Using Proposition 1 and a theorem of Tarski's (see [3]) which states that if β is a Boolean algebra then there exists a Boolean algebra of sets B together with an epimorphism $b\colon B\to\beta$, it can be proved that HBKML implies PI.

References

[1] P. Bernays and A. A. Fraenkel, *Axiomatic Set Theory*, Amsterdam 1958.
[2] Dunford and Schwartz, *Linear Operators Part* 1, New York 1958.
[3] D. A. Edwards, *A theorem of functional analysis equivalent to the axiom of choice*, (to appear).
[4] G. Jameson, *Ordered Linear Spaces*, Berlin 1970.
[5] J. Łoś and C. Ryll-Nardzewski, *On applications of Tychonov's Theorem in mathematical proofs*, Fund. Math. 38 (1951), pp. 233–237.
[6] W. A. J. Luxemburg, *Two applications of the method of construction by ultrapowers to analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), pp. 416–419.
[7] — *Reduced Powers of the real number system and equivalents of the Hahn-Banach Theorem*, in W. A. J. Luxemburg (ed.), *Applications of model theory to algebra, analysis and probability*, New York 1969.
[8] P. Suppes, *Axiomatic Set Theory*, Princeton N. J. 1960.

Mathematical Institute, Oxford

Reçu par la Rédaction le 30. 5. 1972

Quelques remarques sur les familles de fonctions de Baire de première classe

par

Zbigniew Grande (Gdańsk)

Résumé. Soit R l'ensemble des nombres réels. Soit E un espace métrique, complet, séparable et parfait.

Dans ce travail j'introduis des classes de fonctions qui sont ponctuellement discontinues dans des ensembles de l'espace E et j'examine les relations entre ces classes, la classe des fonctions step-like et la classe des fonctions jouissant de la propriété (P). Les deux dernières classes ont été introduites par D. E. Peek dans son travail [4]. Dans le cas où $E = R$, j'examine les relations entre ces classes, la classe des fonctions jouissant de la propriété de Darboux, la classe des fonctions dérivées, et la classe des fonctions approximativement continues.

Dans le travail [4] D. E. Peek a introduit des sous-classes intéressantes de fonctions de Baire de classe 1: les fonctions step-like et les fonctions jouissant de la propriété (P). La définition de la fonction jouissant de la propriété (P) peut être obtenue en remplaçant dans la condition nécessaire et suffisante d'une fonction de Baire de classe 1 l'ensemble parfait par une somme dénombrable d'ensembles parfaits.

Dans ce travail j'introduis des fonctions semblables aux fonctions jouissant de la propriété (P) en remplaçant la somme d'ensembles parfaits par des ensembles jouissant d'autres propriétés. Je vais examiner les relations entre les classes des fonctions définies de cette manière et aussi les fonctions jouissant de la propriété de Darboux; parmi elles les fonctions dérivées et les fonctions approximativement continues.

Soit R l'ensemble des nombres réels.

Soit E un espace métrique, complet, séparable et parfait.

Soit μ une mesure définie sur un σ-corps K d'ensembles de l'espace E. Admettons, en outre, que μ soit σ-finie, sans-atomique et telle que tous les ensembles ouverts et non vides de l'espace E appartiennent à K et soient de mesure μ positive. Désignons respectivement par μ^* et $\overline{\mu}$ la mesure extérieure générée par la mesure μ, et le complété de la mesure μ.

J'introduis les notations suivantes:

$G_1 = \{X \subset E;\ X \neq \emptyset\}$,

$G_2 = \{X \subset E;\ X \neq \emptyset \text{ et } X \text{ est dénombrable}\}$,

$G_3 = \{X \subset E;\ X \neq \emptyset$ et $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, où tous les ensembles A_n sont parfaits$\}$,

$G_4 = \{X \subset E;\ X \neq \emptyset$ et $\mu^*(X) > 0\}$,

$G_5 = \{X \subset E;\ X \neq \emptyset$, X est du type F_σ et $\mu(X) > 0\}$.

Soient $f\colon E \to R$ et $X \subset E$. En restreignant les arguments de la fonction f à l'ensemble X, on obtient une fonction partielle, désignée par $f/_X$. Désignons par U la classe des ensembles ouverts de l'espace E.

Posons:

$S(E) = \{f\colon E \to R;\ \bigwedge_{\emptyset \neq X \subset E,}\ \bigvee_{U \ni U_1 \subset E} U_1 \cap X \neq \emptyset$ et $f/_{U_1 \cap X} = \text{const}\}$ (voir [4], définition 2),

$G_i(E) = \{f\colon E \to R;\ \bigwedge_{X \in G_i}\ \bigvee_{x_0 \in X}$ x_0 est un point de continuité de la fonction partielle $f/_X$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)\}$,

$D_a(R) = \{f\colon R \to R;\ f$ est approximativement continue et bornée$\}$,

$D_d(R) = \{f\colon R \to R;\ f$ est une fonction dérivée$\}$,

$D(R) = \{f\colon R \to R;\ f$ jouit de la propriété de Darboux$\}$,

$B_a(E) = \{f\colon E \to R;\ f$ est une fonction de Baire de classe $a\}$.

On voit aussitôt que:

COROLLAIRE 1. *$G_1 \supset G_2$, $G_1 \supset G_3$ et $G_1 \supset G_4 \supset G_5$.*

COROLLAIRE 2. *Si, $G_i \supset G_j$, $G_i(E) \subset G_j(E)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 5)$. On sait, que $D_a(R) \subsetneqq D_p(R) \subsetneqq D(R) \cap B_1(R)$.*

THÉORÈME 1. *$S(E) \subsetneqq G_1(E) = G_2(E) \subsetneqq G_3(E) \subsetneqq B_1(E)$.*

Démonstration. D'après les définitions et le théorème de Baire on a:

$$S(E) \subset G_1(E) \subset G_3(E) \subset B_1(E) \quad \text{et} \quad G_1(E) \subset G_2(E).$$

Posons $f(x) = x$ pour $x \in R$. La fonction $f \in G_1(R)$ et $f \notin S(R)$. Dans le travail [4] D. E. Peek a démontré qu'il existe une fonction $g \in B_1(R)$ telle que $g \notin G_3(R)$.

Désignons par W l'ensemble des nombres rationnels.

Posons

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \notin W, \\ \dfrac{1}{q} & \text{pour } x \in W \text{ et } x = \dfrac{p}{q} \text{ ou } (p, q) = 1. \end{cases}$$

La fonction $h/_W$ n'est continue en aucun point de l'ensemble W. On a donc $W \in G_2$ et $h \notin G_2(R)$. Soit l'ensemble $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ où tous les ensembles A_n sont parfaits. Alors il existe un point $x_0 \in A \cap W'$ (W' désigne le complémentaire de l'ensemble A). La fonction $h/_A$ est continue au point x_0 et $h \in G_3(R)$.

Il reste à prouver que $G_2(E) \subset G_1(E)$.

Admettons, pour la démonstration, qu'il existe une fonction $f \in G_2(E)$ et un ensemble $A \neq \emptyset$ tels que la fonction $f/_A$ ne soit continue en aucun point de l'ensemble A. L'espace $E \times R$ est séparable. Il en ressort qu'il existe un ensemble f' dénombrable et dense dans l'ensemble $f/_A$ (le graphe de la fonction $f/_A$). Soit A_1 la projection de l'ensemble f' sur l'espace E. Remarquons que $A_1 \in G_2$. Nous allons démontrer que la fonction $f/_{A_1}$ n'est continue en aucun point de l'ensemble A_1. En effet, admettons que la fonction $f/_{A_1}$ soit continue en un point $x_0 \in A_1 \subset A$. La fonction $f/_A$ n'est pas continue au point x_0. Il en résulte qu'il existe des nombres y_1 et y_2 $(y_1 \neq y_2)$ et deux suites $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{x_n''\}_{n=1}^{\infty}$ de points de l'ensemble A, convergentes vers le point x_0 telles que $\lim_{n\to\infty} f(x_n') = y_1$ et $\lim_{n\to\infty} f(x_n'') = y_2$. L'ensemble $f/_{A_1}$ étant dense dans l'ensemble $f/_A$, il existe deux suites $\{z_n'\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{z_n''\}_{n=1}^{\infty}$ de points de l'ensemble A_1 convergentes vers x_0 telles que $\lim_{n\to\infty} f(z_n') = y_1$ et $\lim_{n\to\infty} f(z_n'') = y_2$. Il en résulte que la fonction $f/_{A_1}$ n'est pas continue au point x_0. On aboutit ainsi à une contradiction et notre théorème est démontré.

THÉORÈME 2. *Si la fonction $f \in S(E)$, l'ensemble $f(E)$ est dénombrable (dans ce sens tout ensemble fini est dénombrable).*

Démonstration. Soit la fonction $f \in S(E)$. Par l'induction transfinie nous allons définir une suite transfinie d'ensembles. Supposons que U_1 soit un ensemble ouvert tel que $\emptyset \neq U_1 \subset E$ et $f/_{U_1}$ soit une fonction constante. Soit β un nombre ordinal. Supposons que tous les ensembles U_a soient définis pour $a < \beta$. Soit U_β un ensemble ouvert tel que $U_\beta \cap (E - \bigcup_{a > \beta} U_a) \neq \emptyset$ et que la fonction $f/_{U_\beta \cap (E - \bigcup_{a<\beta} U_a)}$ soit constante. On a évidemment $E \subset \bigcup_{\beta} U_\beta$.

Posons $F_\beta = E - \bigcup_{a \leqslant \beta} U_a$. Tout ensemble F_β est fermé. Etant une famille bien ordonnée d'ensembles décroissants, $\{F_\beta\}_\beta$ est dénombrable (voir [3], p. 146). Il en ressort que l'ensemble $f(E)$ est dénombrable. Le théorème 2 est démontré.

On a en particulier:

COROLLAIRE 3. *La famille $S(R) \cap D(R)$ coïncide avec la famille des fonctions constantes.*

THÉORÈME 3. *$D_a(R) - G_3(R) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soit $A \subset R$ un ensemble du type G_δ tel que $W \subset A$ et de mesure lebesguienne nulle. L'ensemble $A' = R - A$ est du type F_δ et chaque point $x \in A'$ est point d'épaisseur de l'ensemble A. D'après le lemme 11 du travail [5], il existe une fonction g approximativement continue telle que $g(x) = 0$ pour $x \in A$ et $0 < g(x) \leqslant 1$ pour $x \in A'$.

Nous allons démontrer que la fonction $g/_{A'}$ n'est continue en aucun point de l'ensemble A'. Admettons que la fonction $g/_{A'}$ soit continue en un point $x_0 \in A'$. Posons $a = g(x_0) > 0$. Il existe une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. La fonction g étant approximativement continue, il existe une suite $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A'$ convergente vers x_0 telle que $g(y_n) < \frac{1}{2}a$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Il en résulte que la fonction $g/_{A'}$ n'est pas continue au point x_0. L'ensemble A' étant c-dense en soi (chaque point $x \in A'$ est point de condensation de l'ensemble A'), on conclut du théorème 1 du travail [4] que $g \notin G_3(R)$. Notre théorème est donc complètement démontré.

THÉORÈME 4. $G_4(E) = G_5(E)$.

Démonstration. L'inclusion $G_4(E) \subset G_5(E)$ résulte du corollaire 2.

Il reste donc à montrer que $G_5(E) \subset G_4(E)$. Admettons qu'il existe une fonction $f \in G_5(E)$ et un ensemble A tels que $\mu^*(A) > 0$ et la fonction $f/_A$ ne soit continue en aucun point de l'ensemble A.

Soit $c > 0$. Désignons par A_c l'ensemble $\{x \in E$; l'oscillation de $f/_{A\cup\{x\}}$ au point x est $\geqslant c\}$. L'ensemble A_c étant fermé (pour chaque $c > 0$), l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$ est du type F_σ et $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}) > 0$. Il existe par hypothèse un point de continuité p de la fonction partielle $f/\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$.

Soit n_0 un indice tel que $p \in A_{1/n_0}$. Par définition de l'ensemble A_{1/n_0}, l'oscillation de $f/_{A\cup\{p\}}$ au point p est $\geqslant 1/n_0$. Donc la fonction $f/\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$ n'est pas continue au point p, car $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$. On aboutit ainsi à une contradiction.

THÉORÈME 5. *Soit $E = R$. Il existe une fonction $f \in G_5(R)$ qui n'est pas mesurable au sens de Baire.*

Démonstration. Soit $A \neq \emptyset$ un ensemble parfait, non dense, de mesure (lebesguienne) nulle. Il existe un ensemble $A^+ \subset A$ qui est totalement imparfait (ensemble non vide qui ne contient aucun ensemble parfait non vide) (voir [2], p. 202) et nonborélien.

Posons:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \notin A^+, \\ 1 & \text{pour} \quad x \in A^+. \end{cases}$$

On prouve facilement que f n'est pas une fonction de Baire et $f \in G_5(R)$. Le théorème 5 est démontré.

THÉORÈME 6. *Si la fonction $f \in G_5(E)$, elle est $\overline{\mu}$-mesurable.*

Démonstration. Dans la démonstration du théorème 6 nous allons profiter du lemme suivant de Davies (voir [1], lemma 2):

LEMME. *Soit $(X, \mathfrak{X}, \mu_2)$ un espace mesurable tel que $\mu_2(X) < \infty$. Supposons qu'une fonction $f\colon X \to R$ soit telle que pour chaque nombre $\varepsilon > 0$ la classe d'ensembles $F_\varepsilon = \{F \in \mathfrak{X}$; l'oscillation de f est $\leqslant \varepsilon$ sur $F\}$ satisfaisse à la condition suivante:*

Si $C \subset X$ est un ensemble de mesure μ_2 positive, il existe un ensemble $F \in F_\varepsilon$ tel que $\mu_2(F) > 0$ et $F \subset C$.

Alors la fonction f est $\overline{\mu}_2$-mesurable.

Remarquons d'abord que l'hypothèse de la finitude de la mesure μ n'est pas essentielle. Il suffit de supposer la σ-finitude.

Nous allons démontrer que chaque fonction $f \in G_5(E)$ satisfait à l'hypothèse du lemme.

Soit $A \subset E$ et $\mu(A) > 0$. Il existe un ensemble $A_1 \subset A$ qui satisfait à la condition de Denjoy (si U_1 est un ensemble ouvert tel que $U_1 \cap A_1 \neq \emptyset$, alors $\mu(A_1 \cap U_1) > 0$). On voit aussitôt que $A_1 \in G_5$. Par conséquent la fonction $f/_{A_1}$ est continue en un point $x_0 \in A_1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un ensemble ouvert U_2 tel que l'oscillation de $f/_{A_1}$ est $\leqslant \varepsilon$ sur l'ensemble U_2. Donc la fonction f satisfait à l'hypothèse du lemme et elle est $\overline{\mu}$-mesurable.

Le problème suivant reste ouvert:

$\mathrm{Cl}_u(D_a(R) \cap G_3(R)) = D_a(R)$, où $\mathrm{Cl}_u(D_a(R) \cap G_3(R))$ désigne la famille toutes les fonctions qui sont les limites de suites uniformément convergentes de fonctions de la famille $D_a(R) \cap G_3(R)$.

Bibliographie

[1] R. O. Davies, *Separate approximate continuity implies measurability* (sous presse).
[2] F. Hausdorff, *Set theory*, New York 1962.
[3] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1958.
[4] D. E. Peek, *Baire functions and their restrictions to special sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), pp. 303–307.
[5] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), pp. 1–54.

Reçu par la Rédaction le 22. 10. 1972