Sur une question concernant la propriété de M. Baire

Par

Nicolas Lusin (Moscou).

(Extrait d'une lettre adressée à M. W. Sierpiński).

Vous me demandez mon opinion sur la question suivante:

Tout ensemble de points qui possède la propriété de M. René Baire[1]*) doit-il être nécessairement mesurable?*

La voici.

Oui, puisque je ne crois nullement à l'existence d'ensembles non-mesurables. Quand j'entends parler d'une loi définissant *un* ensemble „sans propriété de M. René Baire" ou bien „non mesurable" *etc.* je suis très méfiant, parce que je n'ai jamais encore vu de pareilles lois. Mais ce n'est qu'une affaire de routine et, à la réflexion, je vois déjà des difficultés aussi graves, à mon avis, dans les raisonnements où interviennent des ensembles non mesurables *B:* on ne sait pas s'il est possible de nommer un ensemble non mesurable *B* défini d'une manière *positive*[2]) et sans faire intervenir, explicitement ou *implicitement,* la notion du transfini. Ainsi, je crois que *tout* ensemble de points *réellement défini* est nécessairement mesurable et, peut-être, toujours même mesurable *B*.

[1]) Il s'agit de la propriété d'ensembles *E* de points que voici: quel que soit un ensemble parfait π, il existe une *portion* π_1 de π telle que ou bien *E*, ou bien son complémentaire *CE* soit de première catégorie par rapport á π_1.

D'après le théorème de MM. René Baire et Henri Lebesgue tout ensemble mesurable *B* possède cette propriété.

[2]) Le transfini est parfois profondément caché sous la forme des définitions *finies,* mais négatives: tel est, par exemple, le cas des ensembles *projectifs.*

Non, si nous abandonnons le terrain des réalités mathématiques pour celui des déductions logiques purement verbales. Croyons donc, pour l'instant, à ce que quand nous prononçons le mot „transfini", il y a là, outre l'onde sonore, quelque réalité accessible et faisons „l'hypothèse du continu", c'est-à-dire supposons *tous* les points x du segment [0,1] numérotés au moyen des nombres transfinis de seconde classe:

(1) $$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\omega, \ldots, x_\alpha, \ldots\ldots \mid \Omega$$

Comme la famille de tous les ensembles parfaits contenus dans [0,1] a la puisance du continu, nous pouvons les supposer numérotés de la même façon:

(2) $$\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\omega, \ldots, \pi_\alpha, \ldots\ldots \mid \Omega,$$

où nous désignons par π_0 le segment total [0,1].

Faisons correspondre à chaque ensemble parfait π_α une somme σ_α bien déterminée d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits π contenus dans π_α et non denses dans cet ensemble de manière que la mesure de σ_α soit toujours égale à celle de π_α. On voit bien que l'ensemble de points σ_α, est *de première catégorie par rapport à* π_α; donc, l'ensemble complémentaire de σ_α, c'est-à-dire l'ensemble des points de π_α qui ne figurent pas dans σ_α est un ensemble *résiduel* (Arnaud Denjoy) de mesure *nulle;* nous le désignerons par E_α.

Cela posé, définissons la loi suivante:

1^0 nous prenons, dans la suite transfinie (1), le premier point ξ_0 qui appartient à l'ensemble σ_0;

2^0 les points $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\beta, \ldots$ étant définis quel que soit β inférieur à σ, nous désignons par ξ_α le premier point (s'il existe), dans la suite transfinie (1), qui appartient à σ_α sans appartenir à aucun des ensembles résiduels E_β, $\beta < \alpha$, et qui diffère des point déjà déterminés ξ_β.

Il est manifeste que si l'ensemble π_α a une mesure *non nulle,* il y a sûrement un point ξ_α, puisque, dans ce cas, l'ensemble π_α a une mesure *positive* et la réunion des ensembles résiduels E_β, $\beta < \alpha$, chacun desquels a la mesure nulle, est de-même un ensemble de mesure nulle.

Nous concluons de là que l'ensemble de tous les points ξ ainsi déterminés

$$(\Xi) \qquad \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\omega, \ldots, \xi_\alpha, \ldots \ldots | \Omega$$

a la puissance du continu, puisque la famille des ensembles π de mesure non nulle a, bien entendu, la puissance du continu. Nous désignons par Ξ l'ensemble de ces points ξ.

Je dis que *l'ensemble* Ξ *est de première catégorie par rapport à chaque ensemble parfait* π. En effet, soit π un ensemble parfait quelconque contenu dans [0,1]. Il est clair que π est un π_γ bien déterminé, γ étant un nombre fini ou transfini. De la définition même de l'ensemble Ξ il suit que chaque point ξ_α qui appartient à π, quel quel soit α supérieur à γ, est un point de σ_γ. Donc, la partie de Ξ contenue dans π est formée d'une partie de σ_γ et d'une infinité dénombrable de points eventuels ξ_β dont les indices β sont tous inférieurs à γ. Donc, la partie commune à π et à Ξ est de première catégorie par rapport à π.

Je dis maintenant que *l'ensemble* Ξ *est un ensemble non mesurable*. En effet, l'ensemble Ξ a sûrement un point dans chacun des ensembles parfaits π de mesure *non nulle*. Donc, Ξ ne peut pas avoir la mesure extérieure distincte de 1. Or la mesure intérieure de Ξ est nulle, puisque, dans le cas contraire, Ξ contient un ensemble parfait ce qui est précisément impossible parce que Ξ est de première catégorie par rapport à *chaque* ensemble parfait.

Ainsi, *l'ensemble* Ξ *étant de première catégorie par rapport à chaque ensemble parfait, il possède sûrement la propriété de M. René Baire et est, en même temps, non mesurable.*

Moscou, le 18 juillet 1926.

Beispiel eines nirgends separablen metrischen Raumes.

Von

Paul Urysohn. †

1. Ein metrischer Raum R heisst separabel im Punkte ξ, falls es eine Umgebung $S(\xi, \varepsilon)$ dieses Punktes gibt, in der eine höchstens abzählbare Menge dicht ist. In vorliegendem Aufsatz wird ein metrischer Raum E konstruiert, der in keinem seiner Punkte separabel ist.[1]

2. Wir fangen mit folgenden elementaren Überlegungen an.

Es sei R irgendein metrischer Raum; wir bezeichnen durch $F(R)$ den folgendermassen entstehenden metrischen Raum:

I. Die Punkte ξ von $F(R)$ sind die Tripel

$$\xi = (x, \varphi, r),$$

wobei x ein beliebiger Punkt von R, φ eine nur durch die Ungleichung $0 \leqq \varphi < 2\pi$ eingeschränkte und r eine beliebige nicht negative reelle Zahl ist.[2] Dabei werden alle Punkte

$$\xi = (x, \varphi, 0)$$

untereinander und mit den Punkten x des ursprünglichen Raumes R identifiziert (sodass R zur Teilmenge von $F(R)$ wird).

[1]) dicht = überalldicht in $S(\xi, \varepsilon)$; $S(\xi, \varepsilon)$ bezeichnet dabei eine sphärische Umgebung, d. h. die Menge aller Punkte x des Raumes R, deren Entfernung $\rho(\xi, x)$ vom Punkte ξ, weniger als ε beträgt.

[2]) die Ungleichung $0 \leqq \varphi < 2\pi$ ist nur Anschaulichkeitshalber eingeführt; man könnte mit demselben Erfolge für φ beliebige reelle Werte zulassen.