Sur les points de division dans les ensembles connexes[1]).

Par

Casimir Zarankiewicz — (Varsovie).

Je dis qu'un ensemble E *divise*[2]) un ensemble connexe[3]) C, lorsque l'ensemble $C-E$ n'ést pas connexe. Si E se réduit à un point p, je l'appelle *point de division de* C.

Etant donnés deux points x et y de $C-E$, je dis que E *divise* C *entre* x *et* y[4]), si l'on peut décomposer $C-E$ en deux ensembles A et B séparés, c'est-à-dire disjonts (sans points communs) et relativement fermés dans $C-E$, de telle manière que l'on ait $x \subset A$ et $y \subset B$.

La propriété de diviser un ensemble connexe C s'impose comme généralisation de la notion de *coupure* dans les continus. On dit notamment qu'un ensemble E *coupe* un continu K entre deux points x et y de ce continu, lorsque tout continu contenant $(x+y)$ et contenu dans C admet des points communs avec E. On dit tout court qu'un ensemble E (pouvant d'ailleurs se réduire à un point) *coupe* K, si $K-E$ n'est pas un semi-continu, c'est-à-dire, qu'il existe deux points x et y de $K-E$

[1]) La plus grande partie de cet ouvrage a été présentée comme Thèse du doctorat à l'Université de Varsovie *au printemps 1923*.

[2]) „to disconnect in the strong sens" des Américains.

[3]) Un ensemble est dit *connexe*, lorsqu'il n'est pas somme de deux ensembles non-vides et séparés (c'est-à-dire, dont aucun ne contient ni des points, ni des points-limites de l'autre). Un ensemble connexe et fermé est un *continu*, s'il contient plus d'un point.

[4]) M. P. Urysohn emploie dans le même sens l'expression „*E sépare* les points x et y dans *C*". (*Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*, Fund. Math. VII p. 36).

entre lesquels E coupe K. Il est évident qu'un ensemble E qui divise un continu, le coupe, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Je me propose d'étudier dans cette Note les ensembles ponctuels divisant les continus et, plus généralement, les ensembles connexes. J'examine en particulier la structure des ensembles composés de points de division d'un ensemble connexe arbitraire.

J'établis dans le § 1 des notions et des théorèmes préliminaires, dont un (th. 1) peut être régardé comme généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass et l'autre (th. 2) comme celle du théorème de Lindelöf aux familles d'ensembles de points.

La notion de *continu de convergence* que j'introduis me permet d'établir en outre une condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu ne contienne, comme sous-continus, que des continus de Jordan.

Le § 2, renferme les théorèmes fondamentaux sur les points de division dans un ensemble connexe arbitraire; j'y démontre en particulier dans sa forme générale un théorème de M. Moore (qui n'a été énoncé, par cet auteur que pour les ensembles fermés), tout en conservant l'idée directrice de sa démonstration.

Les deux §§ suivants concernent les points de division et les couples de points de division dans les continus de Jordan, ce qui conduit à certaines conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un continu arbitraire soit une droite topologique, un rayon, un arc simple et une courbe simple fermée. Plusieurs de ces conditions sont nouvelles. Ces considérations sont intimement liées à des questions topologiques d'ordre plus général. Tout ensemble connexe C, qu'un couple a, b de ses points ne divise pas, contient évidemment un sous-ensemble connexe $C-(a+b)$, qui le divise (entre a et b). D'après un théorème de M. J. R. Kline[1]) il n'existe qu'un seul *continu* qu'aucun sous-ensemble connexe ne divise, à savoir: la courbe simple fermée; la question s'impose si c'est en même temps le seul *ensemble connexe*, jouissant de cette propriété. On sait d'autre part qu'il n'existe qu'une seule famille *d'ensembles connexes* C (à savoir: les ensembles biconnexes) ne contenant que les sous-ensembles connexes

[1]) J. R. Kline. *Closed connected sets*... etc. Fund. Math. t. V p. 3.

S qui le divisent [1]). Ainsi tout continu contient un *sous-ensemble connexe* qui ne le divise pas. Reste à savoir si tout continu contient un *sous-continu* qui ne le divise pas [2]), question, qui n'a été tranchée que pour les continus de Jordan.

Les § 5 est consacré à l'étude de la structure de l'ensemble des points de division dans un ensemble connexe arbitraire. J'y envisage le problème de la détermination de sa classe de Borel dans divers cas généraux et j'en donne une solution pour les continus de Jordan. Je démontre ensuite deux théorèmes (th. 18 et 19) donnant une condition nécessaire pour qu'un continu soit entièrement composé de points de division d'un ensemble connexe et une condition suffisante pour qu'un ensemble soit celui de tous les points de division d'un ensemble connexe, (ce dernier étant d'ailleurs arbitraire). Cette condition est qu'il soit un type spécial de *dendrite* [3]) dont les „extrémités" forment un ensemble clairsemé.

Tous mes raisonnements concernent les ensembles situés dans des espaces euclidiens et les termes *„continu"*, *„continu de* Jordan", etc. désignent aussi bien les ensembles bornés que non-bornès.

Je tiens à remercier, en terminant, mes Professeurs, M. M. S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński pour leurs précieux conseils et M. M. B. Knaster et C. Kuratowski pour le concours qu'ils m'ont prêté à rédiger cette Note et à en simplifier les démonstrations.

§ 1. Notions et théorèmes préliminaires.

Soit

$$A_1, A_2, A_3, \dots A_n, \dots$$

une suite d'ensembles situés dans un ensemble quelconque C. Désignons [4]) par

$$Lim\, sup_C A_n$$

[1]) Voir Fund. Math. VIII. Problème 42.

[2]) Abstraction faite des cas où S ou bien $C-S$ se réduit à un point.

[3]) J'appelle ainsi, avec M. T. Ważewski (Annales de la Soc Polonaise de Math. t. II p. 49), toute ligne de Jordan — bornée ou non — qui ne contient aucune courbe simple fermée.

[4]) avec M. Hausdorff (*Grundzüge der Meugenlehre*, Leipzig, 1914 p. 236): $Lim\, sup\, A_n$, $Lim\, inf\, A_n$.

l'ensemble de tous les points x de C tels que chaque entourage U_x de x a des points communs avec une infinité d'ensebles A_n, et par

$$Lim\, inf_C A_n$$

l'ensembles de tous les points x de C tels que tout entourage U_x de x a des points communs avec tous les A_n, sauf, peut-être, un nombre fini de ces ensembles.

On a toujours

$$Lim\, inf_C A_n \subset Lim\, sup_C A_n$$

Lorsque

$$L = Lim\, inf_C A_n = Lim\, sup_C A_n,$$

j'écrirai $L = Lim_C A_n$ et dirai que la suite A_n est *convergente dans* C vers l'ensemble L qui est sa *limite dans* C.

On voit que les ensembles

$$Lim\, sup_C,\ Lim\, inf_C \text{ et } Lim_C$$

sont toujours relativement fermés dans C. Il en résulte en particulier que si l'ensemble C est fermé, ces trois ensembles le sont aussi et alors ils coïncident respectivement avec les ensembles

$$Lim\, sup,\ Lim\, inf \text{ et } Lim$$

(sans indices) definis par rapport à l'espace tout entier.

J'appellerai un continu K *continu de convergence* de C, s'il existe dans C une suite de continus $\{K_n\}$ satisfaisant aux conditions:

$$K_n \cdot K_m = 0 \quad (n \neq m) \tag{1}$$

$$K \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} K_n\right) = 0 \tag{2}$$

$$K = Lim\, K_n \tag{3}$$

Théorème 1. *Toute suite infinie d'ensembles arbitraires contient une suite convergente d'ensembles.*

Démonstration [1]). Je dis que:

$$\text{si toute suite } \{A_{n_k}\} \text{ extraite de } \{A_n\} \tag{4}$$

[3]) L'idée de cette démonstration m'a été communiquée par M. Kuratowski.

satisfait à l'égalité:

$$Lim\,sup\,A_{n_k} = Lim\,sup\,A_n \tag{5}$$

alors on a:

$$Lim\,inf\,A_n = Lim\,sup\,A_n. \tag{6}$$

Supposons, un effet, que (6) n'est pas vraie; par conséquent, il existerait un point $p \subset Lim\,sup\,A_n$, ainsi qu'un entourage U_p et une infinité d'ensembles $\{A_{n_k}\}$ tels que U_p serait disjoint de tous les $\{A_{n_k}\}$. On aurait donc pour cette infinité d'ensembles: p *non* $\subset Lim\,sup\,A_{n_k}$, contrairement à (5), ce qui prouve la formule (6).

Ceci établi, rangeons toutes les sphères ayant le rayon et les coordonnées du centre rationnelles en une suite infinie

$$R_1, R_2, R_3, \ldots R_n, \ldots \tag{7}$$

et envisageons le tableau des suites:

$$\begin{matrix} A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, \ldots A_n^{(1)}, \ldots \\ A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, A_3^{(2)}, \ldots A_n^{(2)}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, A_3^{(n)}, \ldots A_n^{(n)}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \tag{8}$$

déterminé comme il suit: $\{A_n^{(1)}\} = \{A_n\}$; $\{A_n^{(k)}\}$ est une suite arbitrairement extraite de $\{A_n^{(k-1)}\}$ pour laquelle $Lim\,sup\,A_n^k$ est disjoint de R_{k-1} et, dans le cas où une telle suite n'existe pas, $\{A_n^{(k)}\} = \{A_n^{(k-1)}\}$.

Je dis que la suite diagonale $\{A_n^{(n)}\}$ est convergente.

Supposons par contre qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe alors en vertu de (4) une suite $\{A_{n_k}^{(n_k)}\}$, extraite de $\{A_n^{(n)}\}$, et un point p tels, que p *non* $\subset Lim\,sup\,A_{n_k}^{(n_k)}$ et $p \subset Lim\,sup\,A_n^{(n)}$.

L'ensemble *Lim sup* étant toujours fermé, on peut déterminer une sphère rationelle qui contient p et qui n'a pas des points communs avec $Lim\,sup\,A_{n_k}^{(n_k)}$; soit donc m l'indice de cette sphère dans la suite (7).

Or, la suite $\{A_n^n\}$ pour $n > m+1$ étant extraite de la suite $A_1^{m+1}, A_2^{m+1}, A_3^{m+1}, \ldots$, il en est à plus forte raison de-même de la suite $\{A_{n_k}^{(n_k)}\}$ où $n_k > m+1$.

On a par définition du tableau (8): $(Lim\,sup\,A_{n_k}^{n_k}) \cdot R_m = 0$.

Il en résulte que la suite A_n^{m+1} ait été formée de façon que *Lim sup* de chaque suite extraite d'elle soit disjointe de R_m. Or, la suite $\{A_n^{(n)}\}$ pour $n > m+1$ étant extraite de $\{A_n^m\}$, on aurait $(Lim\,sup\,A_n^{(n)}) \cdot R_m = 0$, ce qui est impossible, car $p \subset Lim\,sup\,A_n^{(n)}$. La suite $A_n^{(n)}$ est par conséquent convergente, c. q. f. d.

Remarque. En particulier, lorsque $Lim\,sup\,A_n \neq 0$ (comme cela a lieu, par exemple, quand la somme $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ est b o r n é e), la suite $\{A_n\}$ contient une suite convergente $\{A_{n_k}\}$, à savoir, la suite diagonale $\{A_n^{(n)}\}$ du tableau (8), telle que $Lim\,A_{n_k} \neq 0$.

Théorème 2. *$\{A_x\}$ désignant une famille indénombrable d'ensembles A_x disjoints, contenus dans C et relativement fermés dans C, il existe tout au plus une infinité dénombrable des A_x qui ne sont pas des „limites dans C" d'une suite extraite de $\{A_x\}$.*

Démonstration. Soit

$$S_1, S_2, S_3, \ldots S_k, \ldots$$

la suite de toutes les sphères de l'espace consideré (m-dimensionnel) de centre et de rayon rationnels.

Posons:

$$P_x = \sum_{k=1}^{\infty} p_x(k) \quad \text{et} \quad \mathfrak{P} = \sum_x P_x \tag{9}$$

où $p_x(k)$ désigne un point arbitrairement fixé sur $A_x \cdot S_k$[1]), lorsque ce produit n'est pas vide.

L'ensemble P_x est donc au plus dénombrable et toujours d e n s e dans A_x. On a donc

$$A_x \subset \overline{P_x} \tag{10}$$

[1]) choix, qui est e f f e c t i f, lorsque les ensembles A_x sont fermés, et qui n'exige l'axiome de Z e r m e l o que dans le cas général.

Je dirai que P_x (ou que son indice x) possède la propriété $\mathfrak{W}_k$, lorsque $\mathfrak{P}$ ne contient aucune suite:

$$P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3}, \ldots P_{x_n}, \ldots$$

telle que l'on ait pour tout $i \leqslant k$ où $p_x(i)$ existe:

$$p_x(i) = \lim_{n\to\infty} p_{x_n}(i).$$

Je dis qu'il existe pour tout k une infinité tout au plus dénombrable d'ensembles jouissant de la propriété $\mathfrak{W}_k$.

Faisons, en effet, correspondre à tout P_x un point q_x défini comme il suit.

Soient $p_x(i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots k)$ les k premiers points de P_x, situés par hypothèse dans l'espace à m dimensions et ayant respectivement les coordonnées:

$$r_1(x, i),\ r_2(x, i), \ldots\ r_m(x, i).$$

Soit q_x le point situé dans l'espace à $m \cdot k$ dimensions et ayant les coordonnées:

$$r_1(x, 1), r_2(x, 1), \ldots\ r_m(x, 1), r_1(x, 2), \ldots,$$
$$r_m(x, 2), \ldots,\ r_1(x, k), \ldots,\ r_m(x, k).$$

Or, si P_x jouit de la propriété $\mathfrak{W}_k$, le point q_x est i s o l é dans l'ensemble $Q = \sum_x q_x$. S'il n'en était pas ainsi, on aurait en effet, une telle suite $\{q_{x_n}\}$ que $q_x = \lim q_{x_n}$, d'où $r_j(x, i) = \lim r_j(x_n, i)$ pour tout $i \leqslant k$, $j = 1, 2, 3, \ldots m$ et par conséquent $p_x(i) = \lim\ p_{x_n}(i)$ pour t o u t $i \leqslant k$, contrairement à $\mathfrak{W}_k$.

L'ensemble des points isolés étant toujours au plus dénombrable, il en est donc de-même de celui de tous les P_x qui jouissent de la propriété $\mathfrak{W}_k$ pour $k = 1, 2, \ldots$

La famille $\mathfrak{P}'$ des P_x qui ne jouissent de propriété $\mathfrak{W}_k$ pour aucun k naturel, renferme donc pour chaque k et pour tout $P_x \subset \mathfrak{P}'$ une suite d'ensembles $P_{x_n}(k)$ telle que $p_x(i) = \lim p_{x_n}(i)$ pour $i \leqslant k$.

On peut évidemment admettre que l'on a en outre

$$\rho\Big(p_x(i),\ p_{x_n}(i)\Big) < 2^{-k}, \tag{11}$$

en supprimant au besoin dans les suites: $\{p_{x_n}(i)\}$ $(i \leqslant k)$ un nombre fini de termes du début.

En vertu du théorème 1, on peut extraire de la suite d'ensembles $\{P_{x_n}(n)\}$ (c'est la suite diagonale dans la suite double $P_{x_n}(k)$ où $n = 1, 2, 3, \ldots.$ et $k = 1, 2, 3, \ldots.$) une suite convergente que nous désignerons par P_{x_n}.

Il est ainsi établi, en tenant compte de l'inégalité (11) que, pour tout P_x, il existe dans $\mathfrak{P}'$ une suite convergente $\{P_{x_n}\}$ d'ensembles tels que l'on a

$$p_x(k) = \lim p_{x_n}(k) \tag{12}$$

pour tout k naturel à la fois.

On conclut de (12), en vertu de (9), que $P_x \subset Lim\, P_{x_n}$, d'où $\overline{P}_x \subset Lim\, P_{x_n}$.

On a donc $\overline{P}_x \cdot C \subset Lim_C P_{x_n}$ et d'après (10)

$$A_x \subset Lim_C A_{x_n}. \tag{13}$$

D'autre part, étant donné un point quelconque

$$p \subset Lim_C A_{x_n}, \tag{14}$$

toute sphère S_k contenant p admet des points communs avec une infinité des A_{x_n}; par définition de $p_{x_n}(k)$, on a donc $p_{x_n}(k) \subset S_k$ pour une infinité de valeurs de n. Il s'en suit que $lim\, p_{x_n}(k) \subset S_k$, et comme $lim\, p_{x_n}(k) = p_x(k) \subset P_x \subset A_x$, on a $S_k \cdot A_x \neq 0$.

Or, S_k étant aussi petit que l'on veut, tout entourage de p contient des points de A_x, d'où $p \subset \overline{A}_x$, et, comme en vertu de (14), $p \subset C$, on a $p \subset \overline{A}_x \cdot C$. Il est donc etabli que

$$Lim_C A_{x_n} \subset A_x \cdot C = A_x, \tag{15}$$

ce dernier ensemble étant par hypothèse contenu dans C et relativement fermé dans C.

Les inégalités (13) et (15) donnent

$$A_x = Lim_C A_{x_n}$$

pour tout indice x de la famille indénombrable $\mathfrak{P}'$, c. q. f. d.

Lemme 3. *Tout point à oscillation* > 0 [1]) *d'un continu* C *est situé sur un continu de convergence* [2]).

Démonstration: Soit a un point à oscillation $\sigma_C(a) > 2\lambda$ dans un continu C. Il existe donc une suite des points satisfaisant aux conditions:

$$(\alpha) \quad lim\, a_n = a$$
$$(\beta) \quad \rho_C(a_n, a) \geqslant \lambda$$
$$(\gamma) \quad \rho(a_n, a) < \frac{\lambda}{4}.$$

Considérons la sphère S de rayon $\frac{\lambda}{4}$ et de centre a et désignons par $K_n = L_s(a_n; C \cdot S)$ le constituant [1]) de a_n dans $C \cdot S$. Ce dernier existe, puisque $a_n \subset S$ en vertu de (γ). Tout, K_n comme

[1]) J'appelle, avec M. Mazurkiewicz, *oscillation d'un continu* C *dans son point* a le nombre:

$$\sigma_C(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to a}} \sup.\, \rho_C(x,y),$$

où $\rho^C(x,y)$ désigne la *distance relative* de x et y dans C, c'est-à-dire la borne inférieure des diamêtres des sous-continus de C qui contiennent x et y (cf. S. Mazurkiewicz, *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. I, 1920, p. 170)

On a toujours: $0 \leqslant \sigma_C(a) \leqslant \infty$, quels que soient le continu C et le point $a \subset C$.

Ces inégalités subsistent, si l'on étend la notion d'oscillation en un point aux ensembles C et aux points a tout-á-fait arbitraires (des espaces métriques) *pourvu que* C *contienne une suite de continus* $\{K_n\}$ *telle que* $a \subset lim\, K_n$ *sans quoi* $\rho_C(x,y)$ *et* $\sigma_C(a)$ *n'existeraient pas.*

Nous supposerons ici la notion d'oscillation d'un ensemble en un point généralisée de cette façon.

[2]) Cf. R. L. Moore, *A characterization of Jordan regions by properties havving no reference to their boundaries*, Proc. Nat. Acad. Sc. IV 1918.

ensemble fermé, est un continu. On a: $C - S \neq 0$, car en cas contraire on aurait $C \subset S$, d'où $\delta(C) \leqslant \delta(S) = \frac{\lambda}{2}$, ce qui est impossible d'après (β).

En vertu d'un lemme de Janiszewski [2]) on a:

$$K_n \cdot F(S) \neq 0. \tag{16}$$

Posons:

$$B = L_s(a; C \cdot S).$$

Je dis que

$$B \cdot K_n = 0 \quad (n = 1, 2\, 3, \ldots). \tag{17}$$

Supposons, en effet, que pour un certain n_o on ait $b \subset B . K_{n_o}$; l'ensemble $B + K_{n_o}$, comme somme de deux continus ayant le point b en commun, serait donc un continu contenant a et a_{n_o} et satisfaisant à la formule:

$$\delta(B + K_{n_o}) \leqq \delta(S) = \frac{\lambda}{2}.$$

La distance relative entre les points a et a_{n_o} sur C serait par conséquent $\leqslant \frac{\lambda}{2}$ contrairement à (β). L'égalité (17) est ainsi demontrée.

Soit: $R = Lim\ sup\, K_n$; R est donc un continu. En effet, d'après (α) on a: $a \subset Lim\ inf\, K_n$; or, tout K_n contenant a_n et d'après (16) un point de $F(S)$, on a $lim\, \delta(K_n) > 0$. On peut donc appliquer aux K_n un lemme de M. Mazurkiewicz [3]), d'après lequel $Lim\ sup\, K_n$ est un continu.

Comme $R \subset B$ et, à plus forte raison $R \cdot K_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, il existe tout au plus un nombre fini de K_n admettant des points

[1]) On appelle *constituant* d'un point a dans un ensemble A l'ensemble de tous les points qui peuvent être reliés avec a par un continu situé dans A.

[2]) S. Janiszewski, *Sur les continus irréductibles entre deux points*, Thèse, p. 45. Paris, 1911, ou Journ. Ec. Polyt. (2) 16, 1912.

[3]) S. Mazurkiewicz. *Sur les lignes de Jordan*. Fund. Math. I. p. 175.

communs avec K_{n_0}, car en cas contraire K_{n_0} admettrait un point commun avec B, ce qui est impossible d'après (17).

Considérons à présent la suite de continus $\{D_n\}$ déterminée par les conventions: $D_1 = K_1, D_{n+1}$ est le premier K_n n'ayant aucun point commun avec

$$\sum_{k=1}^{n} D_k.$$

Il est évident qu'une telle suite existe et que tous deux D_k et D_l où $k \neq l$ n'ont aucun point commun.

D'après le théorème 1, on peut extraire de $\{D_n\}$ une suite convergente $\{E_n\}$.

Soit

$$E = Lim\, E_n$$

Pareillement à R, l'ensemble E est un continu. D'après (α) on a: $a \subset E$; comme $E \subset R$ on a, en vertu de (17), $E \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$ et évidemment $E_n \cdot E_m = 0$ (pour tout $n \neq m$). E est, par conséquent un continu de convergence de C contenant a, c. q. f. d.

Ainsi, tout continu non-jordanien contient un continu de convergence.

Théorème 4. *Pour qu'un continu ne contienne aucun continu de convergence, il faut et il suffit qu'il ne contienne que des continus de* J o r d a n[1]).

Démonstration. L a condition est nécessaire en vertu du th 3. Pour démontrer qu'elle est suffisante soit $K = \lim K_n$ un continu de convergence d'un continu jordanien C; je vais prouver que C contient alors un continu non-jordanien.

Considérons sur K deux points a et b. C étant jordanien, il existe un entourage U_a de a tel que tout point de $U_a \cdot C$ se laisse relier avec a par un arc simple $L \subset C$ de diamètre $< \frac{1}{4}\rho(a, b)$. On

[1]) Un théorème équivalent a été publié récemment par M. H. M G e h m a n dans sa thèse *Concerning the subsets of a plane continuous curve*, University of Pensylvania, Philadelphia 1925, th. V, p. 39).

a par définition de la limite: $a = lim\, a_n$ et $b = lim\, b_n$ où $(a_n + b_n) \subset K_n$, quel que soit n, et $a_n \subset U_a$, b_n non $\subset U_a$ à partir d'un $n = n_0$. En désignant par L_n un L à extrémités a_n et a, l'ensemble

$M = \sum_{n=n_0}^{\infty} (K_n + L_n) \subset C$ est un semicontinu et parsuite $\overline{M}$ est un sous-continu de C. Comme $b \subset K$ et $K \subset \overline{M}$ on a: $b \subset \overline{M}$.

Je dis que $\sigma_{\overline{M}}(b) > 0$. En effet, tout continu $N \subset \overline{M}$ qui unit b_{n_1} à un b_{n_2} ($n_1 > n_0 < n_2$) quelconque passe par $P = \sum_{n=n_0}^{\infty} L_n$, puisque $K_{n_1} K_{n_2} = 0$. Il en résulte que $\rho(b_{n_1}, P) \leqslant \delta(N) \geqslant \rho(b_{n_2}, P)$. Or, comme par hypothèse $\delta(L_n) < \frac{1}{4}\rho(a, b)$, on a: $\delta(P) \leqslant \frac{1}{2}\rho(a,b)$, et comme $a \subset P$ on a: b non $\subset P$. L'ensemble P étant fermé, la distance $\rho(b, P)$ est donc positive; posons $d = \rho(b, P)$. Le diamètre $\delta(N)$ est par conséquent $\geqslant d$, ce qui prouve que $\sigma_{\overline{M}}(b) > 0$. Ainsi le continu $\overline{M} \subset C$ n'est pas jordanien, c. q. f. d.

Le théorème suivant nous sera utile dans la suite:

Théorème 5. *La condition nécessaire et suffisante pour que tout ensemble fermé qui* c o u p e *un continu C entre les points x et y,* d i v i s e *C entre* c e s *points, est que C soit un continu de* J o r d a n.

Démonstration. La condition est suffisante en vertu du th. de M. R. L. M o o r e. (*Concerning continuous curves in the plane*, Math. Zeitschr. 1922, p. 255), la démonstration donnée par cet auteur se prêtant d'une façon toute naturelle à l'extension aux continus non-bornés et à un nombre quelquonque de dimensions.

La condition est nécessaire en vertu du th. de M. R. L. W i l d e r (*Concerning continuous curves*, Fund. Math. VII p. 373), qui se prête également á une telle extension.

§ 2. L'ensemble des points de division dans un ensemble connexe.

Etant donné un ensemble connexe C, désignons par $\tau(C)$ l'ensemble des points dont chacun d i v i s e C et posons $\tau'(C) = C - \tau(C)$.

Théorème 6. *Pour tout point $s \subset \tau(C)$ il existe une décomposition:*

$$C = A_s + B_s \tag{1}$$

où

$$A_s = \overline{A}_s \cdot C \neq s \neq \overline{B}_s \cdot C = B_s \tag{2}$$

$$A_s \cdot B_s = s \tag{3}$$

et

$$A_s \text{ et } B_s \text{ sont des ensembles connexes.} \tag{4}$$

Démonstration: Le point s divisant C par hypothèse, il existe une décomposition:

$$C - s = M + N, \tag{5}$$

où

$$M = \overline{M} \cdot (C - s) \neq 0 \neq \overline{N} \cdot (C - s) = N \tag{6}$$

et

$$M \cdot N = 0 \tag{7}$$

Posons:

$$A_s = M + s \text{ et } B_s = N + s. \tag{8}$$

Je vais prouver que les ensembles A_s et B_s ainsi définis satisfont aux conditions (1) — (4).

La condition (1) est, en effet, remplie, car on obtient, en appliquant l'égalité (5):

$$A_s + B_s = M + s + N + s = (C - s) + s = C.$$

Ensuite:

$$\overline{A}_s \cdot C = \overline{A}_s(C - s) + \overline{A}_s \cdot s = \overline{M + s} \cdot (C - s) + s = \overline{M}(C - s) + \overline{s}(C - s) + s,$$

ce qui est égal, en tenant compte de (6), à $M + 0 + s = A_s$. En outre, $A_s \neq s$ en vertu de (6) et (8). On a par raison de symétrie: $\overline{B}_s \cdot C = B_s \neq s$, de sorte que la condition (2) est également établie.

D'autre part:

$$A_s \cdot B_s = (M + s).(N + s) = M \cdot N + M \cdot s + N \cdot s + s;$$

or, trois premiers sommandes s'annulant en vertu de (7) et (5), on obtient la condition (3).

Enfin, A_s et B_s sont connexes en vertu du th. VI de l'ouvrage *„Sur les ensembles connexes"* de M. M. Knaster et Kuratowski, Fund. Math. II, p. 210.

Il est à remarquer que la décomposition (1) — (4) n'est pas nécessairement unique [1]. Or, quelle qu'elle soit, elle donne lieu en même temps à la décomposition suivante de $\tau(C)$:

$$\tau(C) = \tau(A_s) + \tau(B_s) + s \tag{10}$$

En effet, soit $a \subset \tau(C) - s$. Admettons que des deux inclusions possibles: $a \subset A_s - s$ et $a \subset B_s - s$ c'est la première qui a lieu. On a alors $a \subset \tau(A_s)$, puisqu'en cas contraire l'ensemble $A_s - a$, et par suite, l'ensemble $A_s - a + B_s = C - a$ serait connexe, contrairement à l'hypothése que $a \subset \tau(C)$.

Inversément, soit $a \subset \tau(A_s) - s$. L'ensemble $A_s - a$ se décompose donc en deux ensembles non-vides et séparés M et N, dont un, soit M, ne contient pas s. On a par conséquent $C - a = M + (N + B_s)$, où les ensembles M et $(N + B_s)$ sont non-vides et séparés, d'où $a \subset \tau(C)$. Le cas $a \subset \tau(B_s) - s$ est symétrique.

L'égalité (10) est ainsi établie.

Cette égalité donne la formule réciproque

$$\tau'(C) = \tau'(A_s) + \tau'(B_s) - s. \tag{11}$$

Plus généralement, on a donc le suivant

Corollaire. *C_1 et C_2 désignant deux ensembles connexes dont la* j o n c t i o n (c'est-à-dire, l'ensemble $\overline{C}_1 \cdot C_2 + C_1 \cdot \overline{C}_2$) *se réduit à un point s, on a:*

$$\tau(C_1 + C_2) = \tau(C_1) + \tau(C_2) + s$$

et

$$\tau'(C_1 + C_2) = \tau'(C_1) + \tau'(C_2) - s,$$

le point s lui-même pouvant d'ailleurs appartenir ou non à un des ensembles $\tau(C_1)$ ou $\tau(C_2)$.

Ces formules s'obtiennent directement des égalités (10) et (11) en vertu de (1) — (4).

Théorème 7. *Si pour deux ensembles arbitraires $M \subset C$ et $N \subset \tau(C)$ l'inclusion $M \subset A_s$ se présente pour tout point $s \subset M \cdot N$ dans une au moins des décompositions (1) — (4) de C relatives à ce point, l'ensemble $M \cdot N$ est au plus dénombrable.*

[1]) On peut démontrer que *l'ensemble des points de C donnant lieu á plusieurs décompositions* (1) — (4) *est au plus dénombrable.*

Démonstration. Etant donnée pour chaque $s \subset M \cdot N$ une décomposition (1) — (4) de C telle que $M \subset A_s$, on a par hypothêse

$$M \subset \prod_{s \subset M \cdot N} A_s \tag{12}$$

Je dis que, quel que soit $s_0 \subset M \cdot N$, on a

$$\sum_{s \subset M \cdot N - s_0} B_s \subset A_{s_0}. \tag{13}$$

Considérons, en effet, un point quelconque

$$s \subset M \cdot N - s_0. \tag{14}$$

On a en vertu de (12) d'une part

$$s_0 \subset A_s \tag{15}$$

et d'autre part

$$s \subset A_{s_0}, \tag{16}$$

puisque $s_0 + s \subset M$. La formule (15) donne en vertu de (3) et (14): s_0 *non* $\subset B_s$, d'où selon (1):

$$B_s \subset (A_{s_0} - s_0) + (B_{s_0} - s_0).$$

Ces deux sommandes étant séparés en vertu de (2) et (3), B_s comme ensemble connexe est contenu entièrement dans l'un d'eux, à savoir dans $A_{s_0} - s_0$, puisqu'il a avec lui, d'après (16) et (14), un point commun s. On a par conséquent $B_s \subset A_{s_0} - s_0 \subset A_{s_0}$ pour tout s satisfaisant à l'inclusion (14). La formule (13) est ainsi établie.

Il en résulte en vertu de (2) et (3) que pour tout $s_0 \subset M \cdot N$ on a $\sum_{s \subset MN - s_0} B_s \cdot B_{s_0} = 0$, de sorte que les ensembles B_s où $s \subset M \cdot N$ sont disjoints deux à deux.

Ceci dit, si l'ensemble $M \cdot N$ était indénombrable, il existerait (en vertu du th. 2), parmi les ensembles B_s où $s \subset M \cdot N$, un B_{s_0} et une suite $\{B_{s_n}\} \subset \sum_{s \subset MN - s_0} B_s$ telle que

$$B_{s_0} = Lim_C B_{s_n} \tag{17}$$

En vertu de (13) on aurait donc $\sum_{n=1}^{\infty} B_{s_n} \subset A_{s_0}$, d'où, en vertu de (2) et (17), $B_{s_0} \subset A_{s_0}$, contrairement à (3).

Comme applications du th. 7 on obtient les théorèmes suivants:

Théorème 8. *Etant donnée une infinité d'ensembles connexes disjoints*

$$M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

contenus dans un ensemble connexe C et tels que $M_0 = Lim_C M_n$, l'ensemble des points de M_0 qui divisent C (c'est-à-dire, l'ensemble $M_0 \cdot \tau(C)$) est au plus dénombrable.

Démonstration. Soit $M_0 = Lim_C M_n$; il s'agit de prouver que $M_0 \cdot \tau(C)$ est au plus dénombrable. En vertu du th. 7 il suffit à ce but de poser dans l'énoncé de ce théorème

$$M = M_0 \text{ et } N = \tau(C)$$

et de prouver que les ensembles M et N ainsi définis satisfont aux conditions de cet énoncé.

Or, on a par hypothése $M = M_0 \subset C$ et $N \subset \tau(C)$; il ne reste donc qu'à montrer que la condition (12) peut être également réalisée.

Étant donnée une décomposition quelconque (1) — (4) de C relative à un point arbitraire $s \subset M_0 \cdot \tau(C)$, tous les M_n sont par hypothèse disjoints de M_0, donc de s. D'autre part, tout M_n, comme ensemble connexe, est situé soit dans $A_s - s$, soit dans $B_s - s$, ces deux ensembles étant séparés (d'après (2) et (3)). Un d'eux contient par conséquent une suite infinie $\{M_{n_i}\}$ des M_n; admettons que ce soit $A_s - s$. On a donc $\sum_{i=1}^{\infty} M_{n_i} \subset A_s - s \subset A_s$ et comme A_s est selon (2) relativement fermé dans C, on a aussi $Lim_C M_{n_i} = Lim_C M_n = M_0 \subset A_s$. Le point $s \subset M_0 \cdot \tau(C) = M_0 \cdot N$ étant supposé arbitraire, l'inclusion $M \subset A_s$ entraîne la formule (12), c. q. f. d.

Corollaires. *L'ensemble des points qui divisent C et qui sont situés sur un continu de convergence K de C c'est-à-dire l'ensemble $K \cdot \tau(C)$ est tout au plus dénombrable.*

L'application itérée de cette proposition permet de montrer facilement que, *étant donné un entier arbitraire n, il existe sur K un ensemble E composé de n points*

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

et tel qu'aucun sous-ensemble S de E ne divise pas C.

En effet, étant donné un point quelconque $p_1 \subset K \cdot \tau'(C)$ et un sous-continu arbitraire K_1 de $K - p_1$, les ensembles $C - p_1$ et K_1 satisfont également aux conditions de la proposition à appliquer. Il existe par conséquent un point $p_2 \subset K_1 \cdot \tau'(C - p_1)$, de sorte que l'ensemble $C - (p_1 + p_2)$ et un sous-continu arbitraire K_2 de K_1 satisfont encore aux-mêmes conditions et ainsi de suite.

L'ensemble E supposé constitué et S désignant un sous-ensemble arbitraire de E, on a par hypothèse $E \subset K$, d'où $C = \overline{C - K} \subset \overline{C - E} = C$. Par conséquent

$$C - S = C - E + (E - S) \subset C \subset \overline{C - E},$$

ce qui prouve que $C - S$ est connexe, puisqu'il en est ainsi de $C - E$.

Théorème 9[1]. *M désignant un sous-ensemble connexe quelconque de C, l'ensemble des points de M qui divisent C sans diviser M (c'est-à-dire $M \cdot \tau(C) \cdot \tau'(M)$) est au plus dénombrable.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'en posant dans l'énoncé du th. 7:

$$N = \tau(C) \cdot \tau'(M) \tag{18}$$

toutes les conditions de cet énoncé sont remplies.

Or, on a par hypothèse $M \subseteq C$ et, en vertu de (18), $N \subseteq \tau(C)$. Je vais prouver que la condition (12) est aussi réalisée.

Désignons, en effet, pour une décomposition quelconque (1) — (4) de C relative à un point arbitraire $s \subseteq M \cdot N$, par A_s celui des ensembles A_s et B_s qui admet des points communs avec $M - s$. Les ensembles $A_s - s$ et $B_s - s$ étant d'après (2) et (3) séparés, on a

$$M \subseteq A_s, \tag{19}$$

[1]) Ce théorème n'a été etabli par M. R. L. Moore que pour le cas où les ensembles M et C sont des continus (*Concerning the cut-points of continuous curves and... etc.* Proceedings of the National Academy. Vol. 9. 1923, p. 102), mais sa démonstration peut être rendue applicable au cas où ces ensembles sont connexes (bornés ou non).

puisqu'en cas où on avait en outre $M \cdot (B_s - s) \neq 0$, le point s diviserait M, contrairement à l'égalite (18), qui implique que $s \subseteq \tau'(M)$. L'inclusion (19) ayant lieu pour tout $s \subseteq M \cdot N$, la condition (12) est établie, c. q. f. d.

Corollaire. *J désignant une courbe simple fermée contenue dans un ensemble connexe C, l'ensemble des points de J qui divisent C (c'est-à-dire $J \cdot \tau(C)$) est au plus dénombrable.*

En particulier, lorsque C est un continu de Jordan, l'ensemble des points de J qui *coupent* C est dénombrable[1]).

§ 3. L'ensemble des points de division dans un continu de Jordan.

Appelons *dendrite*[2]) tout continu de Jordan qui ne renferme aucune courbe simple fermée.

Je dirai qu'un ensemble est *ponctiforme au sens stricte*, lorsqu'il ne cesse d'être ponctiforme après l'addition d'un ensemble dénombrable arbitraire. Tout ensemble fermé ou F_σ ponctiforme est ponctiforme au sens stricte.

Théorème 10[3]). *Pour qu'un continu C soit une dendrite, il faut et il suffit que l'ensemble $\tau'(C)$ soit ponctiforme au sens stricte.*

Démonstration. La condition est nécessaire. N désignant, en effet, l'ensemble de toutes les extrémités des arcs simples (et des rayons topologiques, s'il y en a) saturés dans C on a $N = \tau'(C)$[4]).

Supposons donc qu'il existe un ensemble dénombrable D tel que $N + D$ ne soit pas ponctiforme. K désignant un con-

[1]) Ce résultat a été obtenu par uné autre voie par M. S. Mazurkiewicz. (Fund. Math. II, p. 119).

[2]) avec M. Ważewski, *Sur les courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan*, Annales de la Société Polonaise des Mathématiques, 1924, t. II, p. 49.

[3]) Ce théorème est dû à M. R. L. Moore. *Concerning the cut-points of continuous curves and... etc.*, Proceedings of the Nat. Acad. 1923. Vol. 9, p. 102.

[4]) en vertu du théorème de M. Wilder (*Concerning continuous curves*, Fund. Math. t. VII, p. 358, th. 7) que l'on peut énoncer ainsi:

Pour qu'un point d'une dendrite bornée ne la divise pas, il faut et il suffit qu'il soit une extrémité d'un arc simple saturé dans elle.

Cet énoncé peut être étendu aux dendrites non bornées, en y ajoutant les mots *„ou d'un rayon topologique saturé"* tinu situé dans $N+D$, K est un continu de Jordan[1]) et contient par conséquent un arc simple[2]); admettons donc que K soit lui-même un arc simple.

Or, N contient dans ce cas une infinité non-dénombrable de points de K, donc à plus forte raison, des points intérieurs de K. Mais c'est impossible, car aucun de tels points ne peut servir d'extrémité à un arc simple saturé dans C.

En effet, $p \subset K \cdot L$ désignant un point intérieur de K qui est une extrémité de l'arc simple saturé $L \subset C$ on a: 1^0 ou bien $K \cdot L$ est connexe et dans ce cas $K+L$ contient un arc simple plus grand que L, donc ce dernier ne serait pas saturé; 2^0 ou bien $K \cdot L$ n'est pas connexe entre deux points p et q. $K_1 \subset K$ et $L_1 \subset L$ désignant dans ce cas les arcs simples a extrémités communes p et q, le continu $K_1+L_1 \subset C$ contiendrait une courbe simple fermée et C ne serait pas une dendrite.

La condition est suffisante. Supposons, en effet, que C ne soit pas une dendrite, ou, ce qui revient au même, que C contienne une courbe simple fermée J ou un continu de convergence K (d'après le lemme 3).

Or, l'ensemble $J \cdot \tau(C)$ étant d'après le corollaire du th. 9 et l'ensemble $K \cdot \tau(C)$ étant d'après celui du th. 8 au plus dénombrable, si on l'ajoute à l'ensemble $\tau'(C)$, ce dernier cessera d'être ponctiforme, puisque on a les identités:

$$J \subset \tau'(C) + J \cdot \tau(C) \quad \text{et} \quad K \subset \tau'(C) + K \cdot \tau(C).$$

Ainsi l'ensemble $\tau'(C)$ n'était pas ponctiforme au sens stricte, contrairement à l'hypothèse, c. q. f. d.

Nous avons démontré en même temps le suivant

Corollaire. *Aucune dendrite ne contient de continus de convergence.*

Comme application du théorème précédent considérons les cas où l'ensemble $\tau'(C)$ est respectivement:

1^0 vide

2^0 composé d'un seul point

3^0 composé de deux points

4^0 composé de tous les points de C.

[1]) S. Mazurkiewicz. *Un théorème sur les lignes de* Jordan Fund. Math. II, 1921 p. 123.

[2]) S. Mazurkiewicz, *Sur les lignes de* Jordan, Fund. Math. t. I, 1920, p. 201.

$\tau'(C)$ étant dans les trois premiers cas ponctiforme au sens stricte, on conclut que C est une dendrite, ce qui permet de démontrer d'une façon assez simple le théorème suivant:

Théorème 11. *Suivant que C est irréductible par rapport à la condition 1^0, 2^0 ou 3^0, C est respectivement:*

a) une droite topologique

b) un rayon

c) un arc simple.

Démonstration: Ad 1^0 En vertu du th. de M. Mazurkiewicz[1]) C est non-borné. C^* étant une image de C obtenue par l'inversion de centre v *non-*$\subset C$, C^*+v est un continu de Jordan[2]).

Si C^*+v était une dendrite, l'ensemble $\tau'(C^*+v)$ serait composé, en vertu de théorème precité de M. Mazurkiewicz, d'au moins deux points: p et q et l'arc simple $A \subset C^*+v$ ayant, ces points pour extrémités serait saturé dans C.

Selon que l'on a $v \subset A$ ou non, l'image de A dans C serait composée de (un ou deux) rayons, ou d'un arc simple, saturés dans C.

En désignant par L un quelquonque de ces derniers et par l un point qui en est extrémité on aurait donc $l \subset \tau'(C)$, contrairement a 1^0.

Ainsi C^*+v contient une courbe simple fermée B, dont l'image dans C (parsuite de l'invariance par rapport à l'opération de l'inversion) serait également une courbe simple fermée, si B ne passait pas par v. C étant une dendrite, on a donc $v \subset B$ et par conséquent l'image B^* de B dans C est une droite topologique. B^* satisfaisant donc à la condition 1^0 et C étant irréductible par rapport à cette propriété, on a $C=B^*$, c. q. f. d.

Ad 2^0. En vertu du même th. de M. Mazurkiewicz C est non-borné. Soit $p=\tau'(C)$.

[1]) S. Mazurkiewicz. *Un théorème sur les lignes de* Jordan Fund. Math. II, 1921, p. 119.

[2]) B. Knaster et C. Kuratowski. *Sur les continus non-bornés* Fund. Math. V, p. 25.

Tout point d'un continu jordanien non-borné C étant l'extrémité d'un rayon topologique $R\,(\subset C$[1]$)$, et par conséquent, ne divisant pas R, on a $C=R$ par l'hypothèse que C est irréductible par rapport à la propriété 2^0.

Ad 3^0. Soit $p+q=\tau'(C)$. C étant une dendrite, il existe dans C un arc simple A à extrémités p et q. A remplisant la condition 3^0, et C étant par hypothèse irréductible par rapport à cette condition, on a $C=A$, c. q. f. d.

Quant à la propriété 4^0, on a la proposition suivante:

Si C est un continu de Jordan irréductible par rapport à 4^0, C est une courbe simple fermée.

En effet, la propriété 4^0 implique en vertu du th. 10, que C n'est pas une dendrite. C contient donc une courbe simple fermée et, par suite, coïncide avec elle, puisque toute courbe simple fermée jouit de la propriété 4^0, par rapport à laquelle C a été supposé irréductible.

Passons aux continus de J o r d a n non-dendritiques, c'est-à-dire contenant un nombre fini ou une infinité de courbes simples fermées.

Lemme 12. *Si la somme d'un continu de J o r d a n C ne contenant qu'un nombre fini de courbes simples fermées et d'une dendrite D telle que le produit $C\cdot D$ est b o r n é, en contient une infinité, il y en a qui sont de diamètre aussi petit que l'on veut.*

Démonstration: Deux cas peuvent se présenter:

1^0 $C\cdot D$ n'admet qu'un nombre fini de constituants. Comme une infinité de courbes simples fermées de $C+D$ a par hypothèse des points communs avec $C-D$ et avec $D-C$, il existe une suite infinie de courbes simples fermées $B_1, B_2, \dots B_n, \dots$ telle que $B_n-C\neq 0$ pour tout $n>0$. Tout constituant de B_n-C est un arc simple sans extremités (comme sous-ensemble ouvert et connexe d'une courbe simple fermée), ces dernières étant situées toujours sur des constituant différents du produit $C\cdot D$.

En effet, P désignant un constituant de $C\cdot D$, supposons que les extrémités p_n et q_n d'un constituant A_n de B_n-C soient situées sur P.

[1]) C. K u r a t o w s k i. *Quelques propriétés topologiques de la demi-droite,* Fund. Math. III, p. 61.

Le continu $P\subset D$ contenant, comme sous-continu d'une dendrite, un arc simple L à extrémités p_n et q_n, la somme A_n+L serait une courbe simple fermée située dans la dendrite D.

Comme $C\cdot D$ ne contient par hypothèse qu'un nombre fini de couples de constituants et tous deux points situés sur eux ne se laissent relier dans D (cet ensemble étant une dendrite) que par *un seul* arc simple, l'ensemble de tous les constituants de B_n-C, pris pour toutes les valeurs de $n>0$ à la fois, de-même que celui de leurs extrémités, est f i n i, et il existe un n_0 tel que l'égalité

$$B_{n_0}-C=B_{n_i}-C \tag{20}$$

se présente pour une infinité de valeurs de i ($i=1,2,3,\dots$).

La suite infinie des courbes $\{B_n\}$ étant supposées distinctes deux à deux, il en résulte que l'ensemble des constituants des produits $B_{n_i}\cdot C$ pour $i=1,2\dots$ en contient une infinité qui sont différents l'un de l'autre. Or, les constituants de $B_{n_i}\cdot C$ ($i=1,2,\dots$) étant des arcs simples (qui peuvent se réduire à un point) et l'ensemble de leurs extrémités coïncidant en vertu de (20) avec celui des extrémités des constituants de $B_{n_i}-C$, qui est f i n i, l'ensemble

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_{n_i}\cdot C \tag{21}$$

contient une infinité d'arcs simples coextrémaux différents et par conséquent[1]) une infinité de courbes simples fermées, contrairement à l'hypothèse.

2^0 L'ensemble $C\cdot D$ admet une infinité de constituants. Soit $P_1, P_2, P_3, \dots P_n, \dots$ une suite convergente de ces derniers; une telle suite existe en vertu du th. 1.

On a donc, $C\cdot D$ étant b o r n é,

$$\lim \rho(P_n, P_{n+1})=0. \tag{22}$$

C et D étant des continus jordaniens, il existe pour tout $\varepsilon>0$ un $\lambda>0$ tel que tous deux points x et y de C où $\rho(x,y)<\lambda$ se laissent relier dans D par un arc simple H[2]) tel que

[1]) comme il résulte du lemme de M. M a z u r k i e w i c z (Voir: *Un théorème sur les lignes de* J o r d a n, Fund. Math., t. II, p. 122).

[2]) S. M a z u r k i e w i c z. *Sur les lignes de Jordan,* Fund. Math. I, p. 205, cor. III.

$$\delta(H) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{23}$$

et que tous deux points z et t de D où $\rho(z, t) < \lambda$ se laissent relier dans D par un arc simple K tel que

$$\delta(K) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{24}$$

En vertu de (22), il existe un entier n et deux points $p_n \subset P_n$ et $p_{n+1} \subset P_{n+1}$ tels que $\rho(p_n, p_{n+1}) < \lambda$. Il existe donc dans C un arc H et dans D un arc K ayant ces points pour extrémités et satisfaisant aux inégalités (23) et (24). Comme par hypothèse $C \cdot D$ n'est pas connexe et $H \subset C$, on a $H - D \neq 0$ d'où $H - K \neq 0$; on a de-même par raison de symétrie: $K - H \neq 0$. Les arcs H et K étant en outre coextrémaux, la somme $H + K$ contient donc une courbe simple fermée B[1]) et l'on a en vertu de (23) et (24)

$$\delta(B) \leqslant \delta(H) + \delta(K) < \varepsilon,$$

c. q. f. d.

Corollaire. *Si un continu de* J o r d a n *C est borné et renferme une infinité de courbes simples fermées, il y en a qui sont de diamètre aussi petit que l'on veut.*

Comme continu de J o r d a n, C est, en effet, une image *uniformément* continue du segment $[0, 1]$, de sorte qu'il existe pour tout $\varepsilon > o$ un $\lambda > o$ tel que $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ désignant les points de subdivision finie de ce segment où

$$x_0 = 0, \; x_k = 1 \;\; et \;\; x_i - x_{i-1} < \lambda \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

toute partie D_i de C qui est l'image d'un segment $[x_{i-1}, x_i]$ est un continu de J o r d a n et on a: $\delta(D_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ *et* $C = \sum_{i-1}^{k} D_i$.

Supposons que les diametres des courbes C dépassent un $\varepsilon > 0$.

Aucun D_i ne contenant donc de courbes simples fermées à cause de son diamêtre trop petit, tout D_i est une dendrite. Posons d'une façon générale $C_i = \sum_{j=1}^{i} D_j$ où $1 \leqslant i \leqslant k$.

C contenant par hypothèse une infinité de courbes simples fermées, il existe un entier $i\,(1 \leqslant i \leqslant k)$ tel que C_{i-1} contient encore un nombre fini (ou aucune) de ces courbes, tandis que $C_{i-1} + D_i$ en contient déja une infinité.

[1]) En vertu du lemme precité de M. M a z u r k i e w i c z.

Or, $C_{i-1} \subset C$ étant par hypothèse b o r n é, si l'on pose dans le lemme 12: $C = C_{i-1}$ et $D = D_i$, la somme $C_{i-1} + D_i$ contient en vertu de ce lemme des courbes simples fermées de diamêtre aussi petit que l'on veut.

Lemme 13. *Tout continu de* J o r d a n *qui renferme une infinité de courbes simples fermées contient une suite infinie $\{B_n\}$ de courbes simples fermées telles que l'on a pour tout $n > 0$:*

$$B_n - \overline{\sum_{i \neq n} B_i} \neq 0. \tag{25}$$

Démonstration. Admettons d'abord que C soit b o r n é. Nous allons extraire la suite $\{B_n\}$ en question d'une suite auxiliaire qui sera définie par recurrence de façon que les conditions suivantes soient réalisées pour tout $k > 1$:

(26) $S_k = \sum_{i=1}^{k} B_i$ *ne renferme qu'un nombre fini de courbes simples fermées*

$$B_{k+1} - S_k \neq 0 \tag{27}$$

$$\delta(B_{k+1}) < \frac{1}{3}\,\delta(W_k), \tag{28}$$

l'ensemble W_k étant un constituant de $B_k - S_{k-1}$, fixé pour tout $k > 0$.

Soient données notamment k courbes simples fermées $B_1, B_2, \dots, B_k$ situées dans C et satisfaisant pour tout $1 < i < k$ aux conditions (26) — (28). En vertu du corollaire du lemme 12 et de (26) le continu C renferme par hypothèse une courbe simple fermée B telle que $B - S_k \neq 0$ et $\delta(B) < \frac{1}{3}\,\delta(W_k)$. En vertu de (26) on montre d'autre part que

(29) S_k *est une somme d'un nombre fini d'arcs simples n'ayant deux à deux que, tout au plus, un nombre fini de points communs.*

Or, si l'ensemble $S_k + B$ satisfait également à la condition (26), on n'a qu'à poser: $B_{k+1} = B$ pour que la courbe B_{k+1} ainsi définie remplisse les conditions (26) — (28). On désignera alors par W_{k+1} un constituant arbitraire de $B_{k+1} - S_k$.

Admettons donc, que, S_k+B contienne une infinité de courbes simples fermées. L'ensemble $B\cdot S_k$ ne se réduisant dans ce cas à un point, tout constituant de $B-S_k$ (comme sous-ensemble ouvert connexe de la courbe simple fermée) est un arc simple sans extrémités, le nombre de ces constituants est infini et leurs extrémités sont situées dans S_k. Parmi les constituants de S_k il existe donc, en raison de (29), au moins un qui contient *les deux extrémités* d'une infinité de constituants de $B-S_k$.

Soit, en effet, D un constituant de S_k et $\{A_j\}, j>0$ une suite infinie de constituants de $B-S_k$ à extrémités $p_j\subset D$ et $q_j\subset S_k-D$. Les ensembles D et S_k-D étant disjoints et, en vertu de (26), fermés, on a $\rho(D, S_k-D)=\alpha>0$, d'où $\delta(A_j)\geqslant\alpha$ pour tout $j>0$. Comme la suite $\{A_j\}$ peut être supposée convergente en vertu du théorème 1, on aurait $\delta(\lim\limits_{j=\infty} A_j)=\lim\limits_{j=\infty}\delta(A_j)\geqslant\alpha$, ce qui est impossible, toute suite convergente d'intervalles disjoints $\{A_j\}$ donnés sur une courbe simple fermée n'admettant qu'un seul point-limite.

Soit donc D un constituant de S_k et $\{A_j\}$ une suite infinie (supposée convergente en vertu du théorème 1) de constituants de $B-S_k$ à extrémités $p_j\subset D$ et $q_j\subset D$ pour tout $j>0$. En vertu de (29) il existe un arc simple $L_1\subset D$ contenant une infinité I de points p_j et un arc simple $L_2\subset D$ contenant une infinité de points q_j tels que $p_j\subset I$.

Nous avons ainsi obtenu une somme de deux arcs simples

$$M=L_1+L_2\subset D$$

contenant *les deux extrémités* d'une suite infinie convergente de constituants de $B-S_k$, extraite de $\{A_j\}$. Comme B est une courbe simple fermée, on a:

$$\lim_{j=\infty}\delta(A_j)=\lim_{j=\infty}\rho(p_j, q_j)=0, \tag{30}$$

d'où, en posant $a=\lim\limits_{j=\infty}(A_j)$, on tire $a\subset L_1\cdot L_2$ et, L_1 et L_2 étant des arcs simples:

$$\lim_{j=\infty}\rho_M(p_j, a)=\lim_{j=\infty}\rho_M(q_j, a)=0.$$

Il en résulte que

$$\lim_{j=\infty}\rho_M(p_j, q_j)=0. \tag{31}$$

Or, les égalités (30) et (31) impliquent l'existence d'un entier j_0 tel que

$$\delta(A_{j_0})<\frac{1}{6}\delta(W_k)>\rho_M(p_{j_0}, q_{j_0}). \tag{32}$$

Il existe par conséquent dans M un arc simple L à extrémités p_{j_0} et q_{j_0} tel que

$$\delta(L)\leqslant\rho_M(p_{j_0}, q_{j_0})<\frac{1}{6}\delta(W_k) \tag{33}$$

Posons donc dans le cas considéré $B_{k+1}=A_{j_0}+L$. Comme

$$(p_{j_0}+q_{j_0})\subset\bar{A}_{j_0}\cdot L\subset\bar{A}_{j_0}\cdot D\subset\bar{A}_{j_0}\cdot S_k,$$

l'ensemble B_{k+1} ainsi défini est une courbe simple fermée; en même temps on a d'une part:

$$\bar{A}_{j_0}\cdot S_k=(p_{j_0}+q_{j_0})$$

et d'autre part

$$B_{k+1}-S_k=A_{j_0} \tag{34}$$

d'où
$$S_{k+1}=S_k+A_{j_0}=S_k+\bar{A}_{j_0},$$

de sorte que S_{k+1}, comme somme d'un nombre fini d'arcs simples n'ayant deux à deux qu'un nombre fini de points communs, remplit aussi la condition (26)

En outre, d'après (34) B_{k+1} remplit en même temps la condition (27) et, comme les inégalités (32) et (33) impliquent que

$$\delta(B_{k+1})\leqslant\delta(A_{j_0})+\delta(L)<\frac{1}{3}\delta(W_k),$$

la condition (28) se trouve également réalisée. Enfin l'ensemble $B_{k+1}-S_k$ n'admettant dans ce cas, d'après (34), qu'un seul constituant A_{j_0}, on posera $W_{k+1}=A_{j_0}$.

La suite infinie $\{B_k\}\subset C$ qui satisfasse aux conditions (26)—(28) étant ainsi définie, soit $B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_n}, \ldots$ une suite convergente qu'elle contient d'après le théorème 1. Posons: $B_n = B_{k_n}$.

Je dis que la suite $\{B_n\}$ obtenue de la sorte satisfait à l'inégalité (25).

En tenant compte de (28), on a, en effet, pour tout $n > 0$ l'idéntité suivante:

$$B_n - \overline{\sum_{i \neq n} B_i} = (B_n - S_{n-1}) - \overline{\sum_{i=n+1}^{\infty} B_i} = (B_n - S_{n-1}) - \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} B_i + p\right)$$

où $p = \underset{n=\infty}{Lim} \{B_n\}$.

Comme $W_n \subset B_n - S_{n-1}$, le membre droit de cette identité contient l'ensemble $W_n - \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} B_i + p\right)$, qui n'est pas vide, car, en vertu de (28), on a: $\sum_{i=n+1}^{\infty} \delta(B_i) \leqslant \frac{1}{2}\delta(W_n)$.

Il en résulte que le membre gauche n'est pas vide non plus, ce qui donne l'inégalité (25).

Ceci établi, passons au cas où C est non-borné. Deux alternatives sont à envisager:

1^0 Pour tout sous-continu borné Q de C, l'ensemble $C - Q$ contient une courbe simple fermée. Dans ce cas on peut construire par induction une suite infinie de courbes simples fermées (disjointes) $\{B_n\}$ telles que l'on ait pout tout $n > 0$: $B_n \cdot \overline{\sum_{i \neq n} B_i} = 0$. L'inégalité (25) sera donc remplie à plus forte raison.

Etant donnés, en effet, un continu borné quelconque $Q_n \subset C$, où $\sum_{i=1}^{n-1} B_i \subset Q_n$, et une courbe simple fermée $B_n \subset C - Q_n$, soit $Q_{n+1} \subset C$ un continu borné quelconque tel que $B_n + Q_n \subset Q_{n+1}$. Un tel sous-continu de C existe en raison de l'hypothèse que C est jordanien. Tous deux points d'un continu jordanien (borné ou non) s'y laissant relier par un arc simple[1]), soit $L_n \subset C$ un arc simple quelconque reliant un point de B_n à un point de Q_n. En désignant alors par R_n un sphéroïde m-dimensionnel ayant l'origine comme centre et contenant le continu $B_n + L_n + Q_n$, on peut appeler Q_{n+1} celui des constituants de l'ensemble $C \cdot R_n$ qui contient Q_n.

La suite $\{B_n\}$ ainsi définie satisfaisant à l'inclusion: $B_n \subset R_n - R_{n-1}$, on a $B_n \cdot \overline{\sum_{i \neq n} B_i} = 0$, c. q. f. d.

[1]) S. Mazurkiewicz, *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. I, p. 201.

2^0 Il existe un tel sous-continu borné Q de C que $C - Q$ ne contient aucune courbe simple fermée. Je vais démontrer que C contient dans ce cas des courbes simples fermées de diamêtre aussi petit que l'on veut, ce qui suffit, comme on a vu, pour qu'il soit possible d'appliquer à C le procédé de construction de la suite $\{B_n\}$ assujettie à la condition (25) qui a été employé dans le cas de C borné.

Entourons à ce but le continu Q d'un intérieur R de sphéroïde m-dimensionnel et désignons par K le constituant de $C \cdot R$ contenant Q. Considérons le continu $\overline{K}$ et l'ensemble fermé $C - K$.

Or, étant donné un $\varepsilon > 0$ quelconque, il n'y a dans $C - K$ qu'un nombre fini de constituants de diamètre $> \varepsilon$.

En effet, dans le cas contraire, une suite infinie $\{A_j\}, j = 1, 2, \ldots$ de ces constituants contiendrait une suite de points $p_j \subset A_j$ telle que l'on aurait pour un certain $\alpha > 0$: $\rho(p_j, \overline{K}) \geqslant \alpha$. Les constituants d'un ensemble étant par définition disjoints deux à deux, tout continu $L_j \subset C$ reliant p_j à p_{j+1} traverserait $\overline{K}$, d'où $\delta(L_j) \geqslant \alpha$. On aurait donc pour $p = \lim_{j=\infty} p_j$ l'inégalité $\sigma_C(p) \geqslant \alpha$, contrairement à l'hypothèse que C est un continu de Jordan.

Il en résulte que:

(*i*) *la somme S de tous les constituants bornés de $C - K$ est un ensemble borné*

et

(*ii*) *la suite*

$$D_1, D_2, \ldots, D_k$$

des constituants non-bornés de $C - K$ est finie.

Or, si le continu $\overline{K + S}$, qui est borné en vertu de (*i*) contenait une infinité de courbes simples fermées, il en contiendrait de diamètre aussi petit que l'on veut d'après le corollaire du lemme 12.

Si, au contraire, $\overline{K+S}$ ne contient qu'un nombre fini de courbes simples fermées, on conclut de (*ii*) qu'il existe un i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ tel que $C_{i-1} = \overline{K+S} + D_1 + \cdots + D_{i-1}$ n'en contient encore qu'un nombre fini, tandis que $C_i = \overline{K+S} + D_1 + \cdots + D_{i+1} + D_i$ contient déjà une infinité de ces courbes. Comme $D_i \subset C - K \subset C - Q$ ne contient par hypothèse aucune courbe simple fermée, tout D_i est une d e n d r i t e et comme $D_i \cdot C_{i-1} \subset \overline{K}$ (puisque les termes de la suite (*ii*) sont disjoints comme constituants d'un même ensemble, tout produit $C_{i-1} \cdot D_i$ est b o r n é. Les conditions du lemme 12 étant ainsi réalisées, il en résulte par un raisonnement analogue à celui du corollaire de ce lemme que les diamètre des courbes simples fermées situées dans C tend vers 0, c. q. f. d.

Théorème 14. *Étant donnée une suite de courbes simples fermeés $\{B_n\}$ situées dans un continu jordanien C est satisfaisant à l'inégalité $B_n - \overline{\sum_{i \neq 1} B_i} \neq 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, alors C contient une suite de points $\{b_r\}$ où*

$$b_n \subset B_n - \overline{\sum_{i \neq n} B_i} \tag{35}$$

dont l'ensemble ne coupe pas C.

Démonstration. Posons

$$D_n = B_n - \overline{\sum_{i \neq n} B_i} \tag{36}$$

et considérons un arc simple arbitraire $L_n \subset D_n$.

L_n peut être obtenu comme suit: p désignant un point de D_n et U_p un sphéroïde m-dimensionnel de centre p et de rayon

$$min: \frac{1}{2}\rho(p, \overline{\sum_{i \neq 1} B_i}), \frac{1}{2}\delta(B_n),$$

soit L_n le c o n s t i t u a n t de p dans $B_n \cdot U_p$. On a donc $L_n \subset D_n$; en même temps L_n est un arc simple, comme v r a i sous-continu de la courbe simple fermée B.

Soit F_n l'ensemble des points de ramification [1]) de C satisfaisant aux conditions:

(*i*) $p \subset L_n$

(*ii*) p est l'extrémité d'un arc simple $K_p \subset C - L_n + p$ pour lequel il existe un entourage U_p du point p qui ne contient aucun arc simple $M \subset C$ à extrémités $L_n \cdot M$ et $K_p \cdot M$.

Ceci posé soit b_n un point arbitraire de $L_n - F_n$ et G l'ensemble de points b_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Je vais prouver d'abord que l'ensemble $G \cdot B_n = b_n$ n'est pas vide, quel que soit n, ou, ce qui revient au même, que $L_n - F_n \neq 0$. Cela résulte de ce que pour tout arc simple L_n l'ensemble F_n est au plus dénombrable.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. En désignant alors d'une façon générale par U_p un sphéroïde m-dimensionnel (satisfaisant à la cond. (*ii*)) de centre p et de rayon r_p, par U'_p le sphéroïde concentrique de rayon $r_p = \frac{1}{2} r_p$, il existe un point $p_o \subset L_n$ tel, que U'_{p_o} contient une infinité *non*-dénombrable de points p; il existe de-même un k naturel tel que les inégalités $r_p > \frac{1}{k}$ et $\delta(K_p) > \frac{1}{k}$ se présentent pour une infinité *non*-dénombrable de ces points.

On a par définition de U_p pour tous deux points $p_1 \neq p_2$ de $L_n \cdot U'_{p_o}$:

$$U'_{p_o} \subset U_{p_o} \cdot U_{p_1} \cdot U_{p_2} \tag{37}$$

Soit maintenant K'_p le constituant de $K_p \cdot U'_{p_o} \cdot U'_p$ qui contient p; on a alors l'égalité

$$K'_{p_1} \cdot K'_{p_2} = 0 \tag{38}$$

pour tous $p_1 \neq p_2$, puisque, en cas contraire, il serait possible de passer de $K'_{p_1} \subset K_{p_1}$ à $p_2 \subset L_n$ sans toucher p_1, notamment mo-

[1]) On appelle *point de ramification* d'un ensemble E tout point p qui est extrémité commune d'au moins trois arcs simples L_1, L_2, L_3, où $L_1 + L_2 + L_3 \subset E$ et $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_3 = L_3 \cdot L_1 = p$.

yennant un $M \subset K'_{p_2} + K'_{p_1}$ situé dans U'_{p_0}, donc d'après (37) dans U_{p_1}, contrairement à la définition de K_{p_1} (condition (*ii*)).

En vertu de (38) parmi l'infinité *non*-dénombrable d'arcs $\overline{K'_p}$ situés dans $\overline{U'_{p_0}}$ il existe, selon le th. 2, un qui en est le continu de convergence K.

Etant donné alors un points arbitraire $a \subset K - L_n$ et un sphéroïde U_a de centre a et de rayon $< \rho(a, L_n)$, il n'existe en vertu de (37) aucun sous-continu de $C \cdot U_a$ contenant à la fois a et des points quelconques des continus $\overline{K'_p}$, qui convergent vers K. Le point a possèderait donc une oscillation > 0 contrairement à l'hypothèse que C est un continu de Jordan. Ainsi l'ensemble F_n est tout au plus dénombrable.

On a par définition de b_n:

$$b_n \subset L_n - F_n \subset L_n \subset D_n,$$

ce qui prouve en vertu de (36) que l'inclusion (35) est réalisée.

Il reste donc à démontrer que l'ensemble G des points b_n ne coupe pas C, c'est-à-dire que tous deux points p et q de $C - G$ se laissent relier par un continu Q, où

$$(p+q) \subset Q \subset C - G. \tag{39}$$

Considérons à cet effet un arc simple arbitraire $A \subset C$ à extrémités p et q[1]. Si $A \cdot G = 0$, il suffit de poser $Q = A$. Dans le cas contraire, nous allons définir le continu Q à l'aide d'une suite d'arcs simples $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ reliant p à q, où $A_1 = A$ et $A_k (k > 1)$ sera donné par recurrence.

Désignons notamment d'une façon générale par b_{n_k} le premier des points de la suite $G = \{b_n\}$ qui sont situés sur A_k (s'il y en a) et par p_k et q_k respectivement le premier et le dernier point de l'ensemble $A_k \cdot B_{n_k}$ supposé ordonné sur A_k de p à q.

Adoptons enfin la notation suivante: étant donnés deux points arbitraires x et y sur A_k, désignons par $A_k(x, y)$ l'arc simple contenu dans A_k et ayant ces points pour extrémités;

[1]) C étant un continu de Jordan, un tel arc existe toujours en vertu du théorème de M. Mazurkiewicz (l. c., p. 201).

étant donnés deux points x et y sur B_{n_k}, nous désignerons par $B_k(x, y)$ la différence entre B_{n_k} et l'arc simple à extrémités x et y qui est contenu dans B_{n_k} et passe par b_{n_k}. Comme on a par définition $G \cdot B_n = b_n$, il vient, quels que soient x et y:

$$G \cdot B_k(x, y) = 0. \tag{40}$$

Ceci dit, les cas suivants peuvent se présenter:

1⁰ $A_k \cdot G = 0$. Posons alors: $A_{k+1} = A_k$.

2⁰ $p_k \neq b_{n_k} \neq q_k$. Posons dans ce cas:

$$A_{k+1} = A_k(p, p_k) + B_k(p_k, q_k) + A_k(q_k, q).$$

3⁰ $p_k = b_{n_k} \neq q_k$. Le point b_{n_k} est par conséquent un point de ramification de C. Comme d'autre part on a par définition: $b_{n_k} \subset L_{n_k} - F_{n_k}$, tout entourage U_k de b_{n_k} contient d'après *non*-(*ii*) un arc $M \subset C$ à extrémités $x = M \cdot A_k(p, p_k)$ et $y = M \cdot L_{n_k}$. Soit donc U_k le sphéroïde m-dimensionnel de centre b_{n_k} et de rayon $< \rho(b_{n_k}, \overline{\sum_{i \neq n_k} B_i})$; comme $M \subset U_k$, on aura alors:

$$G \cdot M = 0. \tag{41}$$

Soit dans le cas considéré:

$$A_{k+1} = A_k(p, x) + M + B_k(y, q_k) + A_k(q_k, q).$$

4⁰ $p_k \neq b_{n_k} = q_k$. Ce cas étant symétrique au précédent, on posera, en assignant à N, z et t les significations respectivement symétriques à celles de M, x et y:

$$A_{k+1} = A_k(p, p_k) + B_k(p_k, z) + N + A_k(t, q),$$

où

$$G \cdot N = 0. \tag{42}$$

5⁰ $p_k = b_{n_k} = q_k$. Soit alors:

$$A_{k+1} = A_k(p, x) + M + B_k(y, z) + N + A_k(t, q).$$

La suite $\{A_k\}$ étant ainsi définie, remarquons aussitôt que pour tout $k \geqslant 1$:

(43) A_k *est* par définition *un arc simple de C ayant les extrémités aux points p et q,*

$$A_{k+1} \subset A_k + B_{n_k} - b_{n_k} \tag{44}$$

et

$$A_{k+1} \cdot G \subset A_k \cdot G - b_{n_k} \tag{45}$$

en vertu de (26) — (28). Il en résulte que

$$G \cdot \prod_{k=1}^{\infty} A_k = 0. \tag{46}$$

Ceci établi, je définis Q par l'égalité:

$$Q = \prod_{k=1}^{\infty} \overline{\sum_{i=k}^{\infty} A_i}. \tag{47}$$

En vertu de (43) l'ensemble Q est un continu (comme produit d'une suite décroissante de continus contenant p et q) et on a:

$$(p+q) \subset Q \subset C. \tag{48}$$

D'autre part, tout b_{n_k} cessant d'appartenir selon (44) à $\sum_{i=k+1}^{\infty} A_i \subset A_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{\infty} B_{n_i}$ et par conséquent n'apartenant pas, selon (35), à $\overline{\sum_{i=k+1}^{\infty} A_i}$, aucun point b_{n_k} n'est situé dans Q. En vertu de (35) et (46) il en est de-même des autres points de G, car on peut écrire d'après (44) et (47):

$$Q \subset \prod_{k=1}^{\infty} A_k + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} B_{n_k}}.$$

Ainsi $G \cdot Q = 0$ ce qui donne en vertu de (48) la formule (39), c. q. f. d.

On aperçoit aisément que lorsque la suite $\{A_k\}$ et finie (cas 1⁰; on a alors: $Q = A_k$) ou bien lorsque les diamètres d'arcs simples $A_{k+1} \cdot B_{n_k}$ convergent vers O, le continu Q est lui-même un arc simple.

Or, il n'en est pas toujours nécessairement ainsi. L'exemple suivant[1]), qui est un continu de Jordan, permet de réaliser le cas des suites $\{B_n\}$ et $\{b_n\}$ assujetties aux conditions (25) et (35) où l'ensemble $C - G$ contient un couple de points p, q tels que tout continu remplissant la formule (39) est non-jordanien.

Soit, en effet, C le continu de Jordan composé de contour du carré à sommets opposés

$$p = (0, 0) \qquad q = (1, 1),$$

de tous les segments $x = 2^{-k}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ et de tous les segments

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^k}, \qquad y = \frac{a}{2^k},$$

où $k = 1, 2, 3, \ldots$ et a prend toutes les valeurs impaires comprises entre 0 et 2^k (voir fig. 1).

Considérons comme B_n, pour tout $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, le contour du rectangle à sommets opposés

$$\left(\frac{1}{2^{k+1}}, 0\right) \text{ et } \left(\frac{1}{2^k}, \frac{n+1-2^k}{2^k}\right) \text{ pour } k \text{ pairs,}$$

$$\left(\frac{1}{2^{k+1}}, 1\right) \text{ et } \left(\frac{1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-n-1}{2^k}\right) \text{ pour } k \text{ impairs.}$$

On constate alors que la suite $\{B_n\}$ satisfait à la formule (25) et que, $G = \{b_n\}$ désignant un ensemble quelconque assujetti à la condition (35), on a $(p+q) \subset C - G$. Or, tout continu Q unissant ces points dans $C - G$ est non-jordanien (s'il est irréductible entre p et q, il est homéomorphe au continu composé de la courbe $\sin \frac{\pi}{x} (0 < x \leqslant 2)$ et de son continu de condensation $x = 0, -1 \leqslant y \leqslant +1$).

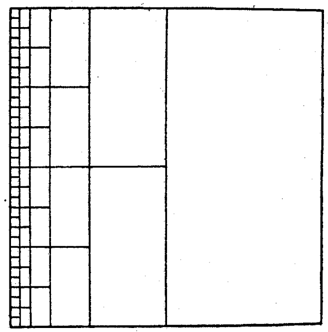

Fig. 1.

[1]) Je dois cet exemple à M. Knaster.

Comme le choix de tout point b_n peut être effectué sur l'arc L_η d'une infinité de manières et le procédé reste le même, lorsque la suite $\{B_n\}$ est composée d'un nombre fini quelconque d'éléments, le lemme 13 et le théorème 14 donnent le corollaire suivant:

Corollaire. *Tout continu de Jordan qui renferme un ensemble de puissance n de courbes simples fermées (n pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3,... et $\aleph_0$) contient une infinité d'ensembles différents dont chacun se compose exactement de n points et dont aucun, de-même qu'aucun de ses sous-ensembles, ne divise C.*

On peut se demander si dans le théorème 14 la condition (25) ne puisse être remplacée par la suivante

$$B_n - \sum_{i \neq n}{}' B_i \neq 0 \tag{49}$$

(sans le signe de la *fermeture*). Or l'exemple suivant, qui nous sera d'ailleurs encore utile dans la suite, montre que la réponse est négative.

Étant donnée sur le plan une circonférence R de rayon ρ, désignons par $f(R)$ l'ensemble composé:

1⁰ de deux circonférences de rayon $\frac{1}{4}\rho$ tangentes intérieurement à R aux points $(\rho, 0)$ et (ρ, π).

2⁰ de toutes les circonférences tangentes à R aux points $\left(\rho, \frac{2\pi(2k-1)}{2^n}\right)$ où $0 < k < 2^{n-1}$, $n \geqslant 2$, — tout cela en supposant l'origine de coordonnées polaires située au centre de R et l'axe polaire parallèle à une droite fixe donnée d'avance.

Toutes les circonférences de $f(R)$, abstraction faite de R, sont ainsi disjointes, situées à l'extérieur l'une de l'autre et satisfont à l'égalité:

$$R - \overline{f(R)} = 0. \tag{50}$$

Étant donné ensuite un ensemble E quelconque, désignons par $f(E)$ la somme de tous les ensembles $f(R)$, où R est une circonférence contenue dans E, s'il y en a.

Posons

$$E_1 = \text{circonférence oú } \rho = 1$$
$$E_i = f(E_{i-1}) \text{ pour tout } i > 1$$
$$\mathcal{E} = \sum_{i=n}^{\infty} E_i$$

(voir fig. 2).

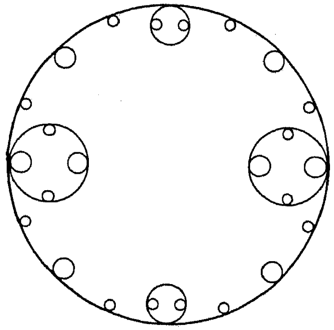

Fig. 2.

L'exemple $\mathcal{E}$ ainsi defini est un continu de Jordan et, B_n désignant la suite infinie de toutes les circonférences situées sur lui, la condition (25) n'est pas remplie à cause de (50), bien que la condition (49) soit satisfaite, l'ensemble $B_n - \sum_{i \neq n} B_i$ étant composé de tous les points de B_n à argument non-dyadique; on voit même que cet ensemble est dense dans B_n.

Or, $B_n - \sum_{i \neq n} B_i$ étant en conséquence ponctiforme, il n'est pas possible d'appliquer à $\mathcal{E}$ le procédé du th. 14, bien que toutes deux circonférences de $\mathcal{E}$ n'aient tout au plus qu'un point commun.

Cependant $\mathcal{E}$ contient un ensemble infini de points qui ne le divisent pas, car en vertu du lemme 13, $\mathcal{E}$ renferme une suite infinie de circonférences satisfaisant à la condition (25).

§ 4. Sur les couples de points de division dans les continus.

Nous allons examiner maintenant, en nous appuyant sur les théorèmes qui précèdent, comment se comportent les continus au point de vue de *couples de points* qui les divisent, ce qui conduit à une classification rappelant celle du § 3 (p. 142). Considérons notamment les continus C où l'ensemble des couples qui ne divisent pas C est respectivement:

(*I*) vide

(*II*) composé d'un seul couple [1]).

[1]) Quant aux classes des continus où cet ensemble se compose de deux et de tous les couples (conditions correspondant à 3⁰ et 4⁰ de la page 142), la première est vide et la seconde, étant très hétérogène, exigerait une étude spéciale et plus détaillée. En particulier, les deux problèmes suivants ne sont peut-être sans intérêt:

Théorème 15. *Si on ajoute à la condition (I) une quelconque des conditions suivantes:*
(*a*) *C est borné*
(*b*) *C est irréductible par rapport à (I)*
(*c*) *aucun point de C ne divise C,*
alors C est une courbe simple fermée.

Démonstration: Ad (*a*). Ce théorème a été établi par M. R. L. Moore[1]).

Ad (*b*). Par suite du théorème précité, on peut se borner au cas où C serait non-borné. D'après le corollaire du th. 8, C ne contient aucun continu de convergence. Or, tout continu de Jordan non-borné contenant un rayon[2]) et tout rayon étant réductible par rapport à (*I*), puisqu'il contient un rayon plus petit, C serait donc également réductible par rapport à (*I*) contrairement à (*b*).

Ad (*c*). Pour les mêmes raisons que je viens de citer *ad* (*b*) la démonstration se réduit au cas où C est un continu de Jordan non-borné. Or, par hypothèse C n'est pas une dendrite, car en cas contraire on aurait $\tau(C)\neq 0$, contrairement à (*c*).

C contient par conséquent une courbe simple fermée B et il s'agit de montrer que $C-B=0$. En vertu du corollaire du th. 14, C ne contient aucune courbe simple fermée différente de B, car en cas contraire il existerait sur C un couple de points qui ne divise pas C, contrairement à (*I*). Ainsi, en supposant que $C-B\neq 0$, et A désignant un constituant de $C-B$, l'ensemble $\overline{A}$ serait une dendrite et l'ensemble $\overline{A}\cdot B=\overline{A}\cdot(C-A)$ se reduirait à un point qui, par conséquent, divise C entre tous deux points $p\subset A$ et $q\subset B$, contrairement à l'hypothèse (*c*).

Théorème 16. *Tout continu borné C qui satisfait à la condition (II) est un arc simple.*

Est-il vrai que tout continu de Jordan tel qu'aucun couple de ses points ne le divise 1° est réductible par rapport à cette propriété et 2° contient une infinité de courbes simples fermées?

[1]) Bull. of the American Math. Soc. Volume XXXIX. 1923, p. 300.
[2]) C. Kuratowski, *Quelques propriétés topologiques de la demi-droite*, Fund. Math. III, p. 61.

Démonstration. D'après la condition (*II*) et en vertu du corollaire du th. 8, C ne contient aucun continu de convergence. C est donc un continu de Jordan.

La condition (*II*) implique en outre, selon le corollaire du th. 14, qu'il ne peut exister dans C plus d'une courbe simple fermée, car en cas contraire il y aurait une infinité de manières de choisir dans le continu C un couple de points ne le divisant pas, contrairement à (*II*).

Or, supposons que C contienne une seule courbe simple fermée B. On a donc $C-B\neq 0$, car en cas contraire tout couple de points de C diviserait ce continu, contrairement à (*II*). En désignant par A un constituant de $C-B$, on a $A\neq 0$, $\overline{A}$ est une dendrite et l'ensemble $\overline{A}\cdot B=\overline{A}\cdot C-A$ se reduit à un point qui divise C.

Soit maintenant p, q le couple de points de C, donnés par la condition (*II*). L'ensemble $C-(p+q)$ est donc connexe.

On a $p\neq\overline{A}\cdot B\neq q$, car $\overline{A}\cdot B$ divisant C, il en serait à plus forte raison de-même de $(p+q)$. Etant donné un point quelconque $x\subset\tau(\overline{A})$, on a de-même $p\neq x\neq q$, puisque, en posant dans le corollaire du th. 6: $C_1=\overline{A}$ et $C_2=C-A$, x divise C et il en serait donc à plus forte raison de-même de $(p+q)$. Enfin il ne peut y être $(p+q)\subset B$, car L_1 et L_2 désignant respectivement les deux arcs de B à extrémités p et q et A_1 et A_2 les sommes des constituants de $C-B$ ayant leurs points limites respectivement sur L_1 et L_2, on aurait d'aprés ce qui précède la décomposition de C en deux ensembles fermés: $C=(A_1+L_1)+$ $+(A_2+L_2)$ et $(A_1+L_1)\cdot(A_2+L_2)=(p+q)$, de sorte que $(p+q)$ diviserait C, contrairement à l'hypothèse.

Il ne reste donc qu'à admettre qu'un au moins des points p et q, soit p, appartient à $\tau'(\overline{A})-B$, où A désigne celui des constituants de $C-B$, qui renferme p. Ce point est par conséquent une extrémité d'un arc simple S, saturé dans $\overline{A}$[1]). Or, ceci implique que C contienne une infinité de couples de points qui ne le divisent pas, contrairement à (*II*).

[1]) en vertu d'un théorème de M. Wilder, *Concerning continuous curves*, Fund. Math. VII, p. 358.

Soit, en effet, q un point arbitraire de $(B-\bar{A})\cdot\tau'(C)$. Une infinité de tels points existe, en effet, d'après le corollaire du th. 9. Etant donnés alors deux points quelconques x et y de $C-(p+q)$ et un arc simple $L\subset C-q$ à extrémités x et y, le point p ne pourrait être situé sur $L-(x+y)$, sinon S ne serait pas un arc saturé dans $\bar{A}$. On a donc $L\subset C-(p+q)$.

Ainsi il est impossible que C contienne une courbe simple fermée. C est par conséquent une dendrite et comme par hypothèse $(p+q)\subset\tau'(C)$, l'arc $A\subset C$ à extrémités p et q est, d'après le théorème précité de M. Wilder, *saturé* dans C. Il s'agit de montrer que $C=A$.

Supposons que $C-A\neq 0$ et soit $x\subset C-A$. Le continu C étant borné, le point x est situé également sur un arc saturé L. On a donc $L\neq A$, et comme C ne contient aucune courbe simple fermée, une au moins des extrémités de L est distincte de p et de q. Cette extrémité appartenant à $\tau'(C)$ (comme extrémité d'un arc saturé d'une dendrite) et aucun sous-ensemble de $\tau'(C)$ ne divisant C[1]), ce continu contiendrait donc au moins trois couples distincts de points qui ne le divisent pas, contrairement à (II).

La propriété d'un continu de ne pas être divisé par un couple de points entaînant, comme je l'ai signalé au début de cette Note, celle de contenir un sous-ensemble connexe qui le divise, l'étude des couples de points ne divisant pas les continus peut être envisagée aussi à un autre point de vue.

On sait que tout ensemble connexe C qui n'est pas biconnexe[2]) contient un sous-ensemble connexe S qui ne le divise pas. En effet, $C-S$ contenant dans ce cas une composante T qui ne se réduit pas à un point, $C-T$ est connexe[8]). T est

[1]) en vertu de th. de M. R. L. Moore, *Concerning the cut-points of continuous curves...* Proceedings of the Nation. Acad. vol. 9 (1923) p. 104. Ce théorème n'a été démontré que pour les dendrites planes; or, sa généralisation est immédiate en vertu du th. de M. Ważewski, d'après lequel *toute dendrite est homéomorphe d'une dendrite plane* (lot. cit.).

[2]) L'ensemble C est dit biconnexe, s'il n'est pas somme de deux ensembles connexes sans points communs.

[8]) En vertu du th. X de B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. II, p. 214.

donc un ensemble connexe qui ne divise pas C. Il en résulte, en particulier, que *tout continu contient un ensemble connexe qui ne le divise pas.* Le problème s'impose si tout continu contient aussi un *continu* ne le divisant pas.

Or, on peut en donner une solution partielle: on sait notamment que pour les continus de Jordan la réponse est affirmative.

C étant en effet un continu de Jordan, soient K un arc simple divisant C et R une composante de $C-K$. Posons $T=C-R$. Alors T ne divise pas C[1]) et T est un continu[2]).

§ 5. La structure de l'ensemble des points de division dans les ensembles connexes et les continus.

Théorème 17. *C étant un continu de* Jordan, *l'ensemble des points qui divisent C est un F_σ (c'est-à-dire somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés).*

Démonstration. Soit $D\subset C$ un ensemble dénombrable dense dans C.

Je dis que si $a\subset\tau(C)$, il existe dans D un couple de points x et y tels que a divise C entre x et y. Soient, en effet, p et q deux points entre lesquels a divise C et U_p et U_q leurs entourages de diamètres respectifs

$$\delta(U_p)<\frac{1}{2}\rho(a,p) \text{ et } \delta(U_q)<\frac{1}{2}\rho(a,q).$$

C étant jordanien et D étant dense dans C, il existe un point $x\subset D\cdot U_p$ reliable à p par un continu $P\subset C\cdot U_p$ et un point $y\subset D\cdot U_q$ reliable à q par un continu $Q\subset C\cdot U_q$.

Si, par conséquent a ne divisait pas C entre x et y, le continu $P+L+Q$, où $L\subset C-a$ est un continu unissant x et y, contiendrait à la fois p et q, contrairement à l'hypothèse que a divise C entre ces points.

Ainsi, l'ensemble $\tau(C)$ est identique à celui des points qui divisent C entre les points de D.

[1]) Voir note [8]) page 162.

[2]) Voir C. Kuratowski, *Contribution à l'étude des continus de* Jordan, Fund. Math., V, p. 113, II.

Or, $S(p, q)$ désignant l'ensemble des points qui ne divisent pas C entre p et q de D, tout point $a \subset S(p, q)$ est un point intérieur de $S(p, q)$ par rapport à C.

En effet, $C - a$ contenant un continu M qui unit p à q, tout entourage U_a de diamètre $\delta(U_a) < \rho(a, M)$ contient exclusivement les points de $S(p, q)$, puisque M unit p à q sans passer par U_a. L'ensemble $S(p, q)$ est par conséquent un ensemble ouvert dans C, donc un G_δ de l'espace considéré; il restera G_δ, si on lui ajoute les deux points p et q.

Comme on a évidemment:

$$\tau'(C) = \prod_{p, q \subset D} [S(p, q) + p + q],$$

où l'ensemble des couples $(p, q) \subset D$ est dénombrable par définition de D, l'ensemble $\tau'(C)$ est également un G_δ, donc l'ensemble $\tau(C) = C - \tau'(C)$ est un F_σ, c. q. f. d.

La question s'impose si le théorème qui précède ne peut être étendu aux continus non-jordaniens. L'exemple suivant montre que la réponse est négative.

Étant donné sur le segment $(0, 1)$ de l'axe x l'ensemble parfait non-dense de Cantor N_1, désignons d'une façon générale par N_k pour tout k naturel, la somme d'ensembles semblables à N_1 situés dans les intervalles contigus à l'ensemble $\sum_{l=1}^{l=k-1} N_l$.

N désignant le continu non jordanien composé de segment $(0, 1)$ de l'axe des x et de somme de tous les segments rectilignes $x = a$, $0 \leqslant y \leqslant 3^{-k}$ pour tout $a \subset N_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, l'ensemble $\tau(N)$ se réduit à l'ensemble de points du segment $(0, 1)$ de l'axe des x qui n'appartiennent pas à $\sum_{k=1}^{\infty} N_k$. L'ensemble $\tau(N)$ est donc homéomorphe à celui de tous les nombres irrationels; il est donc un G_δ qui n'est pas F_σ et, parsuite $\tau'(N)$ est un F_σ qui n'est pas G_δ. De sorte que le problème de la classe (B) pour les ensembles $\tau(C)$ et $\tau'(C)$ dans le continu C quelconque reste ouvert.

Il est à remarquer que ette question n'est pas liée à la propriété de $\tau(C)$ et de $\tau'(C)$ d'être ponctiforme. En effet, dans l'exemple $\mathfrak{G}$ du § 3 (p. 159) les ensembles $\tau'(\mathfrak{G})$ et $\tau(\mathfrak{G})$ sont ponctiformes tous les deux, sans qu'ils cessent satisfaire au théorème 17, le continu $\mathfrak{G}$ étant jordanien.

Théorème 18. *Tout continu K composé de points de division d'un ensemble connexe C (borné ou non) est une dendrite telle que l'ensemble $\tau'(K)$ est clairsemé*[1].

Démonstration. Etant donné un continu $K \subset \tau(C)$, l'ensemble $K \cdot \tau(C) \cdot \tau'(K) = \tau'(K)$ est d'après le th. 9 dénombrable, donc ponctiforme au sens stricte. K est par conséquent une dendrite en vertu du th. 10. K étant ainsi un continu jordanien, l'ensemble $\tau'(K)$ est un G_δ en vertu du th. 17, puisque l'ensemble $\tau(K) = K - \tau'(K)$ est un F_σ; or tout ensemble G_δ dénombrable est clairsemé, c. q. f. d.

Appelons *dendrite incomplète* la différence $D - E$ où $E \subset \tau'(D)$. En particulier, toute dendrite D peut donc être regardée comme une dendrite incomplète où $E = 0$.

Il est aisé de voir que *toute dendrite non-bornée est homéomorphe d'une dendrite incomplète (mais non réciproquement)*.

Etant donné, en effet, une dendrite non-bornée D et un point v *non*-$\subset D$, l'ensemble D^* des points $x^*\left(\frac{1}{\rho} + 1, \omega\right)$, où $x = (\rho, \omega) \subset D$ et v est pris comme origine des coordonnées polaires, est une dendrite incomplète. D'autre part, il n'existe aucune dendrite homéomorphe par exemple à la dendrite D composée de segment $(0, 0)$, $(1, 0)$ et de points

$$x = \frac{1}{n}, \quad 0 < y < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Or, on peut montrer que la condition suffisante pour l'existence d'une dendrite homéomorphe à une dendrite incomplète $D - E$ est que E soit fermé. Il suffit, en effet, de remplacer tout point p à coordonnées $(x, y, 0)$ d'une dendrite plane homéomorphe à D[2]) par un point p' à coordonnées (x', y', z') où $x' = x$, $y = y'$ et $z' = \dfrac{1}{\rho(p, E)}$.

Il est à remarquer enfin que l'on a toujours:

$$\tau(D - E) = \tau(\overline{D - E}) = \tau(D) \text{ d'où}$$
$$\tau'(\overline{D}) = \tau'(D) + (\overline{D} - D). \tag{1}$$

[1]) L'ensemble est dit clairsemé, s'il ne contient aucun sous-ensemble dense en soi.

[2]) Une telle dendrite existe toujours en vertu du th. de M. Ważewski.

Nous allons donner à présent une condition suffisante pour qu'un ensemble soit $\tau(C)$, C étant connexe (borné ou non).

J'aurai recours à la propriété des points des continus 1-dimensionnels d'être accessibles[1]) par les continus.

(2) *Dans le plan, tout point d'une dendrite est accessible.*

En effet, toute dendrite D bornée constitue la frontière de la seule région-composante de son complémentaire et, comme telle, elle en est accessible dans chacun de ces points[2]).

Si D est non-borné et p désigne un point arbitraire de D, entourons p d'un cercle R. Chaque composante du produit $D \cdot R$ est donc une dendrite bornée; soit P la composante contenant le point p.

Ce point étant donc accessible par un arc simple A tel que $AP = p$, posons $d = \rho(p, D - P)$. On a $d > 0$ car, en cas contraire, P contiendrait un continu de convergence d'une suite des continus unissants les points $q_1, q_2, \ldots q_n, \ldots$, qui tendent vers p, dans leurs composantes respectives $Q_1, Q_2, \ldots Q_n, \ldots$ avec les ensembles $Q_1 \cdot F(R), \ldots. Q_n \cdot F(R), \ldots.$ Or D étant une dendrite, c'est impossible en vertu du corollaire du th. 10. Soit donc R_1 un cercle de centre p et de rayon $< d$. La composante A_1 de $A \cdot R_1$ qui contient p remplit la condition $A_1 \cdot P = A_1 \cdot D = p$, c. q. f. d.

(3) *Dans l'espace à $m \geqslant 3$ dimensions tous les points d'un continu 1-dimensionnel[3]) sont accessibles.*

Soient en effet $p \subset C$, $R_1, R_2, \ldots R_n, \ldots.$ la suite de sphères de rayons $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots.)$ et de centre p et $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ une suite de points tels que $p_n \subset R_n - C$, de sorte que $p = \lim p_n$. Or, aucun ensemble fermé 1-dimensionnel ne divisant l'intérieur d'une sphère[4]), il existe dans tout $R_n - D$ un arc simple A_n

[1]) Un point p d'un ensemble P est dit accessible par un ensemble Q dans un ensemble E lorsque $P \cdot Q = p$ et $Q - p \subset E - P$.

[2]) En vertu du th. de M. Schönflies concernant les frontières jordaniennes.

[3]) Au sens de M. P. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*, Fund. Math. VII, p. 65.

[4]) l. c., p. 135.

à extrémités p_n et p_{n+1}. Comme $\lim \delta(R_n) = 0$ et $A_n \subset R_n$, on a $\lim \delta(A_n) = 0$, d'où l'ensemble $A = \sum_{n+1}^{\infty} A_n + p$ est un continu et $A \cdot C = p$, puisque $A - p \subset R_1 - C$.

Théorème 19. *Pour toute dendrite incomplète D telle que $\tau'(D)$ est clairsemé, il existe un continu C tel que $\overline{D} = \tau(C)$.*

Démonstration. L'ensemble $\overline{D}$ étant une dendrite par hypothèse, on a en vertu de (1): $\tau'(\overline{D}) = \tau'(D) + (\overline{D} - D)$. Dans le cas où $\tau'(D) = 0$, on peut poser évidemment $C = \overline{D}$, car aucun point $p \subset \overline{D} - D$ ne divise $\overline{D}$ et en même temps tout point $q \subset D$ divise $\overline{D}$.

Si $\tau'(D) \neq 0$ nous allons augmenter le continu D de façon à en obtenir un continu C tel que $\overline{D} - D \subset \tau'(C)$, mais $\tau'(D) \subset \tau(C)$. Nous allons notamment ajouter à $\overline{D}$ une infinité de courbes simples fermées B disjointes deux à deux et dont chacune n'aura en commun avec D qu'un point de $\tau'(D)$, qui deviendra ainsi le point divisant C entre B et $D - B$, donc un point de $\tau(C)$.

Soit en effet

$$\tau'(D) = \sum_{\xi=1}^{\alpha} A_\xi \quad \text{où } \alpha < \Omega$$

le développement de l'ensemble clairesemé $\tau'(D)$ en série transfinie dénombrable d'adhérences[1]), c'est-a-dire d'ensembles disjoints et isolés.

Etant donnés les ensembles $E_1, E_2, \ldots. E_\mu$ pour tout $1 \leqslant \mu < \xi$ où $\xi < \alpha$ qui remplissent les conditions suivantes:

(4) tout E_μ est somme d'une suite de courbes simples fermées $B_1^\mu, B_2^\mu, \ldots. B_n^\mu, \ldots.$ disjointes

(5) toute courbe B_n^μ est disjointe de celles des ensembles E_λ où $\lambda < \mu$

(6) $B_n^\mu \cdot D = p_n^\mu$ où $p_n^\mu \subset A_\mu$

[1]) „Adhärenzen". Voir F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 278.

$$(7)\quad \delta(B_n^\mu) < \frac{1}{3^n}\rho\left(p_n^\mu,\ \sum_{j=1}^{n-1} B_j^\mu + \sum_{\lambda=\mu+1}^{\xi} A_\lambda\right)$$

(8) Si la dendrite D est plane, toute B_n^μ est situé à l'extérieur de B_i^λ $(i \neq n, \lambda \neq \mu)$,
je vais définir l'ensemble E_ξ de façon qu'il remplisse également ces conditions.

Posons $G_\xi = \overline{D} + \sum_{\substack{i>1\\ \mu<\xi}} B_i^\mu$; il est à remarquer d'abord que tout point $p_i^\xi \subset \overline{D}$ est accessible du complèmentaire de G_ξ.

En effet, G_ξ est en vertu de (6) et (7) fermé, donc un continu. Son nombre de dimensions étant 1 [1]), chacun de ses points est accessible dans l'espace à $m>2$ dimensions en vertu de (3). La démonstration se réduit donc au cas où G_ξ est situé dans un plan P.

Soit R une région-composante de $P-\overline{D}$ et $F(R)$ sa frontière; en désignant par I_i^μ l'intérieur de la courbe B_i^μ l'ensemble $I_\xi = \sum_{\substack{i>1\\ \mu<\xi}} \overline{I_i^\mu}$ est fermé dans R, car tout $\overline{I_i^\mu}$ qui est situé dans $\overline{R}$ a, en vertu de (6), un point commun avec $F(R)$ et les diamètres des ensembles $\overline{I_i^\mu}$ tendent, en vertu de (7), vers zéro. De plus, tout $\overline{I_{i_1}^{\mu_1}}$ étant selon (5) disjoint de tout $\overline{I_{i_2}^{\mu_2}}$ où $i_1 \neq i_2$ ou bien $\mu_1 \neq \mu_2$, chaque $\overline{I_i^\mu} - p_i^\mu$ forme une composante de l'ensemble I_ξ fermé dans R.

Or comme $\overline{I_i^\mu} \cdot F(R) = p_i^\mu$ et $\overline{I_i^\mu}$ ne coupe pas le plan, aucune composante de I_ξ ne coupe la région R[2]). Il en résulte que l'ensemble I_ξ lui-même ne la coupe non plus [3]).

Ainsi $R - I_\xi$ est une région du plan et sa frontière $F(R-I_\xi) \subset G_\xi$ est en vertu th. 4 un continu de J o r d a n, car elle ne contient aucun continu de convergence à cause de (7); on en conclut que tout point de $F(R-I_\xi)$ est

[1]) Parce que tout point de G_ξ étant situé sur $\overline{D}$ ou bien sur une certaine B_i^μ, peut être ε-separé au sens de M. U r y s o h n (*Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*, Fund. Math. VII, p. 65) à l'aide d'un ensemble composé d'un nombre fini de points.

[2]) En vertu du th. de M. S t r a s z e w i c z, *Über die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen*, Fund. Math. VII, p. 164.

[3]) F. H a u s d o r f f, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 343.

accessible de $R - I_\xi$. Comme en vertu de (6) on a $F(R) \subset F(R-I_\xi)$, tout point de D est situé en vertu de (2) sur la frontière $F(R)$ d'une composante R de $P-D$; tout point de D est donc accessible d'un $R - I_\xi$. Il en résulte *que tout point de G_ξ est accessible de $P - G_\xi$*.

Il est facile de voir que tout point accessible par un continu, l'est également par une courbe simple fermée de diamètre aussi petit que l'on veut [1]).

On en déduit que pour tout point de p_i^ξ de A_ξ il existe une courbe simple fermée B_i^ξ satisfaisant aux condition (4)—(8).

En effet, B_i^ξ pouvant être aussi petite que l'on veut, on la prendra de diamètre qui remplisse l'inégalité (7). N'ayant avec D que le point p_i^ξ en commun, elle réalise la condition (6) et tout point de l'ensemble A_ξ étant isolé de $A_\xi - x + \sum_{\lambda=\mu+1}^{\xi} A_\lambda$, la courbe B_i^ξ est disjointe de $\sum_{j\neq i} B_j^\xi$ ce qui réalise les conditions (4) et (5).

Enfin, étant située par définition dans $R - \sum_{\mu<\xi} I_i^\mu$, où R est une région-composante de $P - G_\xi$, la courbe B_i^μ satisfait à la condition (8).

La suite B_i^ξ $(i = 1, 2, \ldots)$, et partant l'ensemble E_ξ est ainsi défini. Il en est donc de-même de la suite $\{E_\xi\}$ où $1 \leqslant \xi \leqslant \alpha$, qui satisfait donc aux conditions (4) — (8).

Ceci établi, posons

$$C = \overline{D} + \sum_{\substack{i\geqslant 1\\ \mu\leqslant\alpha}} B_i^\mu;$$

tous les points-limites de $\sum B_i^\mu$ étant situés dans D d'après (7), l'ensemble C est fermé, donc est un continu.

Soit $p \subset \tau(D)$; on a en vertu de (1) et du th. 6: $\overline{D} = A_p + B_p$ où $A_p - p$ et $B_p - p$ sont séparés; en posant $A_p^* = A_p + \sum B_i^\xi$ pour les indices ξ et i pour lesquels $p_i^\xi \subset A_p$, et $B_p^* = B_p + \sum B_j^\eta$ pour les autres indices η et j, on obtient la décomposition

[1]) J'omets ici la démonstration de cette proposition, qui se déduit facilement de celle de M. K n a s t e r et K u r a t o w s k i, *Sur les ensembles non-bornés*, Fund. Math. V, p. 38.

de C: $C = A_p^* + B_p^*$ en deux ensembles separés, en vertu de (4), (5) et (7), abstraction faite du point p, ce qui prouve que $p \subset \tau(C)$. On a donc

$$\tau(D) \subset \tau(C). \tag{9}$$

Pour le point $p^{\xi}_{l} \subset \tau'(D)$, on a d'après l'identité $C = B^{\xi}_{l} + (C - B^{\xi}_{l})$:

$$\tau'(D) \subset \tau(C); \tag{10}$$

Les inclusion (9) et (10) donnent:

$$D \subset \tau(C). \tag{11}$$

Soit $p \subset C$ et p *non*-$\subset D$. Si $p \subset \bar{D} - D$, l'ensemble $\bar{D} - p$ est connexe et, à plus forte raison, l'ensemble $C - p$ est connexe, donc

$$p \subset \tau'(C); \tag{12}$$

dans le cas contraire, il existe une courbe B^{ξ}_{l} telle que $p \subset B^{\xi}_{l}$, car tous les points-limites de l'ensemble ΣB^{ξ}_{l} sont situés dans D en vertu de (7) et (6). Le point p étant contenu dans $\tau'(B^{\xi}_{l})$ et les continus B^{ξ}_{l} et $(C - B^{\xi}_{l} + p^{\xi}_{l})$ n'ayant que le point p^{ξ}_{l} en commun, on en conclut d'après le corollaire du th. 6 que l'inclusion (12) est également satisfaite.

Nous avons donc démontré que $C - D \subset \tau'(C) = C - \tau(C)$ d'où

$$D \supset \tau(C) \tag{13}$$

Les inclusions (11) et (13) impliquent que $D = \tau(C)$ c. q. f. d.

Les théorèmes 18 et 19 donnent le

Corollaire. *Pour qu'un continu K soit $K = \tau(C)$ où C est un continu, il faut et il suffit que K soit une dendrite telle que $\tau'(K)$ est clairsemé.*

Théorème 20. *L'ensemble $\tau(C)$, où C est un ensemble connexe arbitraire, ne contient qu'une infinité au plus dénombrable de continus disjoints qui ne se reduisent pas à un point.*

Démonstration. Supposons qu'il n'en est pas ainsi, et soit F la famille indénombrable des continus disjoints situés dans $\tau(C)$. En vertu du th. 2 la famille F contient un continu M qui est un continu de convergence; d'après le corollaire du th. 8 l'ensemble $M \cdot \tau(C)$, qui est égal à M, est au plus dénombrable — contrairement à l'hypothèse que M est un continu.

Corollaire. *L'ensemble $\tau(C)$ possède tout au plus une infinité dénombrable de constituants qui ne se reduisent pas à un point.*

Théorème 21. *C étant un continu borné, si tout point de N est un point de division de C, alors l'ensemble N divise C.*

Démonstration. Soit $N \subset \tau(C)$ et s un point arbitraire de N. Il sagit de prouver que $C - N$ n'est pas connexe. $C = A_s + B_s$ étant une décomposition (1) — (4) [1]) relative au point s, on a en effet $C - N = (A_s - N) + (B_s - N)$; or, je dis que cette identité représente une décomposition de $C - N$ en deux ensembles non-vides et séparés.

D'après le th. 11 le continu A_s contient en tout cas un point $a \neq s$ qui ne divise pas A_s. Il en résulte, en posant dans le corollaire du th. 6: $C_1 = A_s$ et $C_2 = B_s$, que $a \subset \tau'(C)$, d'où selon $N \subset \tau(C)$: $a \subset A_s - N$ et par conséquent $A_s - N \neq 0$. On a par raison de symétrie $B_s - N \neq 0$. D'autre part, comme $s \subset N$ on a: $A_s - N \subset A_s - s$ et $B_s - N \subset B_s - s$. Les membres droits de cette inclusion étant en vertu de (2) — (4) (page 136) s é p a r é s, il en est de-même à plus forte raison de leurs sous-ensembles $A_s - N$ et $B_s - N$, c. q. f. d.

[1]) Voir th. 6, p. 136.