\delta(K_1) + \delta(K_2) + \ldots + \delta(K_n) > l_e(E_1) - \varepsilon.$$

ce qui donne

$$l_e(EU) \geqslant l_e(EK_1 + EK_2 + \ldots + EK_n) = l_e(EK_1) + \ldots + l_e(EK_n) > (1+\sigma)[l_e(E_1) - \varepsilon],$$

donc, d'après (30):

$$l_e(E_1) + \varepsilon > (1+\sigma)[l_e(E_1) - \varepsilon].$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ pouvant être aussi petit que l'on veut, cette inégalité implique une contradiction, si $l_e(E_1) > 0$. Notre théorème est ainsi démontré.

Théorème II. *E étant un ensemble plan donné quelconque, l'ensemble H de tous les points de E auxquels la densité extérieure supérieure de l'ensemble E est $< {}^1/_2$ est de longueur (extérieure) nulle.*

Démonstration. Désignons par $H(\sigma)$ l'ensemble de tous les points de E, où l'on a $\bar{d}_e(E, p) < \frac{1}{2} - \sigma$. On a évidemment $H = \sum_{n=2}^{\infty} H\left(\frac{1}{n}\right)$ et, d'après III, il suffira de démontrer que $l_e(H(\sigma)) = 0$ pour tout nombre σ tel que $0 < \sigma < {}^1/_2$.

De la définition de l'ensemble $H(\sigma)$ et d'après (29) résulte qu'il existe pour tout point p de $H(\sigma)$ un nombre $\rho > 0$, tel que

$$\frac{l_e(E \cdot K(p, r))}{2r} < \frac{1}{2} - \sigma \quad \text{pour } 0 < r < \rho. \tag{31}$$

Désignons par $H(\sigma, \rho)$ l'ensemble de tous les points p de $H(\sigma)$, pour lesquels on a l'inégalité (31). On a évidemment $H(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} H\left(\sigma, \frac{1}{n}\right)$ et, pour démontrer que $l_e(H(\sigma)) = 0$, il suffira

évidemment de prouver que $l_e[H(\sigma, \rho)] = 0$ quels que soient les nombres positifs $\sigma < {}^1/_2$ et ρ.

Admettons donc que $l_e[H(\sigma, \rho)] > 0$ et posons

$$\varepsilon = \frac{2\sigma\, l_e[H(\sigma, \rho)]}{1 - 2\sigma} \tag{32}$$

c'est un nombre positif.

De la définition de la longueur extérieure d'un ensemble résulte qu'il existe une décomposition

$$H(\sigma, \rho) = H_1 + H_2 + H_3 + \ldots, \tag{33}$$

telle que

$$\delta(H_j) < \rho \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, \ldots \tag{34}$$

et

$$\delta(H_1) + \delta(H_2) + \ldots < l_e[H(\sigma, \rho)] + \varepsilon \tag{35}$$

et nous pouvons supposer que tous les ensembles H_j $(j = 1, 2, \ldots)$ sont non vides.

Soit p un point de l'ensemble H_j: d'après (33) et $H(\sigma, \rho) \subset \subset H \subset E$, nous avons évidemment

$$H_j \subset E \cdot K(p, \delta(H_j)). \tag{36}$$

Or, d'après (33) et la définition de l'ensemble $H(\sigma, \rho)$ on a la formule (31), qui donne, d'après (34), pour $r = \delta(H_j)$:

$$l_e[E \cdot K(p, \delta(H_j))] < (1 - 2\sigma)\,\delta(H_j),$$

donc, d'après (36) et II:

$$l_e(H_j) < (1 - 2\sigma)\,\delta(H_j), \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, \ldots \tag{37}$$

Or, d'après (33) et III, on a:

$$l_e[H(\sigma, \rho)] \leqslant l_e(H_1) + l_e(H_2) + \ldots,$$

ce qui donne, d'après (37) et (35):

$$l_e[H(\sigma, \rho)] < (1 - 2\sigma)\{l_e[H(\sigma, \rho)] + \varepsilon\},$$

ce qui implique une contradiction, d'après (32).

Notre théorème est ainsi démontré.

Or, il importe de remarquer que la densité linéaire extérieure inférieure d'un ensemble plan de longueur extérieure positive peut être partout $\leqslant {}^1/_2$. Nous construirons même un ensemble plan fermé jouissant de cette propriété.

Soit T un triangle régulier dont les côtés sont $=1$. Divisons chaque côté de T en trois parties égales et menons des parallèles aux côtés du triangle T par les points de division. Le triangle T sera ainsi divisé en 9 triangles réguliers; soit S_1 la somme des trois triangles qui ont un sommet en commun avec T: nous les appellerons triangles de 1[re] ordre. En procédant sur chacun d'eux comme nous avons procédé sur le triangle T, nous obtiendrons 9 triangles de 2[me] ordre, dont la somme sera désignée par S_2, et ainsi de suite. Posons

$$E = S_1 S_2 S_3 \dots$$

E est un ensemble fermé. Nous allons maintenant calculer sa longueur (extérieure).

On voit sans peine que la projection de l'ensemble S_n sur un côté du triangle T est ce côté même, pour $n = 1, 2, 3, \dots$ Or, la projection d'une suite descendente d'ensembles fermés et bornés étant, comme on sait, le produit de projections de ces ensembles, on conclut que la projection de l'ensemble E sur un côté du triangle T est ce côté même, et parsuite on a $l_e(E) \geqslant 1$.

D'autre part les triangles d'ordre n ont évidemment les diamètres $= \frac{1}{3^n}$ et recouvrent l'ensemble E; leur nombre étant 3^n, on trouve $l\left(E, \frac{1}{3^n}\right) \leqslant 1$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, ce qui donne, d'après (4): $l_e(E) \leqslant 1$.

Nous avons ainsi démontré que $l_e(E) = 1$, et il en résulte tout de suite que la partie de E contenue dans un triangle d'ordre n est de longueur extérieure $\frac{1}{3^n}$ (étant semblable à l'ensemble E).

Soit p un point de E, n — un nombre naturel donné. On voit sans peine que $E \cdot K\left(p, \frac{1}{3^n}\right)$ se réduit à un de triangles d'ordre n. Il en résulte que

$$\frac{l_e\left[E \cdot K\left(p, \frac{1}{3^n}\right)\right]}{2 \cdot \frac{1}{3^n}} = \frac{1}{2}$$

ce qui donne

$$d_e(E, p) = \varliminf_{r=+0} \frac{l_e\left[E \cdot K\left(p, \frac{1}{3^n}\right)\right]}{2r} \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Observons qu'en modifiant un peu notre construction, on pourrait construire un ensemble plan fermé de longueur extérieure positive et tel que la densité linéaire extérieure inférieure soit nulle en chacun de ses points.

Varsovie, le 21 octobre 1926.