Аппроксимация полиэдрами и факторизационные теоремы для ANR-бикомпактов

С. Богатый и **Ю. М. Смирнов** (Москва)

Абстракт. На случай LC^n-бикомпактов в несколько ослабленном виде распространяется теорема Фрейденталя [15] о представлении компакта в виде предела обратного спектара из полиедров той же размерности. Для того же случая усиливаются две теоремы Мардешича [7]: о представлении бикомпакта в виде предела обратного спектра из компактов той же размерности и о факторизации отображения бикомпакта по весу и размерности. Для отображений бикомпактов дается аналог теоремы Смейля [10] о сохранении свойства ANR при некоторых отображениях компактов. Приводится спектральная характеристика для локально связных бикомпактов

Доказывается, что *всякий бикомпакт* $X \in LC^n$ (*соотв.*, $C^n \cap LC^n$) *является пределом обратного спектра из полиедров* (*соотв.*, *кубов*) *размерности* $\leqslant 2 \dim X + 1$ (теорема 7). Это следует из того, что *всякий такой бикомпакт* X *является пределом обратного спектра из* ANR (*соотв.*, AR)-*компактов размерности* $\leqslant \dim X \leqslant n$ (теорема 5). Для этого мы доказываем следующий аналог факторизационной теоремы Мардешича [7]: *если* n-*мерный бикомпакт* $X \in LC^n$ (*соотв.*, $C^n \cap LC^n$), *то для любого отображения* (1) $f\colon X \to Y$ *на компакт* Y *найдутся такой* ANR (*соотв.*, AR)-*компакт* Z *размерности* $\leqslant n$ *и такие отображения* $g\colon X \to Z$ *и* $h\colon Z \to Y$, *что* $Z = gX$ *и* $f = h \circ g$ (Теорема 4). Эта теорема в свою очередь вытекает из следующего аналога факторизационной теоремы Смейла [10]: *если* $f\colon X \to Y$ — *такое отображение бикомпакта* X *на компакт* Y, *что* $f^{-1}y \in AC^n_X$ *для всех* $y \in Y$, *то* $Y \in LC^n$; *причем если* $X \in C^n$, *то и* $Y \in C^n$ (теорема 2). Мы говорим здесь, что множество A пространства X *аппроксимационно связно в размерности* n и пишем $A \in AC^n_X$, если для любой окрестности OA найдется такая окрестность UA, $UA \subset OA$, что всякое отображение $f\colon S^k \to UA$ при всяком $k \leqslant n$ гомотопно постоянному отображению в OA (2).

---

(1) Под пространствами мы всюду понимаем лишь хаусдорфовы топологические пространства, а под отображениями — непрерывные отображения.

(2) Как и почти все основные понятия теории шейпов свойство AC^n_X, введенное здесь, не зависит от вложения в объемлющее пространство $X \in AR$. Здесь этот факт не потребуется.

Кроме того получен и ряд других результатов, как нам кажется, представляющих некоторый интерес. Например, оказывается, что *локально связные бикомпакты характеризуются тем, что они (и только они) являются пределами обратных спектров из локально связных компактов с монотонными проекциями „на“* (теорема 6). Заметим еще, что не всякий бикомпакт является пределом обратного спектра из ANR-компактов той же размерности, — это показывает один пример Пасынкова [6]. В этой же работе приведена подробная история вопроса об аппроксимации бикомпактов полиедрами (от Фрейденталя до Пасынкова).

Для доказательства факторизационных теорем нам потребуются некоторые понятия и техника теории шейпов, которые можно найти в [4] и [9]. Естественно, изложение будет идти в обратном порядке.

§ 1. Характеристика шейповых ретрактов и сохранение локальной связности при отображениях.

Теорема 1. *Пусть A замкнуто в ANR-бикомпакте X; тогда следующие условия эквивалентны*:

а) *A — абсолютный шейповый ретракт* (ASR) *в смысле Мардешича* [9],

б) *для всякой окрестности OA существует такая окрестность UA, $UA\subset OA$, которая стягивается по OA в точку*,

в) *A стягивается в точку по всякой своей окрестности*,

г) *любое отображение бикомпакта A в любой ANR-бикомпакт гомотопно постоянному отображению.*

Доказательство. Покажем эквивалентность б) ⇔ в). Импликация б) ⇒ в) — очевидна. Пусть OA — произвольная окрестность [3]. Существует такая гомотопия $H\colon A\times I\to OA$, что $H(a,0)\equiv a$ и $H(a,1)\equiv p\in OA$ для всех a из A. Рассмотрим в произведении $OA\times I$ замкнутое в нём множество $B=OA\times\{0\}\cup A\times I\cup OA\times\{1\}$ и на нём такое отображение $G\colon B\to OA$, что $G(x,0)\equiv x$, $G(x,1)\equiv p$ для всех x из OA и $G(a,t)\equiv\equiv H(a,t)$ на $A\times I$. Оно — непрерывно. Так как X есть ANE [4], то и OA есть ANE. Поэтому отображение G можно продолжить на некоторую окрестность OB множества B в отображение $\widetilde{H}\colon OB\to OA$. В силу компактности отрезка I найдется такая окрестность UA, что $UA\times I\subset OB$. Гомотопия $\widetilde{H}|UA\times I$ стягивает окрестность UA в точку p по окрестности OA, что и тр. док.

Докажем импликацию в) ⇒ г). Пусть $f\colon A\to Y$ — отображение в ANR-бикомпакт Y. Так как Y есть ANE, то существует продолжение $F\colon OA\to Y$ отображения f на некоторую окрестность OA. Так как тождество Id_A гомотопно постоянному отображению в окрестности OA, то и отображение $f=\\=F\circ\mathrm{Id}_A$ гомотопно постоянному отображению, что и тр. док.

(3) Можно считать, что OA имеет тип F_σ и поэтому — бинормально.

(4) Т. е. X есть абсолютный окрестностный экстензор, причем не только для класса всех бикомпактов, но и для класса всех нормальных пространств.

Докажем импликацию г) ⇒ а). Пусть $\underline{A}=\{A_\alpha,\varrho_{\alpha\beta},\Xi\}$ — произвольный ANR-спектр [9] такой, что $A=\varprojlim\underline{A}$ (он существует — см. [9]). Так как A_α есть ANR-компакт для любого индекса α, то предельная проекция $\varrho_\alpha\colon A\to A_\alpha$ гомотопна постоянному отображению при любом α. Это можно записать так: $\mathrm{Id}_{A_\alpha}\circ\varrho_\alpha\simeq p\circ\varrho_\alpha$, где $p\colon A_\alpha\to p\in A_\alpha$ — постоянное отображение. Согласно лемме 4 из [9] найдется такой индекс $\beta\geqslant\alpha$, что $\mathrm{Id}_{A_\alpha}\circ\varrho_{\alpha\beta}\simeq p\circ\varrho_{\alpha\beta}$. Другими словами, проекция $\varrho_{\alpha\beta}$ гомотопна постоянному отображению. Итак, выполнено условие теоремы 5 из [8]. Но теорема 4 из [8] утверждает, что тогда $A\in\mathrm{ASR}$, что и тр. док.

Докажем импликацию а) ⇒ в). Пусть OA — произвольная окрестность. Поместим X в тихоновский куб I^τ и возьмем там окрестность UX, ретрагирующуюся на X: $r\colon UX\to X$. Пусть $UA=r^{-1}(OA)$. Ясно, что $X\cap UA=OA$ и $UA\subset UX$. Существует такие полиэдр P и тихоновский куб I^σ, что $A\subset P\times I^\sigma\subset UA$. Произведение $B=P\times I^\sigma$ есть ANR. Ясно, что $A\subset rB\subset r(UA)=OA$. Теперь к бикомпакту B применим лемму 3 из [9]: найдутся такой индекс α и такое отображение $f\colon A_\alpha\to B$, что включение $i\colon A\to B$ гомотопно композиции $f\circ\varrho_\alpha$. По теореме 5 из [8] найдется такой индекс $\beta\geqslant\alpha$, что проекция $\varrho_{\alpha\beta}$ гомотопна постоянному отображению. Итак, включение i гомотопно композиции $f\circ\varrho_{\alpha\beta}\circ\varrho_\beta$. Так как $\varrho_{\alpha\beta}$ гомотопно постоянному отображению, то i гомотопно постоянному отображению в $B\subset UA$. Так как $i=r\circ i$, то i гомотопно постоянному отображению в $rB\subset OA$, что и тр. док. Теорема доказана.

Замечание 1. При выводе импликаций б) ⇒ в) ⇒ г) ⇒ а) мы не пользовались условием $X\in\mathrm{ANR}$ (не нужна была и бикомпактность пространства X). *Поэтому* б) ⇒ а) *при любом нормальном пространстве X лишь бы A было бикомпактно.*

Теорема 2. *Если $f\colon X\to Y$ — такое отображение бикомпакта X на компакт Y, что $f^{-1}y\in\mathrm{AC}^n_X$* [5] *для всех $y\in Y$, то $Y\in\mathrm{LC}^n$; причем, если $X\in\mathrm{C}^n$, то и $Y\in\mathrm{C}^n$.*

Эта теорема получается из первых двух утверждений теоремы 4 из [2], если откинуть требование метризуемости бикомпакта X, которое, как легко проверить, в доказательстве нигде не применяется. Первая часть теоремы 2 в точности совпадает с первым утверждением цитируемой теоремы 4. Вторая — непосредственно следует из второго [6], если заметить, что *условие $X\in\mathrm{C}^n$ эквивалентно тому, что множество $[S^k,X]$ всех гомотопических классов отображений $\varphi\colon S^k\to X$ — тривиально при всех $k\leqslant n$.*

(5) Смотри введение.

(6) Отображение $f_\#\colon[P,X]\to[P,Y]$, порожденное отображением $f(\varphi\colon P\to X)=\\=f\circ\varphi\colon P\to Y$, является взаимно-однозначным отображением „на“ для всякого полиедра P размерности $\leqslant n$.

Следствие 1. *Если в предположениях теоремы* 2 $\dim Y \leqslant n$, *то* $Y \in \mathrm{ANR}$ *и найдется такое отображение* $g\colon Y \to X$, *что* $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$.

Действительно, так как Y — компакт (метризуемый), то из условий $Y \in \mathrm{LC}^n$ и $\dim Y \leqslant n$ вытекает, что $Y \in \mathrm{ANR}$ [3]. Значит, найдется такой полиедр P размерности $\leqslant n$, что $Y \underset{h}{\leqslant} P$ [3]. Поэтому вторая часть следствия 1 непосредственно вытекает из третьего утверждения (7) цитированной теоремы 4 из [2], если положить $Z = Y$ и взять класс отображения Id_Y из $[Y, Y]$.

Следствие 2. *Если в предположениях теоремы* 2 $f^{-1}y \in \mathrm{ASR}$ (8) *для всех* y *из* Y, $X \in \mathrm{ANR}$ (*соотв.*, AR) *и* $\dim Y < \infty$, *то* $Y \in \mathrm{ANR}$ (*соотв.*, AR).

В самом деле, по теореме 1 бикомпакты $f^{-1}y$ удовлетворяют условию б), из которого легко следует, что $f^{-1}y \in \mathrm{AC}_X^n$ *для всех* n. Поэтому в силу теоремы 2 $y \in \mathrm{LC}^n$ (соотв., $\mathrm{C}^n \cap \mathrm{LC}^n$) *для всех* n, даже если $X \in \mathrm{LC}^\infty$ (соотв., $\mathrm{C}^\infty \cap \mathrm{LC}^\infty$). Отсюда вытекает, что $Y \in \mathrm{ANR}$ (соотв. AR), так как $\dim Y < \infty$ [3].

§ 2. Факторизационные теоремы для локально связных бикомпактов.

Теорема 3. *Для любого отображения* $f\colon X \to Y$ *локально стягиваемого бикомпакта* X (*соотв.* $X \in \mathrm{LC}^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$) *в бикомпакт* Y *бесконечного веса* wY *существуют бикомпакт* Z *размерности* $\leqslant \dim X$ *и веса* $\leqslant wY$ *и такие отображения* $g\colon X \to Z$ *и* $h\colon Z \to Y$, *что* $gX = Z$, $f = h \circ g$ *и* $g^{-1}z \in \mathrm{ASR}$ (*соотв.*, $\in \mathrm{AC}_X^n$) *для всех* $z \in Z$.

Доказательство. Проведем его сначала для первого утверждения следуя доказательству известной факторизационной теоремы Мардешича [7], данному впоследствии Архангельским [1]. Поэтому будем краткими. Пусть $\mathfrak{B}$ — база открытых множеств бикомпакта Y, имеющая мощность wY. Пусть $\tilde{\mathfrak{B}}$ — система всех конечных открытых покрытий бикомпакта Y, состоящих из элементов базы $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{C}^0 = \{f^{-1}\gamma \mid \gamma \in \tilde{\mathfrak{B}}\}$, где $f^{-1}\gamma = \{f^{-1}\Gamma \mid \Gamma \in \gamma\}$.

Теперь, начиная с $\mathfrak{C}^0$ приведем следующее индукционное построение. Пусть $\mathfrak{C}$ — произвольная система конечных открытых покрытий бикомпакта X. Сначала поставим в соответствие каждому покрытию γ из $\mathfrak{C}$ покрытие ω_γ, удовлетворяющее условию

(⁎) для каждого U из ω_γ найдется такое Γ в γ, что U стягивается по Γ в некоторую точку .

Для этого для каждой точки x выберем такое множество $\Gamma_x \in \gamma$, что $x \in \Gamma_x$. Так как X — локально стягиваемо, то существует такая окрестность U_x

(7) Отображение $f_\#\colon [Z, X] \to [Z, Y]$ является отображением „на“ для всякого такого компакта Z, который доминируется полиедром размерности $\leqslant n$.

(8) Т. е. $f^{-1}y$ суть абсолютные шейповые ретракты в смысле Мардешича [9].

точки x, что $U_x \subset \Gamma_x$ и U_x стягивается по Γ_x в точку x. Из покрытия $\{U_x\}$ (в силу бикомпактности пространства X) выберем конечное подпокрытие ω_γ. Легко видеть, что оно будет искомым.

Далее, для каждого конечного набора $s = \{\gamma_i\}$ покрытий γ_i из $\mathfrak{C}$ выберем конечное открытое покрытие ω_s, звёздно вписанное в каждое из покрытий ω_{γ_i} (что можно сделать, так как X — паракомпактно). Можно считать, что кратность $\mathrm{Ord}\,\omega_s$ покрытия ω_s не больше чем $\dim X + 1$ (согласно определению размерности $\dim$). Систему всех таких покрытий ω_s, где s пробегает множество всех конечных подсистем системы $\mathfrak{C}$, обозначим через $\mathfrak{C}'$. Легко видеть, что мощность системы $\mathfrak{C}'$ не больше чем мощность системы $\mathfrak{C}$ (если последняя — бесконечна) (9).

Чтобы покончить с конструкцией, положим $\mathfrak{C}^1 = (\mathfrak{C}^0)'$, $\mathfrak{C}^2 = (\mathfrak{C}^1)'$, … …, $\mathfrak{C}^{n+1} = (\mathfrak{C}^n)'$, … Получим счётную последовательность систем мощности wY (так как вес wY — бесконечен). Система $\mathfrak{C}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}^n$ также имеет мощность wY.

Введем следующую эквивалентность: $x' \sim x$, если $x' \in \mathrm{St}_\omega x$ для всех покрытий $\omega \in \mathfrak{C}^\infty$, где $\mathrm{St}_\omega x = \bigcup U \mid x \in U \in \omega$. Так же как и в [1] проверяется, что отношение $\sim$ и в самом деле является эквивалентностью. Искомым бикомпактом Z является фактор-пространство $X/\sim$. Искомое отображение h ставит в соответствие каждой точке x класс эквивалентности A_x, содержащий точку x, а искомое отображение g определяется формулой: $g\{A_x\} = fx$. Всё доказывается точно также, как и в [1] за исключением отсутствующего там свойства: $g^{-1}z \in \mathrm{ASR}$ для всех z из Z.

Докажем это последнее. Согласно замечанию 1 мы можем воспользоваться условием б) из теоремы 1. Пусть OA_x — произвольная окрестность полного прообраза $g^{-1}z = A_x$ произвольной точки $z = \{A_x\}$ бикомпакта $Z = X/\sim$. Существует такое покрытие $\gamma \in \mathfrak{C}^\infty$, что $\mathrm{St}_\gamma x \subset OA_x$. Так как $\gamma \in \mathfrak{C}^n$ при некотором n, то найдется и покрытие ω_γ, удовлетворяющее условию (⁎). Согласно построению системы $\mathfrak{C}^{n+1}$ найдется еще одно покрытие $\omega \in \mathfrak{C}^{n+1}$, которое звёздно вписано в ω_γ. Поэтому существует такое $U \in \omega_\gamma$, что $\mathrm{St}_\omega x \subset U$. Так как $A_x \subset \mathrm{St}_\omega x$, то $A_x \subset U$. Покажем, что окрестность $UA_x = U$ стягивается по OA_x в точку. Действительно, согласно определению покрытия ω_γ существует такое $\Gamma \in \gamma$, что $U \subset \Gamma$ и U стягивается в некоторую точку по Γ. Но $x \in \mathrm{St}_\omega x \subset U \subset \Gamma$ и поэтому $\Gamma \subset \mathrm{St}_\gamma x \subset OA_x$. Значит, мы нашли окрестность $UA_x = U$, которая стягивается по OA_x в точку. Этим доказано, что для каждого множества $A_x = g^{-1}z$, $z \in Z$, выполнено условие б) теоремы 1. Значит, согласно замечанию 1, каждое такое множество $A_x \in \mathrm{ASR}$. Первая часть теоремы доказана.

(9) Чтобы быть скрупулезно точным, надо из покрытия $\{Ux\}$ выбрать такое подпокрытие ω_γ, чтобы система $\mathrm{Int}\,\omega_\gamma = \{\mathrm{Int}\,U \mid U \in \omega_\gamma\}$ покрывала X, а затем надо звёздно вписать открытое покрытие ω_s в каждое из покрытий $\mathrm{Int}\,\omega_{\gamma_i}$.

Вторая часть доказывается точно также, но только нужно условие (⁎) заменить на следующее условие

($*^n$) для каждого U из ω_γ найдется такое $\Gamma \in \gamma$, что всякое отображение $\varphi\colon S^k \to U$ при всяком $k \leqslant n$ гомотопно в Γ постоянному отображению.

Теорема доказана.

Замечание 2. На самом деле в утверждении теоремы 3 не только то, что $g^{-1}(z) \in \mathrm{ASR}$, но и то что множество $g^{-1}(z)$ удовлетворяет условию б) из теоремы 1.

В самом деле, пусть $z = \{A_x\}$ и её окрестность Oz — произвольны. Положим $OA_x = g^{-1}Oz$ и, согласно последней части доказательства, подберем к OA_x множество $U \in \omega_\gamma$, стягиваемое по OA_x в точку; подберем и покрытие ω из $\mathfrak{C}^\infty$ так, что $x \in \mathrm{St}_\omega x \subset U \subset OA_x$. Можно показать (в [1] это не сделано), что образ $g(\mathrm{St}_\omega x)$ является окрестностью точки $z = \{A_x\}$. Но тогда образ gU будет искомой окрестностью точки z, которая стягивается по Oz в некоторую точку.

Замечание 3. Если в теореме 3 потребовать, чтобы пространство X было лишь локально связным, то будет локально связным и фактор-пространство Z, а прообразы $g^{-1}z$ для всех $z \in Z$ будут лишь связными.

Проходит почти то же самое доказательство с заменой условия (⁎) на условие

(c) *каждое U из ω_γ-связно.*

Если бы $g^{-1}z = A_x$ распалось на непустые непересекающиеся замкнутые множества A' и A'', то взяв непересекающиеся окрестности OA' и OA'' и подобрав к $OA_x = OA' \cup OA''$ множество U ($A_x \subset U \subset OA_x$) согласно последней части доказательство теоремы, мы пришли бы к противоречию со связностью множества U (условие (c)).

Теорема 4. *Для любого отображения $f\colon X \to Y$ бикомпакта $X \in \mathrm{LC}^n$ (соотв., $\mathrm{C}^n \cap \mathrm{LC}^n$) размерности $\leqslant n$ в компакт Y существуют компакт $Z \in \mathrm{ANR}$ (соотв., AR) размерности $\leqslant n$ и такие отображения $g\colon X \to Z$ и $h\colon Z \to Y$, что $gX = Z$ и $f = h \circ g$.*

Эта теорема сразу вытекает из теоремы 2, следствия 2 и теоремы 3, если компакт Y — бесконечен. Случай, когда компакт Y конечен — тривиальный.

Замечание 4. Если в теореме 4 откинуть требование $\dim X \leqslant n$, то можно лишь утверждать, что $Z \in \mathrm{LC}^n$ (соотв., $\mathrm{C}^n \cap \mathrm{LC}^n$), $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

§ 3. Аппроксимация локально связных бикомпактов локально связными компактами.

Теорема 5. *Всякий бикомпакт $X \in \mathrm{LC}^n$ (соотв., $\mathrm{C}^n \cap \mathrm{LC}^n$) размерности $\leqslant n$ является пределом некоторого обратного спектра $\underline{X}$ из ANR (соотв. AR)-компактов размерности $\leqslant n$.*

Для доказательства напомним несколько простых фактов об обратных спектрах. Заметим сначала, что если мы имеем обратный спектр $\underline{X} = \{X_\alpha, \varrho_{\alpha\beta}, \Xi\}$ и отображения $\varrho_\alpha\colon X \to X_\alpha$, коммутирующие с проекциями $\varrho_{\alpha\beta}$, то правило $\varrho(x) = \{\varrho_\alpha x\}$ для каждого $x \in X$ определяет отображение $\varrho\colon X \to \lim \underline{X}$.

Лемма 1. *Пусть даны бикомпакт X, обратные спектры $\underline{X} = \{X_\alpha, \varrho_{\alpha\beta}, \Xi\}$ и $\underline{P} = \{P_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Xi\}$ и такие отображения $\varrho_\alpha\colon X \to X_\alpha$ и $\varphi_\alpha\colon X_\alpha \to P_\alpha$, что*

а) *отображения ϱ_α коммутируют с проекциями $\varrho_{\alpha\beta}$,*

б) *отображения $\pi_\alpha = \varphi_\alpha \circ \varrho_\alpha$ коммутируют с проекциями $\pi_{\alpha\beta}$,*

в) *ϱ_α являются отображениями „на“;*

тогда если отображение $\pi\colon X \to \lim \underline{P}$ является гомеоморфизмом, то гомеоморфизмом будет и отображение $\varrho\colon X \to \lim \underline{X}$.

Действительно, легко видеть, что правило $\varphi(\underline{x}) = \{\varphi_\alpha x_\alpha\}$, где $\underline{x} = \{x_\alpha\}$ — произвольный элемент предела $\lim \underline{X}$, определяет отображение $\varphi\colon \lim \underline{X} \to \lim \underline{P}$, так как в силу а) и б) диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_\beta & \to & P_\beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\alpha & \to & P_\alpha \end{array}$$

коммутативны (если $\alpha \leqslant \beta$).

Еще проще видеть, что $\pi = \varphi \circ \varrho$. Так как π — гомеоморфизм, то и взаимно-однозначно. Но тогда взаимно-однозначно и ϱ. Покажем, что $\varrho X = \lim \underline{X}$. Пусть $\underline{x} = \{x_\alpha\} \in \lim \underline{X}$. В силу в) множества $\varrho_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ непусты и составляют центрированную систему, так как $\varrho_\beta^{-1}(x_\beta) \subset \varrho_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ если только $\beta \geqslant \alpha$. Так как X бикомпактно, то пересечение $\bigcap\limits_{\alpha \in \Xi} \varrho_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ непусто. Легко проверить, что для всякой точки x этого пересечения $\varrho(x) = \underline{x}$. Итак, отображение $\varrho\colon X \to \lim \underline{X}$ взаимно-однозначно и „на“. Так как X — бикомпактно, то ϱ — гомеоморфизм. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В силу одной теоремы Стинрода [11] бикомпакт X является пределом обратного спектра $\underline{P} = \{P_\alpha \pi_{\alpha\beta}, \Xi\}$ из полиэдров P_α. Это значит, что существуют такие отображения $\pi_\alpha\colon X \to P_\alpha$, коммутирующие с проекциями $\pi_{\alpha\beta}$, что отображение $\pi\colon X \to \lim \underline{P}$ является гомеоморфизмом. Из доказательства теоремы Стинрода, данного Пасынковым [6] следует, что за направленное множество Ξ можно принять систему всех конечных подмножеств α некоторого множества A, взятую с естественным порядком — по включению. Построим теперь (индукцией по числу элементов в каждом конечном множестве α) обратный спектр $\underline{X} = \{X_\alpha, \varrho_{\alpha\beta}, \Xi\}$ и отображения $\varrho_\alpha\colon X \to X_\alpha$ и $\varphi_\alpha\colon X_\alpha \to P_\alpha$, удовлетворяющие условиям а) и в) леммы 1, притом такие, что $\pi_\alpha = \varphi_\alpha \circ \varrho_\alpha$. Этим теорема будет доказана, если только элементы X_α спектра $\underline{X}$ будут ANR (соотв. AR)-компактами размерности $\leqslant n$.

Начало индукции простое. Пусть мощность $|\alpha|$ индекса α равна 1. Тогда в силу теоремы 4 для отображения $\pi_\alpha\colon X\to P_\alpha$ найдутся ANR-компакт [10] X_α размерности $\leqslant n$ и такие отображения $\varrho_\alpha\colon X\to X_\alpha$ и $\varphi_\alpha\colon X_\alpha\to P_\alpha$, что $\varrho_\alpha(X)=X_\alpha$ и $\pi_\alpha=\varphi_\alpha\circ\varrho_\alpha$.

Далее индукционные предположения усложняются. Рассмотрим предварительно произведение $\prod\limits_{\alpha<\beta}X_\alpha\times P_\beta$ и обозначим через $p_\beta\colon\prod\limits_{\alpha<\beta}X_\alpha\times P_\beta\to P_\beta$ и $p_{\alpha\beta}\colon\prod\limits_{\alpha<\beta}X_\alpha\times P_\beta\to X_\alpha$ естественные проекции. Предположим теперь, что для всех таких индексов β, что $|\beta|\leqslant k$ нами построены ANR-компакты X_β размерности $\leqslant n$ и отображения

$$\varrho_\beta\colon X\to X_\beta,\qquad \varrho_{\alpha\beta}\colon X_\beta\to X_\alpha\quad\text{при}\quad \alpha<\beta,$$
$$\varphi_\beta\colon X_\beta\to P_\beta\quad\text{и}\quad h_\beta\colon X_\beta\to\prod_{\alpha<\beta}X_\alpha\times P_\beta,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

в) $\varrho_\beta X=X_\beta$,

г) $\varphi_\beta=p_\beta\circ h_\beta$,

д) $\varrho_{\alpha\beta}=p_{\alpha\beta}\circ h_\beta$ при $\alpha<\beta$,

е) $h_\beta\circ\varrho_\beta=\delta_\beta$, где $\delta_\beta(x)=\{\varrho_\alpha(x),\pi_\beta(x)|\ \alpha<\beta\}$ [11], для каждого x из X,

ж) $\varrho_{\alpha\gamma}=\varrho_{\alpha\beta}\circ\varrho_{\beta\gamma}$ при $\alpha<\beta<\gamma$.

Наконец, для каждого индекса β мощности $|\beta|=k+1$ для отображения $\delta_\beta\colon X\to\prod\limits_{\alpha<\beta}X_\alpha\times P_\beta$ существуют в силу теоремы 4 ANR-компакт X_β размерности $\leqslant n$ и отображения $\varrho_\beta\colon X\to X_\beta$ и $h_\beta\colon X_\beta\to\prod\limits_{\alpha<\beta}X_\alpha\times P_\beta$, удовлетворяющие условиям в) и е). Определим отображения φ_β и $\varrho_{\alpha\beta}$ (для всех $\alpha<\beta$) равенствами г) и д).

Очевидно, условия в), г), д) и е) выполнены всегда: если $|\beta|\leqslant k$, то по индукционному предположение, а если $|\beta|=k+1$, то по определению. Проверим выполнение условий а) и б) леммы 1 и условия ж).

Из определения диагонального отображения δ_β видим, что $\varrho_\alpha=p_{\alpha\beta}\circ\delta_\beta$. Применяя равенства д) и е) получим: $\varrho_\alpha=p_{\alpha\beta}\circ h_\beta\circ\varrho_\beta=\varrho_{\alpha\beta}\circ\varrho_\beta$. Этим а) доказано.

Аналогично имеем: $\pi_\beta=p_\beta\circ\delta_\beta$. Применяя г) и е) получим: $\pi_\beta=$ $=p_\beta\circ h_\beta\circ\varrho_\beta=\varphi_\beta\circ\varrho_\beta$. Этим доказано условие б), так как в начале леммы мы условились, что отображения π_β коммутируют с проекциями $\pi_{\alpha\beta}$.

Докажем условие ж), естественно считая, что $|\gamma|=k+1$. Пусть $x_\gamma\in X_\gamma$. В силу в) найдется такое $x\in X$, что $\varrho_\gamma(x)=x_\gamma$. Пусть $x_\beta=\varrho_{\beta\gamma}(x_\gamma)$ и $x_\alpha=\varrho_{\alpha\gamma}(x_\gamma)$. В силу а) $x_\beta=\varrho_\beta(x)$ и $x_\alpha=\varrho_\alpha(x)$. Наконец, снова в силу а) $x_\alpha=\varrho_{\alpha\beta}(x_\beta)$ этим условие ж) доказано.

[10] Для краткости слова „(соотв., AR)“ мы опускаем.

[11] δ_β является так называемым диагональным произведением отображений ϱ_α, $\alpha<\beta$, и π_β.

Итак, выполнены все условия в), г), д), е) и ж) индукционного построения. Значит его можно продолжить до бесконечности. В результате (в силу условия ж)) мы получим обратный спектр $\underline{X}=\{X_\alpha,\varrho_{\alpha\beta},\Xi\}$ из ANR-компактов X_α размерности $\leqslant n$, удовлетворяющий всем условиям леммы 1. В начале доказательства было предположено, что отображение $\pi\colon X\to\lim\underline{P}$ является гомеоморфизмом. Значит, по лемме 1 будет гомеоморфизмом и отображение $\varrho\colon X\to\lim\underline{X}$. Теорема доказана.

Из замечания 4 получим

Замечание 5. Если в теореме 5 выбросить условие $\dim X\leqslant n$, то можно лишь утверждать, что X является пределом обратного спектра из компактов $X_\alpha\in LC^n$ (соотв. $C^n\cap LC^n$), $n=0,1,2,\ldots,\infty$.

Замечание 6. Во всех получаемых представлениях бикомпактов X в виде пределов обратных спектров $\{X_\alpha,\varrho_{\alpha\beta},\Xi\}$ проекции $\varrho_{\alpha\beta}$ являются отображениями „на“.

В самом деле, ведь предельные проекции ϱ_α являются отображениями „на“ и $\varrho_\alpha=\varrho_{\alpha\beta}\circ\varrho_\beta$ при $\alpha<\beta$.

Замечание 7. Условие LC^n, накладываемое на бикомпакт X в теореме 5 существенно: можно построить n-мерные бикомпакты, которые не только не являются пределами обратных спектров из n-мерных ANR-компактов, но даже не являются пределами обратных спектров, составленных из подкомпактов n-мерных ANR-компактов. Таким является один змиевидный бикомпакт Пасынкова [6].

Теорема 6. *Бикомпакт X локально связен тогда и только тогда, когда он является пределом обратного спектра из локально связных компактов (бикомпактов) X_α с монотонными проекциями $\varrho_{\alpha\beta}$ „на“ (причем всегда можно считать, что $\dim X_\alpha\leqslant\dim X$).*

Доказательство. Конструкция, примененная в доказательстве теоремы 5 вместе с замечанием 3 показывает, что *всякий локально связный бикомпакт X является пределом обратного спектра $\{X_\alpha,\varrho_{\alpha\beta},\Xi\}$ из локально связных компактов X_α размерности $\leqslant\dim X$ с монотонными проекциями $\varrho_{\alpha\beta}$ „на“.* Монотонность следует из монотонности проекций ϱ_α и равенств $\varrho_\alpha=\varrho_{\alpha\beta}\circ\varrho_\beta$ при $\alpha<\beta$. Начиная с некоторого индекса α_0 все X_α должны иметь размерность $\dim X$, так как $X=\lim\{X_\alpha,\varrho_{\alpha\beta},\Xi'\}$ для любого множества Ξ', конфинального к Ξ, и $\dim X\leqslant\operatorname{Sup}\dim X_\alpha|\ \alpha\in\Xi'$ (см. например, [6]).

Итак, в одну сторону теорема доказана. Пусть теперь дан обратный спектр $\underline{X}=\{X_\alpha,\varrho_{\alpha\beta},\Xi\}$ из локально связных бикомпактов X_α с монотонными проекциями $\varrho_{\alpha\beta}$ „на“. Покажем, что бикомпакт $X=\lim\underline{X}$ локально связен. Проверим сначала, что предельные проекции ϱ_α монотонны. Если бы проекция ϱ_α не была монотонной, то нашлась бы такая точка x_α, что прообраз $A=\varrho_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ распадался бы на два непустых замкнутых непересекающихся множества A' и A''. По лемме 8 Пасынкова [6] найдется такое $\beta\geqslant\alpha$, что $\varrho_\beta A'\cap\varrho_\beta A''=\emptyset$. Но $\varrho_\beta A'\cup\varrho_\beta A''=\varrho_\beta(A'\cup A'')=\varrho_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$, а это противоречит связности прообраза $\varrho_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$. Наконец, вспомним, что базу в $X = \lim \underline{X}$ получают взяв множества вида $\varrho_\alpha^{-1}H$, где множества H в каждом X_α составляют базу. В силу локальной связности бикомпактов X_α можно считать, что все H — связны. Так как все проекции ϱ_α монотонны, то $\varrho_\alpha^{-1}H$ будут связными для всех α и всех H. Итак, в X существует база из связных множеств, что и тр. док. Теорема доказана.

Замечание 8. Существует пример бикомпакта, не являющегося пределом обратного спектра из локально связных компактов с проекциями „на“ [6].

§ 4. Аппроксимация локально связных бикомпактов полиедрами.

Теорема 7. *Всякий бикомпакт $X \in LC^n$ (соотв. $C^n \cap LC^n$) размерности $\leqslant n$ является пределом обратного спектра из полиедров (соотв., кубов) размерности $\leqslant 2n+1$.*

Доказательство. Согласно теореме 5 $X = \lim\{X_\alpha, \varrho_{\alpha\beta}, \Xi\}$, где X_α суть ANR-компакты (12) размерности $\leqslant \dim X \leqslant n$. Для каждого α по теореме Нёбелинга-Понтрягина существует вложение $i_\alpha\colon X_\alpha \to I^{2n+1}$ в $2n+$ $+1$-мерный куб I^{2n+1}. Для каждого α компакт $X_\alpha \in ANR$, поэтому имеется ретракция $r_\alpha\colon P_\alpha \to i_\alpha X_\alpha$, где P_α — такой полиедр (13), что $i_\alpha X_\alpha \subset P_\alpha \subset I^{2n+1}$. Ясно, что $\dim P_\alpha \leqslant 2n+1$ для всех n. Рассмотрим систему $\underline{P} = \{P_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Xi\}$, где $\pi_{\alpha\beta} = \varrho_{\alpha\beta} \circ r_\beta$ — для простоты мы здесь и далее *будем отождествлять каждый компакт X_α с его образом $i_\alpha X_\alpha$.*

Так как при $\alpha < \beta < \gamma$ проекция $\varrho_{\beta\gamma}(r_\gamma p_\gamma) \in X_\beta$, то $\pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma} = \varrho_{\alpha\beta} \circ r_\beta \circ \varrho_{\beta\gamma} \circ r_\gamma = \varrho_{\alpha\beta} \circ \varrho_{\beta\gamma} \circ r_\gamma$. Итак, $\underline{P}$ — обратный спектр.

Если $\underline{x} = \{x_\alpha\} \in \lim \underline{X}$, то $x_\alpha \in P_\alpha$ для каждого α и $\pi_{\alpha\beta}(x_\beta) = \varrho_{\alpha\beta}(r_\beta x_\beta) = \varrho_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha$, если $\alpha < \beta$. Значит, $\underline{x} \in \lim \underline{P}$ и отсюда нетрудно заключить, что $\lim \underline{X} \subset \lim \underline{P}$.

Поэтому можно определить отображения $\pi_\alpha\colon X \to P_\alpha$ полагая $\pi_\alpha(x) = \varrho_\alpha(x)$ для каждого α. Легко проверить, что π_α коммутируют с проекциями $\pi_{\alpha\beta}$. А тогда равенства $\pi(x) = \{\pi_\alpha(x)\}$ для каждого x из X определяют отображение $\pi\colon X \to \lim \underline{P}$. Очевидно, $\pi = \varrho$, где $\varrho\colon X \to \lim \underline{X}$, определяется таким же образом с помощью предельных проекций ϱ_α. Итак, π — непрерывно и взаимно-однозначно (ведь ϱ — гомеоморфизм). Покажем, что $\pi(X) = \lim \underline{P}$. Пусть $\underline{p} = \{p_\alpha\} \in \lim \underline{P}$. Тогда $p_\alpha = \pi_{\alpha\beta}(p_\beta) = \varrho_{\alpha\beta}(r_\beta p_\beta) \in X_\alpha$. Значит, $r_\beta p_\beta = p_\beta$ и $p_\alpha = \varrho_{\alpha\beta}(p_\beta)$ для каждого α и $\beta > \alpha$. Итак, $\underline{p} \in \lim \underline{X}$ и поэтому найдется такая точка $x \in X$, что $\pi(x) = \underline{p}$. Так как X — бикомпакт, то π оказывается гомеоморфизмом. Следовательно, $X = \lim \underline{P}$. Теорема доказана.

Замечание 9. Если бы проблема Борсука о вложении n-мерных AR-компактов в $2n$-мерный куб решалась положительно, то мы получили бы указанным способом, что всякий n-мерный бикомпакт $X \in C^n \cap LC^n$ является пределом обратного спектра из $2n$-мерных кубов. Обратим внимание, что при $n = 1$ это верно: всякий одномерный AR-компакт вкладывается в квадрат. Значит, *всякий одномерный бикомпакт $X \in C^1 \cap LC^1$ является пределом обратного спектра из квадратов.*

Замечание 10. Указанным способом нетрудно показать, что *всякий одномерный одно связный и локально связный бикомпакт является пределом обратного спектра* а) *из квадратов*, б) *из дендритов*.

(12) Для краткости слова „(соотв., AR)“ опустим.

(13) Если все $X_\alpha \in AR$, то $P_\alpha = I^{2n+1}$.

Литература

[1] А. В. Архангельский, *О факторизации отображений по весу и размерности*, ДАН СССР 174 (6) (1967), стр. 1243.

[2] С. Богатый, *О теореме Вьеториса в категории шейпов и об одной проблеме Борсука*, Fund. Math. 84 (1974), pp. 209–228.

[3] K. Borsuk, *Theory of Retracts*, Warszawa 1967.

[4] — *Theory of shape*, Lecture Notes Ser. 28, Matem. Inst. Aarhus Univ., 1971, pp. 145.

[5] H. Freudenthal, *Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen*, Comp. Math. 4 (1937), pp. 145–234.

[6] Б. А. Пасынков, *О спектрах и размерности топологических пространств*, Матем. Сборник 57 (99) (1962), стр. 35–79.

[7] S. Mardešić, *On covering dimension and invers limits of compact spaces*, Illinois Math. Journ. 4 (2) (1960), pp. 278–291.

[8] — *Retracts in shapes theory*, Glasnik Mat. 6 (26) (1971), pp. 153–163.

[9] — and J. Segal, *Shapes of compacta and ANR-systems*, Fund. Math. 72 (1971), pp. 41–59.

[10] S. Smale, *A Vietoris mapping theorem for homotopy*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), pp. 604–610.

[11] N. Steenrod and S. Eilenberg, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton, New Jersey, 1952.

МГУ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ, Москва
MGU MATHEMATICAL DEPARTMENT, Moscow

Accepté par la Rédaction le 5. 9. 1973