Nous concluons de là que l'ensemble de tous les points ξ ainsi déterminés

$$(\Xi) \qquad \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\omega, \ldots, \xi_\alpha, \ldots\ldots | \Omega$$

a la puissance du continu, puisque la famille des ensembles π de mesure non nulle a, bien entendu, la puissance du continu. Nous désignons par Ξ l'ensemble de ces points ξ.

Je dis que *l'ensemble Ξ est de première catégorie par rapport à chaque ensemble parfait π.* En effet, soit π un ensemble parfait quelconque contenu dans [0,1]. Il est clair que π est un π_γ bien déterminé, γ étant un nombre fini ou transfini. De la définition même de l'ensemble Ξ il suit que chaque point ξ_α qui appartient à π, quel quel soit α supérieur à γ, est un point de σ_γ. Donc, la partie de Ξ contenue dans π est formée d'une partie de σ_γ et d'une infinité dénombrable de points eventuels ξ_β dont les indices β sont tous inférieurs à γ. Donc, la partie commune à π et à Ξ est de première catégorie par rapport à π.

Je dis maintenant que *l'ensemble Ξ est un ensemble non mesurable.* En effet, l'ensemble Ξ a sûrement un point dans chacun des ensembles parfaits π de mesure *non nulle.* Donc, Ξ ne peut pas avoir la mesure extérieure distincte de 1. Or la mesure intérieure de Ξ est nulle, puisque, dans le cas contraire, Ξ contient un ensemble parfait ce qui est précisément impossible parce que Ξ est de première catégorie par rapport à *chaque* ensemble parfait.

Ainsi, *l'ensemble Ξ étant de première catégorie par rapport à chaque ensemble parfait, il possède sûrement la propriété de M. René Baire et est, en même temps, non mesurable.*

Moscou, le 18 juillet 1926.

Beispiel eines nirgends separablen metrischen Raumes.

Von

Paul Urysohn. †

1. Ein metrischer Raum R heisst separabel im Punkte ξ, falls es eine Umgebung $S(\xi, \varepsilon)$ dieses Punktes gibt, in der eine höchstens abzählbare Menge dicht ist. In vorliegendem Aufsatz wird ein metrischer Raum E konstruiert, der in keinem seiner Punkte separabel ist.[1])

2. Wir fangen mit folgenden elementaren Überlegungen an.

Es sei R irgendein metrischer Raum; wir bezeichnen durch $F(R)$ den folgendermassen entstehenden metrischen Raum:

I. Die Punkte ξ von $F(R)$ sind die Tripel

$$\xi = (x, \varphi, r),$$

wobei x ein beliebiger Punkt von R, φ eine nur durch die Ungleichung $0 \leqq \varphi < 2\pi$ eingeschränkte und r eine beliebige nicht negative reelle Zahl ist.[2]). Dabei werden alle Punkte

$$\xi = (x, \varphi, 0)$$

untereinander und mit den Punkten x des ursprünglichen Raumes R identifiziert (sodass R zur Teilmenge von $F(R)$ wird).

[1]) dicht = überalldicht in $S(\xi, \varepsilon)$; $S(\xi, \varepsilon)$ bezeichnet dabei eine sphärische Umgebung, d. h. die Menge aller Punkte x des Raumes R, deren Entfernung $\rho(\xi, x)$ vom Punkte ξ, weniger als ε beträgt.

[2]) die Ungleichung $0 \leqq \varphi < 2\pi$ ist nur Anschaulichkeitshalber eingeführt; man könnte mit demselben Erfolge für φ beliebige reelle Werte zulassen.

II. Die Entfernungen $\rho(\xi_1, \xi_2)$ werden wie folgt definiert:

a) Falls $\xi_1 = (x_1, \varphi_1, r_1)$ und $\xi_2 = (x_2, \varphi_2, r_2)$ gesetzt ist und gleichzeitig $x_1 = x_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$, so ist ρ definitionsgemäss

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = |r_1 - r_2|$$

b) Falls (a) nicht zutrifft, so setzen wir

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \rho(x_1, x_2) + r_1 + r_2.$$

3. Eine elementare Fallunterscheidung zeigt unmittelbar, dass $F(R)$ ein metrischer Raum ist.

Wir betrachten nun den aus einem einzigen Punkte a bestehenden metrischen Raum R_0 und setzen alsdann für jedes $n \geqq 1$

$$R_n = F(R_{n-1})$$

Es ist

$$R_0 \subset R_1 \subset \cdots \subset R_n \subset \cdots$$

Der Raum $R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n$ ist als *metrischer* Raum eindeutig definiert (da jedes Punktepaar $x \neq y$ von R bereits in einem R_n enthalten, also $\rho(x, y)$ bestimmt ist und die Entfernungen der Punkte in einem R_n auch im Raume R_{n+1} erhalten bleiben).

Es sei nun

$$\xi = (a; \varphi_1, r_1; \varphi_2, r_2; \ldots; \varphi_n, r_n)$$

irgend ein Punkt des Raumes R und ε eine beliebige positive Zahl. Alle Punkte

$$\xi_\varphi = \left(a; \varphi_1, r_1; \varphi_2, r_2; \ldots; \varphi_n, r_n; \varphi, \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

haben paarweise voneinander die Entfernung $2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$; dagegen ist stets $\rho(\xi, \xi_\varphi) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Die Menge aller Punkte ξ_φ bildet demgemäss eine in der sphärischen Umgebung $S(\xi, \varepsilon)$ enthaltene isolierte Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. In $S(\xi, \varepsilon)$ kann infolgedessen keine abzählbare Menge dicht sein und, da ε und ξ beliebig gewählt waren, ist R nirgends separabel, w. z. b. w.

4. Der Raum R besitzt manche interessante Eigenschaften. So lässt sich z. B. jedes Punktepaar mittels einer „Strecke" verbinden, welche einer gewöhnlichen Strecke (von der passenden Länge) *kongruent* ist (d. h. es existiert zwischen beiden Strecken eine eineindeutige (isomorphe) Abbildung).

Man könnte auch leicht folgende *Homogenitätseigenschaft* des Raumes R nachweisen:

Wenn x und y zwei beliebige Punkte des Raumes R sind, so existiert stets eine isometrische Abbildung von R auf sich selbst, die x in y überführt.