[11] A. Mostowski. *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund. Math. 32 (1939), pp. 201–252.

[12] J. Myhill and D. Scott, *Ordinal definability*, American Mathematical Society, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XIII, Part 1, pp. 271–278.

[13] D. Pincus, *Support structures for the Axiom of Choice*, J. Symb. Logic 36 (1971), pp. 28–38.

[14] — *Zermelo-Fraenkel consistency results by Fraenkel-Mostowski methods*, J. Symb. Logic 37 (1972), pp. 721–743.

[15] H. Rubin and J. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice*, 1963.

[16] J. R. Shoenfield, *Unramified forcing*, American Mathematical Society, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XIII, Part 1, pp. 357–381.

[17] A. Tarski, *On the existence of large sets of Dedekind cardinals*, Notices of the American Mathematical Society, October 1965, p. 719.

[18] — *Sur les ensembles finis*, Fund. Math. 6 (1924), pp. 45–95.

[19] J. Truss, *On successors in cardinal arithmetic*, Fund. Math. 78 (1973), pp. 7–21.

MATHEMATICAL INSTITUTE
St. Giles, Oxford

Reçu par la Rédaction le 10. 11. 1972

О теореме Виеториса в категории гомотопий и одной проблеме Борсука

С. Богатый (Москва)

Абстракт. Рассматриваются отображения (*) метризуемых компактов, у которых полные прообразы точек аппроксимативно связны в некоторой размерности m [7]. В частности, доказывается аналог теорем Виеториса [23] и Смейла [22]: если для отображения $f\colon X\to Y$ компакта $X\in \mathrm{LC}^m$ на компакт Y прообразы $f^{-1}(y)\in \mathrm{AC}^m$ для всех $y\in Y$, то $Y\in\mathrm{LC}^m$ и индуцированное отображение $f_\#\colon [Z, X]\to[Z, Y]$ (классов $[Z, X]$ гомотопных отображений) биективно, как только $\dim Z\leqslant m$. Это позволяет дать частичный ответ на одну проблему К. Борсука [5]: если для отображения $f\colon X\to Y$ конечномерного компакта X на конечномерный компакт Y прообразы $f^{-1}(y)\in\mathrm{FAR}$ для всех $y\in Y$, то $\mathrm{Sh}\,X = \mathrm{Sh}\,Y$. Кроме этого, в ответ на вопрос К. Борсука [7] доказывается, что фундаментальные абсолютные ретракты это в точности подвижные компакты, которые аппроксимативно связны во всех размерностях.

Пусть X и Y компактные метрические пространства и пусть отображение $f\colon X\to Y$ является на. Теорема Виеториса (как она была доказана Виеторисом [23]) говорит, что если для всех $0\leqslant r\leqslant m$ и всех $y\in Y$, $H_r\big(f^{-1}(y)\big)=0$ (предполагаются гомологии Виеториса по mod два), то индуцированный гомоморфизм $f_*\colon H_r(X)\to H_r(Y)$ является изоморфизмом на для $r\leqslant m$ и на для $r=m+1$. Существуют примеры, показывающие, что аналогичная теорема для гомотопий неверна. Тем не менее, налагая некоторые локальные условия, Смейл [22] доказал аналогичную теорему для гомотопий (ниже приведена ее формулировка для компактных пространств). Пусть $f\colon X\to Y$ отображение связных пространств X и Y, $Y=f(X)$, $X\in\mathrm{LC}^m$ и для всех $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ является локально связным и связным в размерности $m-1$ пространством (т. е. $f^{-1}(y)\in \mathrm{LC}^{m-1}$, C^{m-1}). Тогда $Y\in\mathrm{LC}^m$ и индуцированный гомоморфизм $f_\#\colon \pi_r(X)\to\pi_r(Y)$ является изоморфизмом на для всех $0\leqslant r\leqslant m-1$ и на для $r=m$.

Основная цель данной работы состоит в доказательстве теоремы Виеториса в категории шейпов, в которой на пространства X и $f^{-1}(y)$ не накладывается никаких локальных условий, но, как уже говорилось, в теореме Смейла просто зачеркнуть LC^m и LC^{m-1} нельзя, поэтому от множеств

(*) После представления статьи автор узнал, что некоторые аналогичные результаты получены для точечных отображений в [26], для клеточно-подобных отображений в [27], [28] и для $\mathcal{U}V^n$-отображений в [25].

$f^{-1}(y)$ приходится требовать не C^{m-1}, а некоторое новое глобальное свойство (AC^m [7], а вместо групп $\pi_r(X)$ и $\pi_r(Y)$ рассматривать шейповые (фундаментальные) группы $\underline{\pi}_r(X)$ и $\underline{\pi}_r(Y)$[8, стр. 122]). Логически доказательство теоремы Виеториса состоит из трех частей: 1) Доказательство теоремы Виеториса для гомотопий для „хорошего“ класса пространств X; 2) доказательство совпадения групп $\pi_r(X)$ и $\underline{\pi}_r(X)$ для хорошего класса пространств X; 3) доказательство непрерывности групп $\underline{\pi}_r(X)$ и осуществление предельного перехода. В данной статье будет осуществлена первая часть доказательства. Полностью результаты анонсированы в [4]. В частности, доказывается, что если f есть отображение ANR пространства X на компакт Y, причем $f^{-1}(y) \in \mathrm{FAR}$ для всякой точки $y \in Y$, то $Y \in LC^\infty$ и $f_{\#}$: $[Z, X] \to [Z, Y]$ является взаимно однозначным отображением на для всех конечно-мерных пространств Z. С помощью этой теоремы получается частичный ответ (теорема 6) на проблему К. Борсука, поставленную на Симпозиуме по общей топологии в Херцег-Нови: „Верно ли, что шейп пространства полунепрерывного сверху разбиения компакта X на элементы с тривиальным шейпом тот же что и шейп пространства X?“ [5]. Почти аналогичный частичный ответ на проблему Борсука получил и Андерсон [1], но его доказательство отличается от приведенного здесь и использует теорию бесконечномерных многообразий. (Про теорему Андерсона автор узнал из статьи Мардешича [16]).

Определение 1. Пусть пространство X является замкнутым подмножеством пространства Z. Мы скажем, что X *аппроксимативно связно в Z по пространствам из класса K* (и будем писать $X \in AC(K)_Z$), если для каждой окрестности UX пространства X в Z существует такая окрестность VX пространства X в Z, что всякое отображение f: $Y \to VX$ любого пространства Y из класса K гомотопно нулю в окрестности UX.

Пусть класс K состоит из сфер S^n, где $n \leqslant m$, тогда вместо $X \in AC(K)_Z$ мы будем писать $X \in AC^m_Z$ и говорить, что X аппроксимативно m-связно в пространстве Z [7].

Определение 2. Мы будем писать $X \in AC(K)$, если существует ANR пространство $Z \supset X$, что $X \in AC(K)_Z$.

Точно также как доказывается, что свойство подвижности компакта X не зависит от того какое ANR пространство Z берется в качестве объемлющего пространства [3], можно доказать, что свойство $X \in AC(K)$ является „абсолютным“, т. е. не зависит от того каким берется объемлющее ANR пространство Z и как лежит в нем множество X, а зависит лишь от топологии пространства X.

Определение 3. Мы будем говорить, что пространство X *гомотопически связно по пространствам из класса K* (и будем писать $X \in C(K)$), если для всякого пространства $Y \in K$ любое отображение f: $Y \to X$ гомотопно нулю в X.

Ясно, что $X \in AC(K)_X$ тогда и только тогда, когда $X \in C(K)$, поэтому из „абсолютности“ свойства $AC(K)$ следует, что если $X \in \mathrm{ANR}$, то $X \in AC(K)$ тогда и только тогда, когда $X \in C(K)$. Отсюда следует, что ANR пространство X является аппроксимативно m-связным ($X \in AC^m$) тогда и только тогда, когда X гомотопически m-связно ($X \in C^m$). Кроме того, если $X \in \mathrm{FAR}$, то, как следует из [6, теорема 9.1], $X \in AC(K)$ для любого класса K, а из $X \in AC(K)$, где класс K содержит пространство X, следует, что $X \in \mathrm{FAR}$. Оказывается, что для хороших классов K „абсолютность“ свойства $AC(K)$ верна не только в ANR пространствах, но и в некоторых других пространствах. Например,

Теорема 1. *Пусть Z и Y являются компактными пространствами, $Z, Y \in LC^m$, X является замкнутым подмножеством как в Z так и в Y, а K — некоторый класс полиэдров размерности $\leqslant m$. Тогда из $X \in AC(K)_Z$ следует $X \in AC(K)_Y$ и наоборот.*

Для доказательства этой теоремы воспользуемся теоремами, доказанными в работах [14, 20]. Следующую теорему можно найти в [14], где дано и определение соответствующих терминов.

Теорема 2. *Если X компакт и $X \in LC^m$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta = \eta^m(X, \varepsilon) > 0$, что всякая частичная реализация диаметра $< \eta$ конечного полиэдра размерности $\leqslant m+1$ может быть продолжена в полную реализацию диаметра $< \varepsilon$.*

Если f и g два отображения компактного пространства X в пространство Y, то под $\varrho(f, g)$ мы будем понимать $\sup\{\varrho(f(x), g(x)): x \in X\}$. Следующая теорема является специальным случаем теорем из [20].

Теорема 3. *Пусть дано компактное множество F в LC^m пространстве X и $\varepsilon > 0$, тогда найдется $\eta = \eta^m(\varepsilon, F) > 0$ со следующим свойством: Если P полиэдр размерности $\leqslant m$, а f_0 и f_1 отображения P в F, удовлетворяющие $\varrho(f_0, f_1) < \eta$, то найдется гомотопия f_t: $P \to X$ между f_0 и f_1 такая, что для всех $x \in P$ кривая $\{f_t(x): 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ имеет диаметр $< \varepsilon$.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $X \subseteq Y$ и $X \subseteq Z$. Так как X замкнуто в Y и в Z, то можно считать, что метрики, индуцированные на X из пространств Y и Z совпадают, поэтому метрики на Y и Z будут обозначаться одной буквой ϱ.

Пусть $U_Y X$ произвольная окрестность компакта X в пространстве Y. Существует число $\alpha > 0$, что $O_Y(X, \alpha) \subset U_Y X$. Построим число $\eta_2' = \eta_Y^m\left(\frac{1}{2}\alpha, \overline{O(X, \frac{1}{2}\alpha)}\right)$, о котором говорится в теореме 3. Пусть $\eta_2 = \min(3\alpha, \eta_2')$. По числу $\frac{1}{6}\eta_2$ построим число $\eta_1' = \eta_Y^m(Y, \frac{1}{6}\eta_2)$, о котором говорится в теореме 2. Положим $\eta_1 = \min(\frac{1}{3}\eta_1', \frac{1}{6}\eta_2)$. Пусть $U_Z X = O_Z(X, \eta_1)$. Т. к. $X \in AC(K)_Z$, то для окрестности $U_Z X$ существует окрестность $V_Z X$, которая удовлетворяет условиям определения 1. Т. к. X компакт, то существует $\gamma > 0$, что $O_Z(X, \gamma) \subset V_Z X$. По числу γ можно построить число $\eta_0' = \eta_Z^m(Z, \gamma)$, о котором говорится в теореме 2. Пусть $\eta_0 = \min(\frac{1}{3}\eta_0', \frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{6}\eta_2)$.

Утверждается, что окрестность $V_Y X = O_Y(X, \eta_0)$ удовлетворяет условиям определения 1 для окрестности $U_Y X$ в пространстве Y.

Пусть дано произвольное отображение $f\colon P \to O_Y(X, \eta_0)$, где $P \in K$. Существует такая триангуляция T_1 полиэдра P, что $\operatorname{diam} f(\sigma_0) < \eta_0$ для всех $\sigma_0 \in T_1$. Для каждой точки $x \in O_Y(X, \eta_0)$ существует точка $x_{\eta_0} \in X$, что $\varrho(x, x_{\eta_0}) < \eta_0$. Пусть v_0 вершина полиэдра P в триангуляции T_1. Положив $f'_{\eta_0}(v_0) = (f(v_0))\eta_0$, мы получаем отображение $f'_{\eta_0}\colon P^0 \to X$, где P^0 нульмерный остов полиэдра P при триангуляции T_1, причем $\varrho(f'_{\eta_0}, f|_{P^0}) < \eta_0$. Т. к.

$$\operatorname{diam} f'_{\eta_0}(\sigma_0 \cap P^0) \leqslant \operatorname{diam} f(\sigma_0 \cap P^0) + 2\varrho(f'_{\eta_0}, f|_{P^0}) \leqslant \eta_0 + 2\eta_0 = 3\eta_0 \leqslant \eta'_0,$$

то $f'_{\eta_0}\colon P^0 \to X$ является частичной η'_0 реализацией. Отображение $f'_{\eta_0}\colon P^0 \to X$ можно рассматривать и как отображение $f'_{\eta_0} \cdot P^0 \to X \subset Z$, поэтому из выбора числа η'_0 следует существование такого продолжения $f_{\eta_0}\colon P \to Z$, что $\operatorname{diam} f_{\eta_0}(\sigma_0) < \gamma$ для всех $\sigma_0 \in T_1$. Отсюда следует, что

$$f_{\eta_0}(P) \subset O_Z(X, \gamma), \quad \text{т. е.} \quad f_{\eta_0}\colon P \to O_Z(X, \gamma) \subset V_Z X.$$

Из условия $X \in \mathrm{AC}(K)_Z$ и выбора окрестностей $V_Z X$ и $U_Z X = O_Z(X, \eta_1)$ вытекает существование такого отображения $\mathcal{F}_{\eta_0}\colon P \times I \to O_Z(X, \eta_1)$, что $\mathcal{F}_{\eta_0}|_{P\times\{0\}} = f_{\eta_0}$ и $\mathcal{F}_{\eta_0}|_{P\times\{1\}}$ — постоянное (т. е. нулевое) отображение. Пусть T такая триангуляция полиэдра $L = P \times I$, что $\operatorname{diam} \mathcal{F}_{\eta_0}(\sigma_0) < \eta_1$ для всех $\sigma_0 \in T$. Также как раньше по f было построено f'_{η_0} можно построить такое отображение $R'_{\eta_1} = (\mathcal{F}_{\eta_0})'_{\eta_1}\colon L^0 \to X$, где L^0 нульмерный остов полиэдра $L = P \times I$ при триангуляции T, что $\operatorname{diam} R'_{\eta_1}(\sigma_0 \cap L^0) < 3\eta_1 \leqslant \eta'_1$. R'_{η_1} можно рассматривать и как отображение $R'_{\eta_1}\colon L^0 \to X \subset Y$. Из выбора числа η'_1 следует существование отображения $R\colon L \to Y$, что $R|_{L^0} = R'_{\eta_1}$ и $\operatorname{diam} R(\sigma_0) < \frac{1}{6}\eta_2$, где σ_0 произвольный симплекс триангуляции T. Значит

$$R(L) \subset O_Y(X, \tfrac{1}{6}\eta_2), \quad \text{т. е.} \quad R\colon L \to O_Y(X, \tfrac{1}{6}\eta_2) \subset O_Y(X, \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Отображение $F_{\eta_0}|_{P\times\{1\}}$ является постоянным, поэтому

$$\operatorname{diam} R'_{\eta_1}((P \times \{1\}) \cap L^0) < 2\eta_1$$

и имеет место неравенство $\operatorname{diam} R(P \times \{1\}) \leqslant \frac{2}{6}\eta_2 + 2\eta_1 < \eta_2$. Отсюда следует, что если через g обозначить постоянное отображение $g\colon P \to x_0$, где x_0 некоторая точка множества $R(P \times \{1\})$, то $\varrho(R|_{P\times\{1\}}, g) < \eta_2$. Оценим расстояние между отображениями $R|_{P\times\{0\}}$ и f. Пусть $p \in P$. Если p — вершина при триангуляции T_1, то $R(p) = R'_{\eta_0}(p) = \mathcal{F}_{\eta_0}(p) = f_{\eta_0}(p) = f'_{\eta_0}(p)$, поэтому

$$\varrho(R(p), f(p)) = \varrho(f'_{\eta_0}(p), f(p)) < \eta_0 < \eta_2.$$

Пусть $p \in P$ и p — вершина полиэдра $L = P \times I$ при триангуляции T. Существует симплекс $\sigma_0 \in T_1$, что $p \in \sigma_0$. Пусть v_0 некоторая вершина симплекса σ_0.

$$\begin{aligned}
\varrho(f(p), R(p)) &\leqslant \varrho(f(p), f(v_0)) + \varrho(f(v_0), R(p)) \leqslant \\
&\leqslant \eta_0 + \varrho(f(v_0), f'_{\eta_0}(v_0)) + \varrho(f'_{\eta_0}(v_0), R(p)) \leqslant \\
&\leqslant \eta_0 + \eta_0 + \varrho(f'_{\eta_0}(v_0), R(p)) \leqslant \\
&\leqslant 2\eta_0 + \varrho(f_{\eta_0}(v_0), \mathcal{F}_{\eta_0}(p)) + \varrho(\mathcal{F}_{\eta_0}(p), R(p)) \leqslant \\
&\leqslant 2\eta_0 + \varrho(\mathcal{F}_{\eta_0}(v_0), \mathcal{F}_{\eta_0}(p)) + \varrho(\mathcal{F}_{\eta_0}(p), R'_{\eta_1}(p)) < \\
&< 2\eta_0 + 2\eta_1 \leqslant \tfrac{4}{6}\eta_2 < \eta_2.
\end{aligned}$$

Пусть $p \in P$. Существует симплекс $\sigma_0 \in T$, что $p \in \sigma_0$. Пусть v_0 — вершина симплекса σ_0, тогда

$$\varrho(f(v_0), R(v_0)) < \tfrac{4}{6}\eta_2$$

и

$$\begin{aligned}
\varrho(f(p), R(p)) &\leqslant \varrho(f(p), f(v_0)) + \varrho(f(v_0), R(v_0)) + \varrho(R(v_0), R(p)) < \\
&< \eta_0 + \tfrac{4}{6}\eta_2 + \tfrac{1}{6}\eta_2 \leqslant \eta_2.
\end{aligned}$$

Справедливость неравенства $\varrho(f(p), f(v_0)) < \eta_0$ вытекает из того, что каждый симплекс $\sigma_0 \subset P \times \{0\}$ из триангуляции T лежит в некотором симплексе триангуляции T_1. Итак

$$\varrho(f, R|_{P\times\{0\}}) < \eta'_2 \quad \text{и} \quad \varrho(R|_{P\times\{1\}}, g) < \eta'_2,$$

при этом отображения f и $R|_{P\times\{0\}}$, $R|_{P\times\{1\}}$, g отображают P в $O_Y(X, \eta_0)$ и в $O_Y(X, \frac{1}{6}\eta_2)$ соответственно, а, значит, в $O_Y(X, \frac{1}{2}\alpha)$, поэтому из теоремы 3 и выбора числа η'_2 следует существование гомотопий ψ_t и φ_t, связывающих f с $R|_{P\times\{0\}}$ и $R|_{P\times\{1\}}$ с g соответственно, при которых каждая точка $p \in P$ пробегает множество диаметра $< \frac{1}{2}\alpha$. Т. к. f, $R|_{P\times\{0\}}$, $R|_{P\times\{1\}}$, g принадлежат пространству $O_Y(X, \frac{1}{2}\alpha)P$, то гомотопия $H_t(p)$, заданная по формуле:

$$H_t(p) = \begin{cases} \psi_{3t}(p), & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}, \\ R(p, 3t-1), & \text{при } \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3}, \\ \varphi_{3t-2}(p), & \text{при } \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

принадлежит пространству $O_Y(X, \alpha)^P$. Т. к.

$$\psi_{3\cdot\frac{1}{3}}(p) = \psi_1(p) = R(p, 0) = R(p, 3\cdot\tfrac{1}{3}-1)$$

и

$$R(p, 3\cdot\tfrac{2}{3}-1) = R(p, 1) = \varphi_0 = \varphi_{3\cdot\frac{2}{3}-2},$$

то $H_t(p)$ действительно гомотопия, т. к. соответствующее отображение $H\colon P\times I\to O_Y(X, a)\subset U_Y X$ непрерывно. При этом

$$H_0(p)=\psi_0(p)=f(p) \quad \text{и} \quad H_1(p)=\varphi_{3-2}(p)=\varphi_1(p)=g(p)\,,$$

а т. к. g постоянное отображение, то теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $X\in \mathrm{LC}^m$, а K некоторый класс полиэдров, размерность которых $\leqslant m$. Тогда следующие условия эквивалентны:* 1) $X\in \mathrm{AC}(K)$, 2) $X\in \mathrm{C}(K)$.

Доказательство. Пусть $X\in \mathrm{AC}(K)$, т. е. существует $Z\in \mathrm{ANR}$, что $X\in \mathrm{AC}(K)_Z$, но $X\in \mathrm{LC}^m$ поэтому из теоремы 1 следует $X\in \mathrm{AC}(K)_X$, а это означает, что $X\in \mathrm{C}(K)$.

Если $X\in \mathrm{C}(K)$, то $X\in \mathrm{AC}(K)_X$, но тогда для любого $Z\in \mathrm{ANR}$, содержащего X, по теореме 1, $X\in \mathrm{AC}(K)_Z$, т. е. $X\in \mathrm{AC}(K)$.

Следствие 2. *Пусть $X\in \mathrm{LC}^m$ и $n\leqslant m$, тогда следующие условия эквивалентны:* 1) $X\in \mathrm{AC}^m$ и 2) $X\in \mathrm{C}^m$.

Замечание 1. Из [22, теорема 4] получается, что в следствиях 1 и 2 из 2 вытекает 1 даже при $\dim K\leqslant m+1$ и $n\leqslant m+1$. Покажем, что обратное неверно. Пусть, к примеру, $m=-1$. Пусть $X\in \mathrm{LC}^{-1}$, т. е. произвольно и $X\in \mathrm{AC}^0$. В [7] доказано, что $X\in \mathrm{AC}^0$ эквивалентно связности пространства X, но не всякое связное пространство является линейно связным. Итак из $X\in \mathrm{LC}^m$ и AC^{m+1}, действительно нельзя заключить, что $X\in \mathrm{C}^{m+1}$.

Пусть $\underline{X}=\{X_n, P_{n,n'}, N\}$ является обратной последовательностью компактов, а $\{X, P_n\}$ предел этой последовательности, т. е. $X=\mathrm{Invlim}\,\underline{X}$. Прежде всего рассмотрим пространство X^*, определенное как дизъюнктное объединение дубликатов X_n и X. База топологии на X^* состоит из всех открытых множеств $\mathcal{V}_n$ из X_n и из множеств $\mathcal{V}_n^*=\bigcup\limits_{n'\geqslant n}P_{n,n'}^{-1}(\mathcal{V}_n)\cup P_n^{-1}(\mathcal{V}_n)$. Для каждого $n\in N$ определим также отображение $P_n^*\colon X_n^*\to X_n$, где $X_n^*=\bigcup\limits_{n'\geqslant n}X_{n'}\cup X\subset X^*$, полагая $P_n^*|_X=P_n$ и $P_n^*|_{X_{n'}}=P_{n,n'}$, $n\leqslant n'$. Это пространство строится, например, в [18, 21]. Приведем без доказательства две леммы из [18].

Лемма 1. *X^* содержит X и X_n в их первоначальной топологии. Для всякой окрестности $\mathcal{V}$ множества X в X^* найдется номер $n\in N$, что $X_n^*\subset\mathcal{V}$. Отображение $P_n^*\colon X_n^*\to X_n$ непрерывно.*

Лемма 2. *Для всякой системы w открытых в X^* множеств, которая покрывает X, найдется такой номер $n\in N$, что для $n'\geqslant n$ отображения $P_{n'}$ и e_X w-близки в X^* (т. е. для всех $x\in X$ точки $P_{n'}(x)$ и x принадлежат одному элементу w).*

Лемма 3. *Если $\dim X_n\leqslant m+1$ и задано отображение $f\colon X\to Y$ где $Y\in LC^m$, то для каждого $\varepsilon>0$ существует номер n и для всех $n'\geqslant n$ отображения $f_{n'}\colon X_{n'}\to Y$, что $\varrho(f, f_{n'}\circ P_{n'})<\varepsilon$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что X^* сепарабельно и $\dim(X^*\setminus X)\leqslant m+1$, поэтому применима теорема Куратовского [9, стр. 90]. Итак, отображение $f\colon X\to Y$ допускает продолжение $f^*\colon \mathcal{V}\to Y$ на некоторую окрестность $\mathcal{V}$ пространства X в X^*. По лемме 1 найдется такой номер n_0, что $X_{n'}\subset\mathcal{V}$ для $n'\geqslant n_0$. Тогда f^* определено на всем пространстве $X_{n'}$ и можно определить отображение $f_{n'}\colon X_{n'}\to Y$ как ограничение $f_{n'}=f^*|_{X_{n'}}$, $n_0\leqslant n'$. Возьмем открытое покрытие λ пространства Y, диаметр элементов которого $<\varepsilon$. Применим к системе $w=f^{*-1}(\lambda)$ лемму 2. Найдется такой большой индекс $n_\varepsilon\geqslant n_0$, что для всех $n'\geqslant n_\varepsilon$ отображения $P_{n'}$ и e_X w-близки в X^* и, следовательно, $f^*\circ P_{n'}$ и $f^*|_X=f$ λ-близки в Y. Итак, при $n'\geqslant n_\varepsilon$ верно неравенство $\varrho(f, f_{n'}\circ P_{n'})<\varepsilon$ и лемма 3 доказана.

Замечание 2. Если $Y\in \mathrm{LC}^{m+1}$, то согласно теореме 3, „сформулированной для компактов“ (а не для полиэдров) (такая формулировка содержится, например, в [11, стр. 364]), можно дополнительно считать, что отображения f и $f_{n'}\circ P_{n'}$ гомотопны в Y для достаточно больших номеров n'.

Пусть $[L, M]$ означает множество классов гомотопных отображений пространства L в пространство M. Если $f\colon X\to Y$ отображение пространства X в пространство Y, а Z произвольное пространство, то из гомотопности отображений $g_1, g_2\colon Z\to X$ следует, что отображения $f\circ g_1$ и $f\circ g_2$ также гомотопны ($f\circ g_1\simeq f\circ g_2$), поэтому соответствие $g\to f\circ g$ порождает некоторое отображение $f_\#\colon [Z, X]\to[Z, Y]$.

Утверждение 1. *Пусть $Z=\mathrm{Invlim}\,\underline{Z}$, $\dim Z_n\leqslant m$, $Y\in \mathrm{LC}^m$ и отображение $f_\#\colon [Z_n, X]\to[Z_n, Y]$ является эпиморфизмом для всех $n\in N$. Тогда $f_\#\colon [Z, X]\to[Z, Y]$ тоже эпиморфизм.*

Доказательство. Пусть задано отображение $\Psi\colon Z\to Y$. Согласно лемме 3 и замечанию 2 существует номер n_0 и отображение $\Psi_{n_0}\colon Z_{n_0}\to Y$, что $\Psi\simeq\Psi_{n_0}\circ P_{n_0}$. По условию найдется такое отображение $\varphi_{n_0}\colon Z_{n_0}\to X$, что $\Psi_{n_0}\simeq f\circ\varphi_{n_0}$. Поэтому $\Psi\simeq\Psi_{n_0}\circ P_{n_0}\simeq f\circ\varphi_{n_0}\circ P_{n_0}$, следовательно, класс $[\varphi_{n_0}\circ P_{n_0}]$ при $f_\#$ переходит в класс $[\Psi]$, т. е. $f_\#$ — на.

Утверждение 2. *Пусть $Z=\mathrm{Invlim}\,\underline{Z}$, $\dim Z_n\leqslant m$, X, $Y\in \mathrm{LC}^m$ и отображение $f_\#\colon [Z_n, X]\to[Z_n, Y]$ взаимно однозначно для всех $n\in N$. Тогда $f_\#\colon [Z, X]\to[Z, Y]$ тоже взаимно однозначно.*

Доказательство. Пусть нам заданы два отображения $\varphi, \Psi\colon Z\to X$, что $f\circ\varphi\simeq f\circ\Psi$. Рассмотрим пространство Z^*, построение которого было приведено раньше. $X\in \mathrm{LC}^m$, поэтому существует окрестность UZ пространства Z в Z^* и отображения $\varphi^*\colon UZ\to X$ и $\Psi^*\colon UZ\to X$, что $\varphi^*\circ P_{n'}\simeq\varphi$ и $\Psi^*\circ P_{n'}\simeq\Psi$ для всех достаточно больших n'. По условию известно, что $f\circ\varphi^*|_Z=f\circ\varphi\simeq f\circ\Psi=f\circ\Psi^*|_Z$, а $Y\in \mathrm{LC}^m$ и

$$\dim\big(UZ\times I\setminus(Z\times I\cup UZ\times\{0\}\cup UZ\times\{1\})\big)\leqslant m+1\,,$$

поэтому найдётся окрестность VZ пространства Z в Z^*, что $f\circ\varphi^*|_{VZ}\simeq f\circ\Psi^*|_{VZ}$. Но окрестность VZ содержит все $Z_{n''}$ при достаточно больших n'', поэтому найдется такой большой номер n, что $f\circ\varphi^*|_{Z_n}\simeq f\circ\Psi^*|_{Z_n}$ и $\varphi^*\circ P_n\simeq\varphi$, $\Psi^*\circ P_n\simeq\Psi$. По условию отображение $f_{\#}$ на пространствах Z_n взаимно однозначно, поэтому $\varphi^*|_{Z_n}\simeq\Psi^*|_{Z_n}$ и тогда $\varphi\simeq\varphi^*\circ P_n\simeq\Psi^*\circ P_n\simeq\Psi$, т. е. $f_{\#}$ взаимно однозначно для пространства Z.

Утверждение 3. *Пусть R такое пространство, что $f_{\#}\colon [R, X]\to[R, Y]$ взаимно однозначное отображение (отображение на), и R гомотопически доминирует над пространством Z, т. е. $R\underset{h}{\geqslant} Z$, тогда $f_{\#}\colon [Z, X]\to[Z, Y]$ является взаимно однозначным отображением (отображением на).*

Доказательство. Так как пространство R гомотопически доминирует над пространством Z, то существуют отображения $g_1\colon Z\to R$ и $g_2\colon R\to Z$, что $e_Z\simeq g_2\circ g_1$. Пусть даны два таких отображения $\varphi, \Psi\colon Z\to X$, что $f\circ\varphi\simeq f\circ\Psi$. Тем более $f\circ\varphi\circ g_2\simeq f\circ\Psi\circ g_2$. По условию $f_{\#}$ взаимно однозначно на R, поэтому $\varphi\circ g_2\simeq\Psi\circ g_2$. Тогда $\varphi\circ g_2\circ g_1\simeq\Psi\circ g_2\circ g_1$ и

$$\varphi=\varphi\circ e_Z\simeq\varphi\circ g_2\circ g_1\simeq\Psi\circ g_2\circ g_1\simeq\Psi\circ e_Z=\Psi .$$

Вторая часть доказывается аналогично.

Определение 4 [24]. Мы будем писать $\Delta X\leqslant m$, если существует компакт Z размерности $\leqslant m$, что $Z\underset{h}{\geqslant} X$.

Из определения следует, что $\Delta X\leqslant \dim X$.

Теорема 4. *Пусть дано отображение $f\colon X\to Y$ компакта X на компакт Y, что $f^{-1}(y)\in \mathrm{AC}_X^m$ для всех $y\in Y$. Тогда $Y\in\mathrm{LC}^m$, $f_{\#}\colon [P, X]\to[P, Y]$ является взаимно однозначным отображением на для всех полиэдров размерности $\leqslant m$ и $f_{\#}\colon [Z, X]\to[Z, Y]$ является отображением на для всех таких компактов Z, что $\Delta Z\leqslant m$. При этом, если известно, что $Y\in\mathrm{LC}^{m+1}$, то $f_{\#}\colon [Z, X]\to[Z, Y]$ является на для всех таких компактов Z, что $\Delta Z\leqslant m+1$.*

Доказательство этой теоремы похоже на доказательство теоремы Смейла, приведенное в [9].

Введем сначала некоторые обозначения. Для всякой точки $y\in Y$ и для любого $\varepsilon>0$ положим

$$V(y, \varepsilon)=\{y'\in Y\colon\ \varrho(y, y')<\tfrac12\varepsilon\} . \tag{1}$$

Очевидно, $V(y, \varepsilon)$ — открытое подмножество в Y с диаметром $\leqslant\varepsilon$. Полагая

$$\mho(y, \varepsilon)=f^{-1}\big(V(y, \varepsilon)\big) , \tag{2}$$

мы получаем открытое подмножество пространства X, содержащее $f^{-1}(y)$. Из условия $f^{-1}(y)\in\mathrm{AC}_X^m$ следует, что для любой точки $y\in Y$ найдется такое

открытое подмножество $G(y, \varepsilon)$ пространства X, что

$$f^{-1}(y)\subset G(y, \varepsilon)\subset\mho(y, \varepsilon) , \tag{3}$$

(4) всякое отображение $g\colon S^n\to G(y, \varepsilon)$ гомотопно нулю в $\mho(y, \varepsilon)$ при $n\leqslant m$.

Поскольку $f^{-1}(y)\subset G(y, \varepsilon)$, существует такая открытая окрестность $W(y, \varepsilon)$ точки y в пространстве Y, что

$$f^{-1}\big(W(y, \varepsilon)\big)\subset G(y, \varepsilon) . \tag{5}$$

Из компактности пространства Y вытекает, что найдется положительное $\eta=\eta(\varepsilon)<\frac12\varepsilon$ для которого

(6) Всякое подмножество пространства Y с диаметром $<\eta$ содержится по крайней мере в одном из множеств $W(y, \varepsilon)$.

Из (5), (2) и (3) следует, что

$$W(y, \varepsilon)\subset V(y, \varepsilon) . \tag{7}$$

Вплость до конца доказательства теоремы обозначения X,

$$Y, f, \varepsilon, \eta=\eta(\varepsilon), G(y, \varepsilon), \mho(y, \varepsilon), V(y, \varepsilon), W(y, \varepsilon)$$

будут употребляться в том же смысле, что и выше.

Лемма 4. *Пусть P полиэдр размерности $\leqslant m+1$, тогда множество всех отображений вида $f\circ g$, где $g\in X^P$, всюду плотно в пространстве Y^P.*

Доказательство. Если $\dim P=0$, то полиэдр P состоит из конечного числа точек $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Пусть $\Psi\in Y^P$. Так как $Y=f(X)$, то для каждого $i=1, 2, \ldots, k$ существует такая точка $x_i\in X$, что $f(x_i)=\Psi(p_i)$. Положив $g(p_i)=x_i$ для каждого $i=1, 2, \ldots, k$, мы получим такое отображение $g\colon P\to X$, что $fg(p_i)=\Psi(p_i)$ при всех $i=1, 2, \ldots, k$. Следовательно, в этом случае любое отображение $\Psi\colon P\to Y$ имеет вид $f\circ g$.

Предположим теперь, что отображения вида $f\circ g$ составляют всюду плотное подмножество пространства Y^P при $\dim P\leqslant n$ и перейдем к случаю $\dim P=n+1$ (конечно, в предположении, что $n\leqslant m$). Пусть $\Psi\in Y^P$. Для любого $\varepsilon>0$ существует такая триангуляция T полиэдра P, что образ всякого ее симплекса $\sigma_0\in T$ при отображении Ψ есть подмножество пространства Y с диаметром $<\frac13\eta=\frac13\eta(\varepsilon)$. Пусть P' означает n-мерный остов триангуляции T. Из того факта, что P' есть n-мерный полиэдр, вытекает по предположению индукции, что ограничение $\Psi'=\Psi|_{P'}$ может быть аппроксимировано отображениями вида $f\circ g'$, где $g'\in X^{P'}$. При достаточно хорошей аппроксимации мы будем иметь $\varrho(\Psi', f\circ g')<\frac13\eta$, откуда

$$\operatorname{diam}\big(\Psi(\sigma_0)\cup fg'(\sigma_0\cap P')\big)<\eta=\eta(\varepsilon) .$$

Из предложения (6) следует, что найдется точка $y_0 \in Y$ для которой

$$\Psi(\sigma_0) \cup fg'(\sigma_0 \cap P') \subset W(y_0, \varepsilon)\,. \tag{8}$$

Причем это верно для всякого $(n+1)$-мерного симплекса $\sigma_0 \in T$.

Из соотношения (5) следует, что $f^{-1}\big(fg'(\sigma_0 \cap P')\big) \subset G(y_0, \varepsilon)$, а из условия (4) и из того, что $\sigma_0 \cap P'$ гомеоморфно S^n и $n \leqslant m$ следует, что отображение

$$g'|_{\sigma_0 \cap P'}\colon\ \sigma_0 \cap P' \to f^{-1}\big(fg'(\sigma_0 \cap P')\big) \subset G(y_0, \varepsilon)$$

гомотопно нулю в множестве $\mho(y_0, \varepsilon)$. Следовательно, отображение g' допускает непрерывное продолжение на весь симплекс σ_0 со значениями, принадлежащими множеству $\mho(y_0, \varepsilon)$. Применив эту процедуру ко всем $(n+1)$-мерным симплексам $\sigma_0 \in T$, мы получим отображение $g\colon P \to X$, являющееся продолжением отображения g'. Для любой точки $p \in P'$ мы имеем $fg(p) = fg'(p)$, поэтому неравенство $\varrho\big(fg(p), \Psi(p)\big) < \varepsilon$ вытекает из неравенства $\varrho(f \circ g', \Psi') < \frac{1}{3}\eta \leqslant \frac{1}{6}\varepsilon < \varepsilon$. Если же $p \in P \setminus P'$, то p принадлежит внутренности некоторого $(n+1)$-мерного симплекса $\sigma_0 \in T$, и, следовательно, $g(p) \in \mho(y_0, \varepsilon)$. Из равенства (2) следует, что $fg(p) \in V(y_0, \varepsilon)$, и мы заключаем, что

$$\varrho\big(fg(p), \Psi(p)\big) \leqslant \varrho\big(fg(p), y_0\big) + \varrho\big(y_0, \Psi(p)\big) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\,,$$

так как $\varrho\big(fg(p), y_0\big) < \frac{1}{2}\varepsilon$ и так как в силу соотношений (8), (7) и (1) $\varrho\big(y_0, \Psi(p)\big) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Итак, мы показали, что $\varrho(f \circ g, \Psi) < \varepsilon$, чем доказательство леммы 1 закончено.

Лемма 5. *Для всякого отображения $\Psi \in Y^P$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\lambda > 0$, что для любых отображений $g,\ g' \in X^P$, удовлетворяющих условиям $\varrho(f \circ g, \Psi) < \lambda$, $\varrho(f \circ g', \Psi) < \lambda$ существует такая гомотопия $\{g_t\} \subset X^P$, что $g_0 = g$, $g_1 = g'$ и для всякой точки $p \in P$ диаметр множества $L_p = \{y = fg_t(p)\colon\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ меньше ε, где P полиэдр размерности $\leqslant m$.*

Доказательство. Если $\dim P = 0$, то P — конечное множество. В этом случае из предложения (6) легко вытекает, что для достаточно малых значений λ точки $fg(p)$ и $fg'(p)$ одновременно принадлежат одному из множеств $W(y, \varepsilon)$. Поэтому в силу (5) $g(p), g'(p) \in f^{-1}\big(W(y, \varepsilon)\big)$, и из условия (4) следует, что существует гомотопия $\{g_t\}$, переводящая в множестве $\mho(y, \varepsilon)$ точку $g(p)$ в точку $g'(p)$. Из равенства (2) следует, что $L_p \subset V(y, \varepsilon)$, и, используя (1), мы заключаем, что диаметр множества L_p меньше ε.

Предположим теперь, что утверждение леммы справедливо при $\dim P \leqslant n$ и перейдем к случаю $\dim P = n+1$ (конечно, в предположении, что $n+1 \leqslant m$). Рассмотрим триангуляцию T полиэдра P, состоящую из симплексов σ столь малого диаметра, что диаметр каждого множества $\Psi(\sigma)$ меньше $\frac{1}{3}\eta$. Если положительное число λ выбрать достаточно малым, то для каждого симплекса $\sigma \in T$ диаметр множества $fg(\sigma) \cup fg'(\sigma)$ также будет меньше $\frac{1}{3}\eta$.

Пусть P' обозначает n-мерный остов триангуляции T. По предположению индукции для достаточно малого $\lambda > 0$ можно построить такую гомотопию $\{g'_t\} \subset X^{P'}$, что $g'_0 = g|_{P'}$, $g'_1 = g'|_{P'}$ и для всякой точки $p \in P'$ диаметр множества $\{fg'_t(p)\colon\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ меньше $\frac{1}{3}\eta$. Положив $g''(p, 0) = g(p)$, $g''(p, 1) = g'(p)$ для всякой точки $p \in P$, $g''(p, t) = g'_t(p)$ для всякой точки $p \in P'$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$, мы получим отображение подмножества

$$R = (P \times \{0\}) \cup (P' \times [0, 1]) \cup (P \times \{1\})$$

декартова произведения $P \times [0, 1]$ в пространство X. Пусть σ_0 — какой-нибудь $(n+1)$-мерный симплекс триангуляции T. Тогда диаметр множества $fg''(\sigma_0 \times [0, 1] \cap R)$ меньше η. Из предложения (6) следует, что найдется такая точка $y_0 \in Y$, что $fg''(\sigma_0 \times [0, 1] \cap R) \subset W(y_0, \varepsilon)$. В силу соотношения (5) имеют место включения

$$\begin{aligned} g''(\sigma_0 \times [0, 1] \cap R) &\subset f^{-1}fg''(\sigma_0 \times [0,1] \cap R) \\ &\subset f^{-1}\big(W(y_0, \varepsilon)\big) \subset G(y_0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Из условия (4) и того, что $(\sigma_0 \times [0, 1] \cap R)$ гомеоморфно S^{n+1} и $n+1 \leqslant m$ вытекает, что $g''|_{\sigma_0 \times [0,1] \cap R}$ гомотопно нулю в множестве $\mho(y_0, \varepsilon)$. Следовательно, отображение $g''|_{\sigma_0 \times [0,1] \cap R}$ допускает непрерывное продолжение на все множество $\sigma_0 \times [0, 1] \cap R$ со значениями во множестве $\mho(y_0, \varepsilon)$. Применив эту процедуру к каждому $(n+1)$-мерному симплексу $\sigma_0 \in T$, мы построим отображение $\hat{g}\colon P \times [0, 1] \to X$. Положив $g_t(p) = \hat{g}(p, t)$ для всех $(p, t) \in P \times [0, 1]$, мы получим гомотопию $\{g_t\} \subset X^P$, связывающую отображения $g_0 = g$ и $g_1 = g'$. Далее, поскольку для любой точки $p \in P$ все значения $fg_t(p)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ принадлежат одному из множеств $f\big(\mho(y, \varepsilon)\big) = V(y, \varepsilon)$, мы заключаем, что диаметр множества L_p меньше ε. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть P — полиэдр размерности $\leqslant m$, тогда для каждого отображения $\Psi\colon P \to Y$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует отображение $g\colon P \to X$, что $\Psi \simeq f \circ g$, $\varrho(\Psi, f \circ g) < \varepsilon$ и более того, каждая точка $p \in P$ пробегает при этой гомотопии множество диаметра $< 2\varepsilon$.*

Доказательство. По лемме 4 в пространстве X^P можно выбрать такую последовательность отображений $g_1, g_2, \ldots$, что $\varrho(f \circ g_i, \Psi) < \lambda_i$, причем $\lambda_i < \frac{1}{2}\varepsilon$ и $\lim\limits_{i \to \infty} \lambda_i = 0$. Далее, согласно лемме 5 можно считать, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ существует такая гомотопия $\{g_{i,t}\} \subset Y^P$, что $g_{i,0} = f \circ g_i$, $g_{i,1} = f \circ g_{i+1}$ и для всякой точки $p \in P$ диаметр множества $\{g_{i,t}(p)\colon\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ меньше некоторого $\varepsilon_i > 0$, причем $\varepsilon_i < \frac{1}{2}\varepsilon$ и $\lim\limits_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$. Легко видеть, что, положив $\Psi_t(p) = g_{i,(i+1)(1-it)}(p)$ для всякой точки $p \in P$ и $\dfrac{1}{i+1} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{i}$,

$\Psi_0(p) = \Psi(p)$ для всякой точки $p \in P$, мы получаем гомотопию $\{\Psi_t\} \subset Y^P$. При этом, если $t \in \left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]$, то $\varrho(\Psi(p), \Psi_t(p)) \leqslant \lambda_i + \varepsilon_i \leqslant \varepsilon$, поэтому гомотопия непрерывна при $t = 0$ (при $t \neq 0$ непрерывность гомотопии $\{\Psi_t\}$ следует из непрерывности $g_{i,t}$ и того, что $g_{i+1,0} = g_{i,1}$) и каждая точка $p \in P$ пробегает при гомотопии $\{\Psi_t\}$ множество диаметра $< 2\varepsilon$. Гомотопия $\{\Psi_t\}$ связывает отображения $\Psi_0 = \Psi$ и $\Psi_1 = f \circ g_1$, поэтому если за отображение g взять отображение g_1, то лемма будет доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть задано $\varepsilon > 0$ и пусть Ψ — отображение n-мерной сферы S^n на подмножество пространства Y, диаметр которого $\leqslant \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}\eta(\varepsilon)$ и $n \leqslant m$. Чтобы доказать, что $Y \in \mathrm{LC}^m$ достаточно показать существование такой гомотопии $\{\varphi_t\} \subset Y^{S^n}$, что $\varphi_0 = \Psi$, $\varphi_1 = \mathrm{const}$ и множество всех значений всех отображений φ_t имеет диаметр $\leqslant \varepsilon$.

По лемме 6 существуют отображение $g\colon S^n \to X$ и гомотопия $\{\Psi_t\} \subset Y^{S^n}$, что $\Psi_0 = \Psi$ и $\Psi_1 = f \circ g$, а множество $L_p = \{\Psi_t(p)\colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ имеет диаметр $\leqslant \frac{1}{4}\eta$ для всех $p \in S^n$. Диаметр множества $\{\Psi_t(p)\colon p \in S^n, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ меньше $\frac{1}{2}\eta + 2\cdot\frac{1}{4}\eta = \eta$, поэтому найдется такая точка y, что

$$\{\Psi_t(p)\colon p \in S^n,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset W(y, \varepsilon)\,.$$

Тем более

$$\{\Psi_1(p) = fg(p)\colon p \in S^n\} \subset W(y, \varepsilon)\,.$$

Тогда отображение $g\colon S^n \to f^{-1}(W(y, \varepsilon)) \subset G(y, \varepsilon)$ гомотопно нулю в $\mathcal{V}(y, \varepsilon)$. Значит, отображение Ψ также гомотопно нулю во множестве $V(y, \varepsilon)$.

Проведем доказательство сначала для полиэдров.

То, что $f_{\#}$ является отображением на утверждает лемма 6.

Покажем, что $f_{\#}$ является взаимно однозначным отображением. Пусть $g_1, g_2 \in X^P$ и $f \circ g_1 \simeq f \circ g_2$, т. е. существует $\varphi \in Y^{P \times I}$, что $\varphi|_{P\times\{0\}} = f \circ g_1$ и $\varphi|_{P \times \{1\}} = f \circ g_2$. Т. к. $\dim P \leqslant m$, то по лемме 5 существуют числа λ_1 и λ_2, что если $\varrho(f\circ g_1, f \circ g_1^0) < \lambda_1$, то g_1 гомотопно g_1^0, $\varrho(f \circ g_2, f \circ g_2^0) < \lambda_2$ то g_2 гомотопно g_2^0. Пусть $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$. Т. к. $\dim P \times I \leqslant m+1$, то по лемме 4 существует отображение $\Psi\colon P \times I \to X$, что $\varrho(\varphi, f \circ \Psi) < \lambda$. Пусть $g_1^0 = \Psi|_{P\times\{0\}}$, $g_2^0 = \Psi|_{P \times \{1\}}$, тогда $\varrho(f \circ g_1, f \circ g_1^0) < \lambda$ и $\varrho(f \circ g_2, f \circ g_2^0) < \lambda$, поэтому, из-за выбора числа λ, g_1^0 гомотопно g_1 и g_2^0 гомотопно g_2. Но Ψ — это гомотопия, связывающая отображения g_1^0 и g_2^0, следовательно, отображения g_1 и g_2 гомотопны, т. е. отображение $f_{\#}$ не склеивает „точек".

Пусть теперь известно, что $Y \in \mathrm{LC}^{m+1}$, докажем, что $f_{\#}\colon [P, X] \to [P, Y]$ является „на" для полиэдров P размерности $\leqslant m+1$. Т. к. $\dim P \leqslant m+1$, а $Y \in \mathrm{LC}^{m+1}$ то $Y^P \in \mathrm{LC}^0$ [13, теорема 5, стр. 355] (т. е. пространство Y^P локально линейно связно), а поэтому для каждой точки $\Psi \in Y^P$ существует $\varepsilon > 0$, что как только $\varphi \in Y^P$ и $\varrho(\Psi, \varphi) < \varepsilon$, то точки Ψ и φ можно соединить дугой, т. е. отображения $\Psi\colon P \to Y$ и $\varphi\colon P \to Y$ гомотопны. По лемме 4 для каждого отображения $\Psi\colon P \to Y$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое отображение $g\colon P \to X$, что $\varrho(\Psi, f \circ g) < \varepsilon$. Из сказанного выше следует, что $\Psi \simeq f \circ g$, т. е. $f_{\#}([g]) = [\Psi]$ и тем самым $f_{\#}$ — эпиморфизм.

Пусть теперь Z такой компакт, что $\dim Z \leqslant m$. Тогда Z является пределом обратной последовательности полиэдров размерности $\leqslant m$ [17]. Но для полиэдров P_n теорема доказана, а $Y \in \mathrm{LC}^m$, поэтому из утверждения 1 следует справедливость теоремы и для компакта Z. Если же теперь Z такой компакт, что $\Delta Z \leqslant m$, то справедливость утверждений теоремы для него вытекает из утверждения 3.

Замечание 3. Метод, применяемый в доказательстве утверждений 1, 2 и 3 позволяет некоторые теоремы, доказанные для полиэдров, переносить на более широкие классы пространств. К примеру, пусть X и Y являются компактными связными ANR пространствами. По определению $\Delta_{\mathfrak{T}} X$ [24] обозначает минимум размерностей всех полиэдров, которые доминируют над пространством X. Пусть $N = \max(\Delta_{\mathfrak{T}} X, \Delta_{\mathfrak{T}} Y)$. Уайтхед доказал [24], что если отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует изоморфизм на $f_n\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ для всех $n = 1, 2, \ldots, N-1$, то существует такое отображение $g\colon Y \to X$, что для всяких отображений $\mathcal{F}_1\colon P \to X$ и $G_1\colon P \to Y$, где P — полиэдр размерности $\leqslant N-1$, отображение $\mathcal{F}_1$ гомотопно отображению $g \circ f \circ \mathcal{F}_1$, а отображение G_1 гомотопно отображению $f \circ g \circ G_1$. Так как в этой теореме X и Y являются ANR пространствами, то можно применить технику обратных последовательностей, и, следовательно, в формулировке этой теоремы полиэдр P можно заменить произвольным таким компактом Z, что $\Delta Z \leqslant N-1$. Отсюда получается, что если $\max(\Delta X, \Delta Y) \leqslant N-1$, то f является гомотопической эквивалентностью.

Определение 5. Мы будем говорить, что пространство X *локально связно по пространствам из класса* K (и будем писать $X \in \mathrm{LC}(K)$), если для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности U_x существует окрестность V_x, что любое отображение $f\colon Y \to V_x$, где $Y \in K$, гомотопно нулю в U_x.

Пусть $\mathfrak{T}$ означает класс всех полиэдров. Ясно, что из $X \in \mathrm{LC}$ следует $X \in \mathrm{LC}(\mathfrak{T})$, а из $X \in \mathrm{LC}(\mathfrak{T})$ следует $X \in \mathrm{LC}^\infty$ [9, стр. 34]. Пример компактного букета сфер S^k, где $k = 1, 2, \ldots$, показывает, что из $X \in \mathrm{LC}^\infty$, вообще говоря, не следует $X \in \mathrm{LC}(\mathfrak{T})$, т. е. условие $X \in \mathrm{LC}(\mathfrak{T})$ более сильное, чем условие $X \in \mathrm{LC}^\infty$. Пусть $\mathcal{N}$ означает класс конечно-мерных компактов. Докажем, что *условия* $X \in \mathrm{LC}(\mathfrak{T})$ и $X \in \mathrm{LC}(\mathcal{N})$ *эквивалентны*. Т. к. $\mathcal{N} \supset \mathfrak{T}$, то из $X \in \mathrm{LC}(\mathcal{N})$ следует $X \in \mathrm{LC}(\mathfrak{T})$ и осталось проверить лишь обратное следование. Пусть $x \in X$ и U_x произвольная окрестность точки x в X. Существует такая окрестность V_x, что любое отображение $f\colon P \to V_x$, где $P \in \mathfrak{T}$, гомотопно нулю в U_x. Пусть $M \in \mathcal{N}$ и $g\colon M \to V_x$ произвольное отображение. Покажем, что g гомотопно нулю в U_x. Т. к V_x является открытым подмножеством пространства X, то $V_x \in \mathrm{LC}(\mathfrak{T})$ и, тем более, $V_x \in \mathrm{LC}^\infty$. По условию $M \in \mathcal{N}$, т. е. $\dim M = m_0 < \infty$, следовательно [17], компакт M является пределом обратной последовательности из полиэдров

$\{P_n, f_{n,n'}, \mathcal{N}\}$ размерности $\leqslant m_0$. Согласно лемме 3 и замечанию 2 существует такой номер n_0 и такое отображение $g_{n_0}\colon P_{n_0}\to V_x$, что $g\simeq g_{n_0}\circ f_{n_0}$, где $f_{n_0}\colon M\to P_{n_0}$ — проекция предела. Но окрестность V_x выбрана так, что g_{n_0} гомотопно нулю в U_x, поэтому и отображение g гомотопно нулю в U_x.

Определение 6. Мы будем писать $X\in \mathrm{AC}_Z^\infty$, если $X\in \mathrm{AC}_Z^m$ для всех целых m.

Из следствия 2 легко вытекает

Следствие 3. *Если $X\in \mathrm{LC}^\infty$, то $X\in \mathrm{AC}^\infty$ тогда и только тогда, когда $X\in \mathrm{C}^\infty$.*

Замечание 4. В доказательстве теоремы 4 при построении числа $\eta=\eta(\varepsilon)$ мы не использовали конечности числа m, а только брали окрестность $G(y,\varepsilon)$ для окрестности $\mathcal{V}(y,\varepsilon)$, чтобы она удовлетворяла условиям определения 1, поэтому верна следующая

Теорема 5. *Пусть дано отображение $f\colon X\to Y$ компакта X на компакт Y, что $f^{-1}(y)\in \mathrm{AC}_X^\infty$ и $f^{-1}(y)\in \mathrm{AC}(K)_X$ для всех $y\in Y$, где K — класс некоторых полиэдров. Тогда $Y\in \mathrm{LC}^\infty$, $Y\in \mathrm{LC}(K)$, $f_\#\colon [P,X]\to[P,Y]$ взаимно однозначное отображение на для всех полиэдров P и $f_\#\colon [Z,X]\to[Z,Y]$ отображение на для всех таких компактов Z, что $\Delta Z<\infty$.*

Теорема 4′. *Пусть дано отображение $f\colon X\to Y$ компакта $X\in \mathrm{LC}^m$ на компакт Y, что $f^{-1}(y)\in \mathrm{AC}^m$ для всех $y\in Y$. Тогда $Y\in \mathrm{LC}^m$ и $f_\#\colon[Z,X]\to[Z,Y]$ взаимно однозначное отображение на для всех таких компактов Z, что $\Delta Z\leqslant m$. При этом, если известно, что $Y\in \mathrm{LC}^{m+1}$, то $f_\#\colon [Z,X]\to[Z,Y]$ является на для всех таких компактов Z, что $\Delta Z\leqslant m+1$.*

Доказательство. Если $X\in \mathrm{LC}^m$ и $f^{-1}(y)\in \mathrm{AC}^m$, то по теореме 1 $f^{-1}(y)\in \mathrm{AC}_X^m$ и можно применить теорему 4. Если $X\in \mathrm{LC}^m$, то можно применять утверждение 2 и тем самым теорема 4′ получается из теоремы 4.

Аналогично получается

Теорема 5′. *Пусть дано отображение $f\colon X\to Y$ компакта $X\in \mathrm{LC}^\infty$ на компакт Y, что $f^{-1}(y)\in \mathrm{AC}^\infty$ и $f^{-1}(y)\in \mathrm{AC}(K)_X$ для всех $y\in Y$, где K — класс некоторых полиэдров. Тогда $Y\in \mathrm{LC}^\infty$, $Y\in \mathrm{LC}(K)$ и $f_\#\colon [Z,X]\to[Z,Y]$ является взаимно однозначным отображением на для всех таких компактов Z, что $\Delta Z<\infty$.*

Впредь через $f\colon X\to Y$ мы будем обозначать отображение компакта X на компакт Y.

Следствие 4. *Пусть дано отображение $f\colon X\to Y$, $X\in \mathrm{LC}^m$ и $f^{-1}(y)\in \mathrm{LC}^{m-1}$ и C^m для всех $y\in Y$. Тогда $Y\in \mathrm{LC}^m$ и $f_\#\colon [Z,X]\to[Z,Y]$ является взаимно однозначным отображением на для всех таких компактов Z, что $\Delta Z\leqslant m$.*

Доказательство. Если $f^{-1}(y)\in \mathrm{LC}^{m-1}$ и C^m, то по замечанию 1 $f^{-1}(y)\in \mathrm{AC}^m$ и можно применять теорему 4′.

Замечание 5. Следствие 4 по своему духу примыкает к теореме Смейла [22, стр. 604]. Но т. к. в теореме Смейла $f^{-1}(y)\in \mathrm{LC}^{m-1}$ и C^{m-1}, то она гарантирует в размерности m только эпиморфизм.

Следствие 5 (6) (7). *Пусть дано отображение $f\colon X\to Y$ $X\in \mathrm{LC}^\infty$ и $f^{-1}(y)\in \mathrm{AC}^\infty(\mathrm{LC}^\infty$ и $\mathrm{C}^\infty)$ (C) для всех $y\in Y$. Тогда $Y\in \mathrm{LC}^\infty$ и $f_\#\colon [Z,X]\to[Z,Y]$ является взаимно однозначным отображением на для всех таких компактов Z, что $\Delta Z<\infty$.*

Следствие 8 (9). *Пусть дано отображение $f\colon X\to Y$, $X\in \mathrm{ANR}$ и $f^{-1}(y)\in \mathrm{FAR}(\mathrm{C})$ для всех $y\in Y$. Тогда $Y\in \mathrm{LC}(\mathcal{N})$ и $f_\#\colon [Z,X]\to[Z,Y]$ является взаимно однозначным отображением на для всех таких компактов Z, что $\Delta Z<\infty$.*

Замечание 6. Отметим, что даже если $f^{-1}(y)\in \mathrm{AR}$, то все равно это следствие является новым, потому что условие $Y\in \mathrm{LC}(\mathcal{N})$ сильнее условия $Y\in \mathrm{LC}^\infty$.

Замечание 7. Можно было бы рассмотреть аналогичное следствие в случае $f^{-1}(y)\in \mathrm{AC}(\mathfrak{I})$, но оно было бы бессодержательным, ибо *компакт является аппроксимативно связным по классу всех полиэдров тогда и только тогда, когда он является фундаментальным абсолютным ретрактом.*

Докажем, что *условия $X\in \mathrm{AC}(\mathfrak{I})$ и $X\in \mathrm{FAR}$ равносильны.* Если $X\in \mathrm{FAR}$, то для каждой окрестности UX компакта X в Q существует окрестность VX компакта X в Q, которая стягивается по множеству UX [6]. Из этой теоремы видно, что из $X\in \mathrm{FAR}$ следует $X\in \mathrm{AC}(K)$ для любого класса K (в частности, для $K=\mathfrak{I}$). С другой стороны, если X является абсолютно окрестностно стягиваемым [12], то X является фундаментальным абсолютным ретрактом. Следовательно, если $X\in \mathrm{AC}(K)$, где класс K содержит пространство X, то X является фундаментальным абсолютным ретрактом. Следовательно, если мы покажем, что из $X\in \mathrm{AC}(\mathfrak{I})$ вытекает $X\in \mathrm{AC}(K)$, где K — класс всех компактов, то все будет доказано. Пусть UX произвольная окрестность компакта X в Q. Т. к. $X\in \mathrm{AC}(\mathfrak{I})$, то существует такая окрестность VX компакта X в Q, что любое отображение любого полиэдра в VX гомотопно нулю в UX. X является компактом, а VX его окрестностью, поэтому существует такая призма P_x [9, стр. 119, лемма 4.3], что $X\subseteq \mathrm{Int}P_x\subseteq P_x\subseteq VX$. Утверждается, что любое отображение любого компакта в P_x гомотопно нулю в UX. Пусть $Y\in K$ и $f\colon Y\to P_x$ произвольное непрерывное отображение. Компакт Y является пределом обратной последовательности из полиэдров $\{P_n, f_{n,n'}, N\}$, а P_x является ANR пространством, поэтому [18] существует такой номер n_0 и такое отображение $g\colon P_{n_0}\to P_x$, что $f\simeq g\circ f_{n_0}$, где $f_{n_0}\colon Y\to P_{n_0}$ — проекция предела. Из выбора окрестности VX и из включения $P_x\subseteq VX$ следует, что отображение g гомотопно нулю в UX. Следовательно, и отображение f гомотопно нулю в UX.

Пусть L_m обозначает класс всех компактов, фундаментальная размерность [8] которых не превосходит m. Докажем, что *компакт X является аппроксимативно связным в размерности m тогда и только тогда, когда $X \in \mathrm{AC}(L_m)$*. Содержательным здесь является следование $X \in \mathrm{AC}^m \Rightarrow X \in \mathrm{AC}(L_m)$, которое мы и докажем. Если $X \in \mathrm{AC}^m$, то, как доказано К. Борсуком [7], $X \in \mathrm{AC}(\mathcal{P}_m)$, где $\mathcal{P}_m$ обозначает класс всех полиэдров размерности $\leqslant m$. Если $X \in \mathrm{AC}(\mathcal{P}_m)$, то, применяя технику обратных последовательностей (как в замечании 7), можно доказать, что $X \in \mathrm{AC}(K_m)$, где K_m обозначает класс всех компактов размерности $\leqslant m$. Пусть теперь $X \in \mathrm{AC}(K_m)$. Действуя как в замечании 7, мы построим для любой окрестности UX компакта X в Q такие призмы P_x^1 и P_x^2, что $X \subseteq \operatorname{Int} P_x^1 \subseteq P_x^1 \subseteq \operatorname{Int} P_x^2 \subseteq P_x^2 \subseteq UX$ и любое отображение любого компакта размерности $\leqslant m$ в P_x^1 гомотопно нулю в P_x^2. Пусть Y такой компакт, что $Fd\,Y \leqslant m$ и $\mathcal{F}\colon Y \to P_x^1$ произвольное отображение. Т. к. $Fd\,Y \leqslant m$, то существует такой компакт Z размерности $\leqslant m$ и такие фундаментальные последовательности $\underline{g}_1\colon Y \to Z$ и $\underline{g}_2\colon Z \to Y$, что $\underline{e}_Y \simeq \underline{g}_2 \circ \underline{g}_1$. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\underline{\mathcal{F}}$, которая порождена отображением $\mathcal{F}$. $\underline{\mathcal{F}} \circ \underline{g}_2$ является фундаментальной последовательностью из компакта Z в компакт P_x^1, но пространство P_x^1 является абсолютным окрестностным ретрактом, поэтому [8] существует такое отображение $G\colon Z \to P_x^1$, что $\underline{G} \simeq \underline{\mathcal{F}} \circ \underline{g}_2$, где $\underline{G}$ обозначает фундаментальную последовательность, порождённую отображением G. Через $i_{P_x^1, P_x^2}$ обозначим отображение вложения призмы P_x^1 в призму P_x^2. Т. к. $\dim Z \leqslant m$, то отображение $i_{P_x^1, P_x^2} \circ G$ гомотопно нулю, следовательно, и фундаментальная последовательность $\underline{i_{P_x^1, P_x^2} \circ G}$ гомотопна нулю. Мы имеем следующую цепочку гомотопий

$$\underline{i_{P_x^1, P_x^2} \circ \mathcal{F}} \simeq \underline{i}_{P_x^1, P_x^2} \circ \underline{\mathcal{F}} \simeq \underline{i}_{P^1, P_x^2} \circ \underline{\mathcal{F}} \circ \underline{g}_2 \circ \underline{g}_1 \simeq$$

$$\simeq \underline{i}_{P_x^1, P_x^2} \circ \underline{G} \circ \underline{g}_1 \simeq \underline{i_{P_x^1, P_x^2} \circ G} \circ \underline{g}_1\,,$$

поэтому из тривиальности (т. е. гомотопности нулю) фундаментальной последовательности $\underline{i_{P_x^1, P_x^2} \circ G}$ вытекает тривиальность фундаментальной последовательности $\underline{i_{P_x^1, P_x^2} \circ \mathcal{F}}$. В [8] доказано, что два отображения в ANR пространство порождают гомотопные фундаментальные последовательности тогда и только тогда, когда они гомотопны. Призма P_x^2 является ANR пространством, следовательно, по теореме Борсука, сформулированной выше, отображение $i_{P_x^1, P_x^2} \circ \mathcal{F}$ гомотопно нулю. Т. к. гомотопическая тривиальность отображения $i_{P_x^1, P_x^2} \circ \mathcal{F}$ означает, что отображение $\mathcal{F}\colon Y \to P_x^1$ гомотопно нулю в P_x^2, то всё доказано.

Мы уже отмечали, что $X \in \mathrm{FAR}$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathrm{AC}(\{X\})$, поэтому из выше доказанного получается, что $X \in \mathrm{FAR}$ в том и только в том случае, когда $Fd\,X \leqslant m$ и $X \in \mathrm{AC}^m$. Следовательно, *если $X \in \mathrm{LC}^{m-1}$ и C^m и $Fd\,X \leqslant m$, то $X \in \mathrm{FAR}$*. Мардешичем [15] было доказано, что из $X \in \mathrm{LC}^{m-1}$ и $\dim X \leqslant m$ вытекает подвижность компакта X.

Оказывается, что используя технику работы [21] можно доказать несколько больше. А именно, *из $X \in \mathrm{LC}^{m-1}$ и $\dim X \leqslant m$ следует, что X является аппроксимативным абсолютным окрестностным ретрактом в смысле Клаппа* [10]. Из этого и работы [3] вытекает, что *если $X \in \mathrm{LC}^{m-1}$ и C^m и $\dim X \leqslant m$, то X является аппроксимативным абсолютным ретрактом*. Легко проверить, что если $X \in \mathrm{AC}(K_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, то $X \in \mathrm{AC}(\bigcup_{i=1}^{n} K_i)$. Оказывается, что если компакт X подвижен и $X \in \mathrm{AC}(K_\alpha)$, где $\alpha \in A$, а множество A имеет произвольную мощность, то $X \in \mathrm{AC}(\bigcup_\alpha K_\alpha)$. Следовательно, *компакт X является фундаментальным абсолютным ретрактом, тогда и только тогда, когда компакт X подвижен и аппроксимативно связен во всех размерностях*. Это дает ответ на одну проблему Борсука [7].

Следствие 10. *Если $f\colon X \to Y$ непрерывное отображение $X \in \mathrm{LC}^m$, $f^{-1}(y) \in \mathrm{AC}^m$ для всех $y \in Y$ и $\dim Y \leqslant m$, то $Y \in \mathrm{ANR}$.*

Доказательство. По теореме 4 $Y \in \mathrm{LC}^m$, но из $\dim Y \leqslant m$ и $Y \in \mathrm{LC}^m$ следует [9, теорема 10.3, стр. 139], что $Y \in \mathrm{ANR}$.

Следствие 11. *Если дано отображение $f\colon X \to Y$, что $X \in \mathrm{LC}^m$ и $f^{-1}(y) \in \mathrm{AC}^m$ для всех $y \in Y$, а $\Delta Y \leqslant m$, то существует отображение $g\colon Y \to X$, что $e_Y \simeq f \circ g$, в частности $X \underset{h}{\geqslant} Y$.*

Доказательство. Т. к. $\Delta Y \leqslant m$, то отображение $f_{\#}\colon [Y, X] \to [Y, Y]$ является на, поэтому существует $g \in [Y, X]$, что $f_{\#}([g]) = [e_Y]$, т. е. существует отображение $g\colon Y \to X$, что $f \circ g \simeq e_Y$.

Следствие 12. *Если дано отображение $f\colon X \to Y$, что $X \in \mathrm{LC}^m$ и $f^{-1}(y) \in \mathrm{AC}^m$ для всех $y \in Y$, а $\Delta X \leqslant m$, то для каждого отображения $g\colon Y \to X$ такого, что $e_Y \simeq f \circ g$ верно соотношение $e_X \simeq g \circ f$.*

Доказательство. Т. к. $\Delta X \leqslant m$, то отображение $f_{\#}\colon [X, X] \to [X, Y]$ является взаимно однозначным. Но $f_{\#}([e_X]) = [f]$ и $f_{\#}([g \circ f]) = [f \circ g \circ f] = [e_Y \circ f] = [f]$, поэтому $e_X \simeq g \circ f$.

Соединением выше сформулированных следствий получаются

Следствие 13. *Если дано отображение $f\colon X \to Y$, что $X \in \mathrm{LC}^\infty f^{-1}(y) \in \mathrm{AC}^\infty$ для всех $y \in Y$ и $\Delta X < \infty$, $\Delta Y < \infty$, то f является гомотопической эквивалентностью, т. е. существует $g\colon Y \to X$, что $e_Y \simeq f \circ g$ и $e_X \simeq g \circ f$.*

Следствие 14. *Если дано отображение $f\colon X \to Y$, что $X \in \mathrm{ANR}$, $f^{-1}(y) \in \mathrm{FAR}$ для всех $y \in Y$ и $\dim Y < \infty$, то $Y \in \mathrm{ANR}$ и f является гомотопической эквивалентностью.*

Замечание 8. Если в следствии 14 $X \in \mathrm{AR}$, то Y стягиваемо по себе в точку. Значит, [9, теорема 9.1, стр. 108] $Y \in \mathrm{AR}$. Более того, т. к. $f_{\#}\colon [S^n, X] \to [S^n, Y]$ является изоморфизмом, то из гомотопической связности пространства X в размерности m следует, что и пространство Y гомотопически связно в этой размерности m. Поэтому, *если $f\colon X \to Y$ ото-*

бражение LC^∞ *и* C^∞ *пространства* X *на* ANR *пространство* Y *при котором* $f^{-1}(y) \in AC^\infty$ *для всех* $y \in Y$, *то* $Y \in AR$.

Действительно, из $Y \in ANR$ и $Y \in C^\infty$ следует [11], что $Y \in AR$.

Теорема 6. *Если* $f\colon X \to Y$ *непрерывное отображение конечно мерных компактов* X *и* Y, *что* $f^{-1}(y) \in FAR$ *для всех* $y \in Y$, *то* f *порождает фундаментальную эквивалентность пространств* X *и* Y, *в частности* $\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} Y$.

Доказательство. $\dim X < \infty$, поэтому существует такое число N, что X вкладывается в R^N. В пространстве R^N найдется счетный набор полиэдров P_n, что $P_{n+1} \subset P_n$ и $X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n$. Из написанного следует, что система полиэдров P_n с вложениями $i_{n,n+1}\colon P_{n+1} \to P_n$ образует ANR — последовательность $\underline{X} = \{P_n, i_{n,n'}, N\}$, ассоциированную с пространством X [18]. Нам задано отображение $f\colon X \to Y$ поэтому, если на $P_n \setminus X$ взять тривиальное разбиение, то мы получим отображение $f_n\colon P_n \to Y_n$. $Y = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$, поэтому система $\underline{Y} = \{Y_n, i'_{n,n'}, N\}$ составляет обратный спектр, пределом которого является пространство Y. Причем $Y_n \setminus Y$ гомеоморфно $P_n \setminus X$, поэтому $\dim Y_n \leqslant \max\{\dim(P_n \setminus X),\ \dim Y\} < \infty$. По следствию 14 $Y_n \in ANR$ и отображение f_n является гомотопической эквивалентностью, т. е. существует отображение $g_n\colon Y_n \to P_n$, что $e_{P_n} \simeq g_n \circ f_n$ и $e_{Y_n} \simeq f_n \circ g_n$. Т. к. $Y_n \in ANR$, то $\underline{Y}$ является ANR-последовательностью, ассоциированной с пространством Y. Причем ясно, что $\underline{f} = \{f_n, N\}$ является не только отображением ANR-последовательности $\underline{X}$ в ANR-последовательность $\underline{Y}$ в смысле Мардешича и Сегала [18], но даже и отображением обратных спектров (ведь $i'_{n,n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ i_{n,n+1}$). Докажем, что $\underline{g} = \{g_n\colon Y_n \to P_n\}$ является отображением ANR-последовательностей

$$g_n \circ i'_{n,n+1} = g_n \circ i'_{n,n+1} \circ e_{Y_{n+1}} \simeq g_n \circ i'_{n,n+1} \circ f_{n+1} \circ g_{n+1} =$$

$$= g_n \circ f_n \circ i_{n,n+1} \circ g_{n+1} \simeq e_{P_n} \circ i_{n,n+1} \circ g_{n+1} = i_{n,n+1} \circ g_{n+1}.$$

Итак, $\underline{g}$ действительно является отображением ANR-последовательностей. Причём, так как $e_{P_n} \simeq g_n \circ f_n$ и $e_{Y_n} \simeq f_n \circ g_n$, то $\underline{e_X} \simeq \underline{g} \circ \underline{f}$ и $\underline{e_Y} \simeq \underline{f} \circ \underline{g}$. Следовательно, $\underline{f}$ является шейповой эквивалентностью. Но в [19] доказано, что компактные метрические пространства X и Y имеют один и тот же шейп в смысле Борсука тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же шейп в смысле ANR-последовательностей, поэтому можно написать, что $\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} Y$.

Замечание 9. Данная теорема другим способом получена также Р. Шером (Gen. Top. Appl., 2 (1972), стр. 75–89).

Пусть теперь X и Y произвольные компакты, но у f только один нетривиальный элемент, являющийся FAR пространством (конечное число таких элементов). Будем действовать как и в теореме 6, но теперь компакт X вложим в гильбертов куб Q и систему вложенных полиэдров заменим на систему вложенных призм [9, стр. 119, лемма 4.3]. На $P_n \setminus X$ опять таки возьмём тривиальное (т. е. одноточечное) разбиение. Хотя теперь к пространствам Y_n и отображениям $f_n\colon P_n \to Y_n$ следствие 14 неприменимо, но всё равно $Y_n \in ANR$, а отображение f является гомотопической эквивалентностью [12, теоремы 3.7 и 4.1], поэтому все рассуждения доказательства теоремы 6 остаются в силе. Следовательно, верна

Теорема 7. *Если* $X_0 \in FAR$, *то* $\operatorname{Sh}(X/X_0) = \operatorname{Sh} X$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю проф. Ю. М. Смирнову за помощь в работе.

Цитированная литература

[1] R. D. Anderson, *Point-like decompositions of the Hilbert cube* (to appear).

[2] С. Богатый, *Инвариантность ретрактов при аппроксимации*, VI Всесоюзная Топологическая Конференция, Тезисы, Тбилиси 1972, стр. 14.

[3] — *Аппроксимационные и фундаментальные ретракты*, Матем. Сб. 93 (1974), стр. 90–102.

[4] — *О теореме Виеториса в категории шейпов, обратных пределах и одной задаче Ю. М. Смирнова*, Докл. АН СССР 211 (1973), стр. 764–767.

[5] K. Borsuk, *Problems concerning the notion of the shape of compacta*, Proc. Internat. Sympos. Topology and its applications Herceg-Novi 1968, Beograd 1969, pp. 343–344.

[6] — *Fundamental retracts and extensions of fundamental sequences*, Fund. Math. 66 (1969), pp. 55–85.

[7] — *A note on the theory of shape of compacta*, Fund. Math. 67 (1970), pp. 265–278.

[8] — *Theory of Shape*, Aarhus 1971.

[9] К. Борсук, *Теория ретрактов*, Москва 1971.

[10] M. H. Clapp, *On a generalization of absolute neighborhood retracts*, Fund. Math. 70 (1971), pp. 117–130.

[11] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. 1 (1951), pp. 353–367.

[12] D. M. Hyman, *ANR divisors and absolute neighborhood contractibility*, Fund. Math. 62 (1968), pp. 61–73.

[13] К. Куратовский, *Топология*, т. 2, Москва 1969.

[14] S. Lefschetz, *Topics in topology*, Annals of Mathematics Studies, Princeton 1942.

[15] S. Mardešić, *n-dimensional* LC^{n-1} *compacta are movable*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19 (1971), pp. 505–509.

[16] — *A survey of the shape theory of compacta*, Proc. 3 Praque Symp. on General Topology (to appear).

[17] — and J. Segal, *ε-mappings onto polyhedra*, Trans. Amer. Math. Soc. 109 (1963), pp. 146–164.

[18] — — *Shapes of compacta and ANR-systems*, Fund. Math. 72 (1972), pp. 41–59.

[19] — — *Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes*, Fund. Math. 72 (1971), pp. 61–68.

[20] M. H. A. Neuman, *Locall connection in locally compact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), pp. 44–53.

[21] R. Overton and J. Segal, *A new construction of movable compacta*, Glasnik Mat. 6 (26), 1971, pp. 361–363.
[22] S. Smale, *A Vietoris mapping theorem for homotopy*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), pp. 604–610.
[23] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompacter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. 97 (1927), pp. 454–472.
[24] J. H. C. Whitehead, *On the homotopy type of* ANR's, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), pp. 1133–1145.
[25] S. Armentrout and T. Price, *Decompositions into compact sets with* $\mathcal{UV}$ *properties*, Trans. Amer. Math. Soc. 141 (1969), pp. 433–442.
[26] В. П. Компаниец, *Гомотопический критерий точечного отображения*, Украин. матем. ж. 18 (1966), стр. 3–10.
[27] R. C. Lacher, *Cell-like mappings*, I, Pacific J. Math. 30 (1969), pp. 717–731.
[28] R. B. Sher, *Realizing cell-like maps in Euclidean space*, Gen. Topol. and Appl. 2 (1972), pp. 75–89.

Reçu par la Rédaction le 9. 12. 1972

A 3-dimensional irreducible compact absolute retract which contains no disc

by

Sukhjit Singh

Abstract. R. H. Bing and K. Borsuk gave an example of a 3-dimensional compact absolute retract which contains no disc. In this paper, we construct a 3-dimensional irreducible compact absolute retract which contains no disc.

1. Introduction. Borsuk [8] described a 2-dimensional compact absolute retract which does not contain any proper 2-dimensional compact absolute retract. Following Borsuk, we say that an n-dimensional compact absolute retract A is *irreducible* if and only if A does not contain any proper n-dimensional compact absolute retracts. Molski [10] generalized Borsuk's example of [8] to obtain for each $n \geqslant 2$ an n-dimensional irreducible compact absolute retract. Bing and Borsuk [6] gave an example of a 3-dimensional compact absolute retract which does not contain any (2-dimensional) disc. The following is a natural question: Does there exist an irreducible n-dimensional compact absolute retract for $n \geqslant 2$ which does not contain any (2-dimensional) disc?

For $n = 2$, the answer is affirmative as proved by Borsuk [8]. The purpose of this note is to answer the question in the affirmative when $n = 3$. For $n > 3$, the answer is unknown.

By an AR we mean a compact absolute retract for metric spaces. For notation and terminology see [3], [6] and [7]. The techniques of construction are similar to those used in [3] and [6].

If G is an upper semi-continuous decomposition of a topological space X, we denote by X/G the associated decomposition space and $p\colon X \to X/G$ the canonical projection.

The author expresses his thanks to S. Armentrout for help and encouragement.

2. Antoine's Necklaces. Let r be a fixed positive integer and Σ_r be an unknotted polyhedral solid torus in 3-dimensional Euclidean space E^3. All tori considered will be solid, unknotted and polyhedral. Let $\{T_{r1}, \ldots, T_{rm_{r0}}\}$ denote a chain of linked solid tori in $\mathrm{Int}(\Sigma_r)$ circling Σ_r exactly twice such that for $i = 1, 2, \ldots, m_{r0}$ the diameter of T_{ri} is less