Sur une propriété des fonctions semi-continues

Par

W. Sierpiński (Varsovie)

Le but de cette Note est de démontrer un théorème sur les fonctions semi-continues, dont un corollaire immédiat peut être regardé comme une généralisation du théorème bien connu d'après lequel toute fonction continue dans un intervalle fini est uniformément continue dans cet intervalle.

Théorème: *$\varphi(x)$ étant une fonction semi-continue supérieurement dans un intervalle fini (a, b) et $\psi(x)$ étant une fonction semi-continue inférieurement dans (a, b), telles que*

$$\varphi(x) < \psi(x) \quad \text{pour } a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

il existe un nombre positif δ, tel que pour tous les nombres x et x' de (a, b) l'inégalité

$$|x - x'| \leqslant \delta$$

entraîne l'inégatité

$$\varphi(x) < \psi(x') - \delta.$$

Démonstration. S'il n'existait pas un nombre δ satisfaisant aux conditions de notre théorème, il existerait pour tout n naturel des nombres x_n et x'_n, tels que

$$|x_n - x'_n| \leqslant \frac{1}{n}, \quad a \leqslant x_n \leqslant b, \quad a \leqslant x'_n \leqslant b \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

et

$$\varphi(x_n) \geqslant \psi(x'_n) - \frac{1}{n} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \cdots \tag{3}$$

Les suites infinies x_n et x'_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, comme contenues dans l'intervalle fini (a, b), sont bornées: il existe donc une suite infinie croissante d'indices n_k $(k = 1, 2, 3, \cdots)$, telle que les suites x_{n_k} et x'_{n_k} convergent pour $k \to \infty$, et, d'après (2), on a

$$\lim_{k=\infty} x_{n_k} = \lim_{k=\infty} x'_{n_k} = x_0, \tag{4}$$

où x_0 est un nombre de (a, b).

Or, soit ε un nombre positif donné quelconque. La fonction $\varphi(x)$ étant semi-continue supérieurement au point x_0 et la fonction $\psi(x)$ — inférieurement, il résulte de (4) que

$$\varphi(x_0) + \varepsilon > \varphi(x_{n_k}) \text{ et } \psi(x'_{n_k}) > \psi(x_0) - \varepsilon, \text{ pour } k > \mu,$$

ce qui donne, d'après (3):

$$\varphi(x_0) + \varepsilon > \psi(x_0) - \varepsilon - \frac{1}{n_k}, \text{ pour } k > \mu,$$

donc, en limite pour $k \to \infty$:

$$\varphi(x_0) + \varepsilon \geqslant \psi(x_0) - \varepsilon \tag{5}$$

Le nombre positif ε étant arbitraire, l'inégalité (5) prouve que $\varphi(x_0) \geqslant \psi(x_0)$, contrairement à (1). Notre théorème est ainsi démontré.

Corollaire: *$f(x)$ étant une fonction semi-continue supérieurement dans l'intervalle fini (a, b) et $g(x)$ étant une fonction semi-continue inférieurement dans (a, b), telles que*

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \text{pour} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$ [1]

il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$, tel que pour tous les nombres x et x' de (a, b) l'inégalité

$$|x - x'| \leqslant \delta$$

entraîne l'inégalité

$$f(x) < g(x') + \varepsilon$$

Pour déduire ce corollaire, il suffit, ε étant donné, de poser dans notre théorème $\varphi(x) = f(x)$ et $\psi(x) = g(x) + \varepsilon$

Pour obtenir le théorème sur la continuité uniforme d'une fonction continue dans un intervalle fini, il suffit de prendre dans notre corollaire pour $f(x)$ une fonction continue et de poser $g(x) = f(x)$.

[1]) Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfaisant aux conditions énoncées étaient étudiées par H. Hahn (V. p. e. *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 164) et F. Hausdorff (*Math. Zeitschr.* Bd. 5, 1919, p. 295).

Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique.

Par

Miron Zarycki (Léopol — Lwów).

La première partie de la Thèse de M. Kuratowski[1]) est consacrée à l'analyse de la notion de la *fermeture* d'un ensemble. La fermeture de A est la somme de A et de l'ensemble des points limites de A; je la désigne par A^r.

Voilà les axiomes qui forment la base de tous les raisonnements de M. Kuratowski:

$$I_r\colon (A+B)^r = A^r + B^r \qquad III_r\colon 0^r = 0$$

$$II_r\colon A \subset A^r \qquad IV_r\colon A^{rr} = A^r.$$

Dans la Note présente j'envisage des systèmes analogues d'axiomes pour quelques autres notions fondamentales de l'Analysis Situs, à savoir pour les notions de *l'extérieur*, de *l'intérieur*, de la *frontière* et du *bord*. Je démontre l'équivalence de ces systèmes à celui de M. Kuratowski et j'en déduis quelques théorèmes concernants les propriétés fondamentales des notions mentionnées.

Je tiens à remèrcier ici M. Kuratowski pour ses précieux conseils concernants la rédaction définitive de cet article.

§ 1. Les systèmes d'axiomes.

1 Je désigne l'espace par le symbole C et le complémentaire d'un ensemble A par A^c. Je suppose données quatre

[1]) Sur l'opération $\overline{A}$ de l'Analysis Situs, Fund. Math. III. p. 182—199.