Précompactologies et structures uniformes

par

Renè Pupier (Saint-Etienne)

Résumé. On étudie la catégorie dont les objets sont les couples $(X, \ )$, où est une recouvrement de X, dont les éléments sont munis d'une structure uniforme précompacte séparée; quelques axiomes de compatibilité sont postulés. Cette catégorie, qui généralise celle des espaces compactologiques, est cartésienne fermée. L'étude des liaisons entre cette structure et les espaces uniformes, d'une part, et les espaces complètement réguliers, d'autre part, permet de donner une forme très générale du théorème de S. Warner sur les k_R-espaces et d'introduire la notion d'espace uniforme de Kelley. Ceux-ci sont utiles dans l'étude de la complétion topologique d'un produit d'espaces complètement réguliers.

Introduction. Dans sa thèse (cf. [B_3]) H. Buchwalter a étudié la notion de compactologie, et plus particulièrement les compactologies vectorielles. Ceci a permis de caractériser la complétion topologique d'un espace complètement régulier, puis la complétion séparée d'un espace uniforme (séparé ou non) en termes de formes linéaires compactologiques sur un espace compactologique bien choisi (cf. [BP_1], [BP_2]). Par ailleurs N. Noble ([N]) étudie la famille de toutes les parties B d'un espace topologique T (complètement régulier en général) telles que pour tout fonction continue f à valeurs réelles, la restriction $f|B$ soit bornée. On montre que ces deux études sont des cas particuliers d'une même structure qu'on appelle *précompactologie*.

Après avoir donné les propriétés élémentaires de la catégorie des espaces précompactologiques, on montre essentiellement que cette catégorie est cartésiennement fermée. On établit une CNS pour qu'un espace précompactologique soit "uniformisable", et on applique la notion de précompactologie aux espaces uniformes de Kelley et à un certain type d'espaces complètement réguliers, utile dans l'étude de la complétion topologique d'un produit.

Des améliorations importantes ont pu être apportées à la première version de ce travail ([P_1]) grâce aux enrichissantes conférences prononcées à Lyon en juin 1971 par M. le Professeur Z. Semadeni.

Notations. La restriction d'une application $f\colon E \to F$ à une partie $A \subset E$ sera notée $f|A$; de même si τ (resp. μ) est une topologie (resp. une structure uniforme) sur E, pour toute partie $A \subset E$, $\tau|A$ (resp. $\mu|A$) désigne la topologie (resp. structure uniforme) induite. Si X est un espace topologique (resp. uniforme), $\mathcal{C}(X)$ (resp. $\mathcal{U}(X)$) est l'algèbre des fonctions continues (resp. l'espace vectoriel des fonctions uniformément continues) à valeurs réelles. Pour deux espaces uniformes X et Y, $\mathcal{U}_u(X, Y)$ est l'ensemble des applications uniformément continues de X dans Y, muni de la structure uniforme de convergence uniforme. Enfin $\mathcal{D}(X)$ est l'ensemble des écarts (finis) sur X appartenant à $\mathcal{U}(X \times X)$.

1. La catégorie des espaces précompactologiques. Soient X un ensemble et $\mathcal{P}$ un recouvrement de X. On dit que $\mathcal{P}$ est une *précompactologie* sur X, si $\mathcal{P}$ vérifie les axiomes:

(P_1) $\mathcal{P}$ est héréditaire à gauche, i.e. si $P \in \mathcal{P}$ et $P' \subset P$, alors $P' \in \mathcal{P}$;

(P_2) $\mathcal{P}$ est filtrant à droite, i.e. si $P \in \mathcal{P}$ et $P' \in \mathcal{P}$, alors $P \cup P' \in \mathcal{P}$.

(P_3) Chaque $P \in \mathcal{P}$ est muni d'une structure uniforme séparée précompacte μ_P, telle que si $P' \subset P$, on ait $\mu_{P'} = \mu_P|P'$.

Un sous-recouvrement $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ est une *base* de la précompactologie $\mathcal{P}$ si pour tout $P \in \mathcal{P}$ il existe $P' \in \mathcal{P}'$ tel que $P \subset P'$.

Un couple $(X; \mathcal{P})$ formé d'un ensemble X et d'une précompactologie $\mathcal{P}$ sur X est appelé *espace précompactologique*. On définit alors la catégorie $\mathcal{EP}$ des espaces précompactologiques en prenant pour morphismes les applications $f: (X; \mathcal{P}) \to (Y; \mathcal{Q})$ telles que pour tout $P \in \mathcal{P}$ l'image $f(P)$ appartienne à $\mathcal{Q}$, et que $f|P: P \to f(P)$ soit uniformément continue. On note $\mathcal{EP}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes précompactologiques de $(X; \mathcal{P})$ dans $(Y; \mathcal{Q})$.

Soit X' une partie de X; pour une précompactologie $\mathcal{P}$ sur X le sous-ensemble $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ des parties $P \in \mathcal{P}$ telles que $P \subset X'$ définit une précompactologie $\mathcal{P}'$ sur X'. L'espace $(X'; \mathcal{P}')$ est un sous-espace précompactologique de $(X; \mathcal{P})$. Enfin on définit de la façon habituelle la relation de finesse entre deux précompactologies sur un même ensemble.

Exemple 1. La famille $\mathcal{P}_0$ des parties précompactes d'un espace uniforme séparé X est une précompactologie sur X: la précompactologie canonique de X. On note πX l'espace précompactologique $(X; \mathcal{P}_0)$.

Exemple 2. La famille des parties relativement compactes d'un espace topologique séparé T est une précompactologie; plus généralement si $(X; \mathcal{K})$ est un espace compactologique ([B_3]), le recouvrement $\mathcal{K}$ de X est la base d'une précompactologie, qu'on ne distingue généralement pas de la compactologie $\mathcal{K}$. Ainsi la catégorie $\mathcal{EC}$ des espaces compactologiques est une sous-catégorie pleine de celle des espaces précompactologiques.

On notera $\mathcal{EP}(X)$ ou $\mathcal{EP}(X; \mathcal{P})$ l'algèbres des morphismes de X dans $\boldsymbol{R}$ (cf. ex. 2), on munit cette algèbre de la topologie localement convexe séparée définie par les semi-normes:

$$\|f\|_P = \operatorname*{Sup}_{x \in P} |f(x)| .$$

Enfin, on dit qu'un espace précompactologique $(X; \mathcal{P})$ est *fonctionnellement séparé* s'il est séparé par $\mathcal{EP}(X)$.

1.1. Proposition. (Buchwalter, [B_3], prop. 1.1.3). *Un espace compactologique $(X; \mathcal{P})$ est fonctionnellement séparé ssi il existe une topologie complètement régulière τ sur X, telle que $\tau|K = \tau_K$, pour tout $K \in \mathcal{K}$.*

Soit $(X; \mathcal{P})$ un espace précompactologique; pour tout $P \in \mathcal{P}$, le complété $\hat{P}$ de P est un espace compact et la famille $\hat{\mathcal{P}}$ de tous les $\hat{P}$ est un système inductif filtrant d'espaces compacts. La limite inductive, *dans la catégorie des ensembles*, du système $\hat{\mathcal{P}}$ est un ensemble $\varkappa X$ et chaque $\hat{P}$ est plongé dans $\varkappa X$. La famille $\hat{\mathcal{P}}$ s'identifie à un recouvrement de $\varkappa X$, qui vérifie les axiomes d'une base pour une compactologie; on note $\varkappa(X; \mathcal{P})$ ou $(\varkappa X; \hat{\mathcal{P}})$ ou simplement $\varkappa X$ l'espace compactologique ainsi obtenu.

1.2. Proposition. *Le foncteur $\varkappa$: $\mathcal{EP} \to \mathcal{EC}$ est adjoint à gauche au foncteur injection canonique $\mathcal{EC} \to \mathcal{EP}$.*

Remarque 1. Bien que X s'identifie à un sous-ensemble de $\varkappa X$, $(X; \mathcal{P})$ n'est pas en général un sous-espace précompactologique de $(\varkappa X; \hat{\mathcal{P}})$, car les $\hat{P} \cap X$ n'appartiennent pas nécessairement à $\mathcal{P}$.

Remarque 2. Soit $f: X \to \boldsymbol{R}$ un morphisme; f se prolonge évidemment en un morphisme compactologique $f^{\varkappa}$ de $\varkappa X$ dans $\boldsymbol{R}$; comme par ailleurs

$$\|f\|_P = \|f^{\varkappa}\|_{\hat{P}} ,$$

les algèbres localement convexes $\mathcal{EP}(X)$ et $\mathcal{EC}(\varkappa X)$ sont isomorphes. La seconde étant complète ([B_3], 1.2.1), il en est de même de $\mathcal{EP}(X)$.

1.3. Théorème. *Soit $(X; \mathcal{P})$ un espace précompactologique; les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) *l'espace compactologique $\varkappa X$ est fonctionnellement séparé;*

b) *il existe une structure uniforme séparée μ sur X telle que, pour tout $P \in \mathcal{P}$, on ait: $\mu|P = \mu_P$;*

c) *pour tout $P \in \mathcal{P}$ l'application canonique de restriction $\mathcal{EP}(X) \to \mathcal{U}(P)$ est surjective.*

Preuve: a) $\Rightarrow$ b). Si $\varkappa X$ est fonctionnellement séparé, la structure uniforme initiale μ sur $\varkappa X$ définie par les $f \in \mathcal{EC}(\varkappa X)$ induit sur X une structure uniforme séparée; comme $\mu|\hat{P}$ est l'unique structure uniforme compatible avec la topologie du compact $\hat{P}$, $\mu|P = \mu_P$.

b) $\Rightarrow$ c). Car alors $\mathcal{U}(X) \subset \mathcal{EP}(X)$ et toute $f \in \mathcal{U}(P)$ se prolonge à $(X; \mu)$([K]).

c) $\Rightarrow$ a). Désignons par i_P l'injection canonique de $\hat{P}$ dans $\varkappa X$; soient

x et x' deux éléments distincts de $\varkappa X$; il existe $P \in \mathcal{P}$, $y \in \hat{P}$, $y' \in \hat{P}$, $y \neq y'$, tels que $i_P(y) = x$ et $i_P(y') = x'$. Soit $g\colon \hat{P} \to \boldsymbol{R}$ une fonction continue qui sépare y et y'; $g|P$ est uniformément continue et se prolonge en $f \in \mathcal{EP}(X)$; l'application $f^\varkappa$ est telle que $f^\varkappa \circ i_P = g$ et sépare donc x et x'.

Un espace précompactologique satisfaisant aux propriétés équivalentes du théorème 1.3 est dit *complètement régulier* (ou *uniformisable*). Une structure uniforme séparée sur X qui induit sur chaque $P \in \mathcal{P}$ la structure μ_P est *compatible* avec $\mathcal{P}$. On note $\mathcal{EPCR}$ la catégorie des espaces précompactologiques complètement réguliers. Tout espace compactologique fonctionnellement séparé est en fait complètement régulier: c'est la proposition 1.1.

On obtient alors la forme générale du théorème 1.4.2 de [B_3]:

1.4. Théorème. *Soit $(X; \mathcal{P})$ un espace précompactologique complètement régulier; l'espace $\varkappa X$ s'identifie à l'espace compactologique des caractères continus non nuls de l'algèbre localement convexe et complète $\mathcal{EP}(X)$.*

De plus si μ est une structure uniforme compatible sur X, l'espace $\varkappa X$ s'identifie à la réunion dans le complété de $(X; \mu)$ des adhérences des $P \in \mathcal{P}$.

2. Structures uniformes compatibles. La catégorie $\mathcal{EP}$ est complète à gauche. Le produit d'une famille $\big((X_i; \mathcal{P}_i)\big)_{i\in I}$ s'obtient en particulier en plaçant sur l'ensemble produit ΠX_i la précompactologie engendrée par les ΠP_i, $P_i \in \mathcal{P}_i$. Les propriétés du produit d'espaces uniformes montrent que si les $(X_i; \mathcal{P}_i)$ sont complètement réguliers il en est de même de leur produit. De plus, dans la catégorie $\mathcal{EPCR}$ le foncteur $\varkappa$ commute aux produits, et dans la catégorie $\mathcal{EP}$ le foncteur $\varkappa$ commute aux produits finis.

Soit $(X; \mathcal{P})$ un espace précompactologique complètement régulier; un écart $d\colon X \times X \to \boldsymbol{R}_+$ est précompactologique si c'est un morphisme pour la précompactologie produit sur $X \times X$.

2.1. Proposition. *Toute structure uniforme μ sur X compatible avec la précompactologie $\mathcal{P}$ est définie par une famille d'écarts précompactologiques bornés.*

En effet, si $d\colon X \times X \to \boldsymbol{R}_+$ est uniformément continu pour la structure uniforme produit $\mu \times \mu$ sa restriction $d|P \times P$ est uniformément continue pour la structure induite sur $P \times P$, qui n'est autre que $\mu_P \times \mu_P$. D'autre part on peut toujours supposer d borné.

L'ensemble de tous les écarts bornés précompactologiques sur X définit une structure uniforme μ_0 sur X, plus fine que toutes les structures uniformes compatibles. Comme elle induit sur chaque $P \in \mathcal{P}$ une structure moins fine que μ_P on obtient:

2.2. Proposition. *Sur un espace précompactologique complètement régulier $(X; \mathcal{P})$ il existe une structure uniforme compatible μ_0, la plus fine, obtenue au moyen de tous les écarts précompactologiques et bornés.*

La structure μ_0 s'appelle la structure uniforme *universelle* de $(X; \mathcal{P})$. On désigne par $\boldsymbol{u}(X; \mathcal{P})$ ou $\boldsymbol{u}X$ l'espace uniforme $(X; \mu_0)$; ainsi $\boldsymbol{u}\colon (X; \mathcal{P}) \mapsto (X; \mu_0)$ est un foncteur de $\mathcal{EPCR}$ dans la catégorie $\mathcal{U}$ des espaces uniformes séparés.

2.3. Proposition. *Le foncteur $\boldsymbol{u}$ est adjoint à gauche au foncteur π.*

On a évidemment $\mathcal{U}(\boldsymbol{u}X, Y) \subset \mathcal{EP}(X, \pi Y)$, pour tout espace précompactologique (complètement régulier) et tout espace uniforme séparé $\boldsymbol{Y}$. Si $f \in \mathcal{EP}(X, \pi Y)$, soit $d \in \mathcal{D}(Y)$, un écart borné. L'application $d \circ f \times f\colon X \times X \to \boldsymbol{R}_+$ est un écart précompactologique, et f est uniformément continue de $\boldsymbol{u}X$ dans Y.

En particulier: $\mathcal{U}(\boldsymbol{u}X) = \mathcal{EP}(X)$.

2.4. Remarque. En utilisant les résultats de [BP_2] on peut définir la structure de $\boldsymbol{u}(X; \mathcal{P})$ comme structure de $\mathcal{H}$-convergence sur $\mathcal{EP}(X)$, où $\mathcal{H}$ désigne l'ensemble des parties $H \subset \mathcal{EP}(X)$ dont les restrictions aux précompacts $P \in \mathcal{P}$ sont uniformément équicontinues.

Considérons maintenant la structure uniforme affaiblie de μ_0: c'est la moins fine structure uniforme rendant uniformément continues les $f \in \mathcal{EP}(X)$ (cf. § 4). On désigne par $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{R}}X$ l'espace uniforme ainsi obtenu.

2.5. Proposition. *Les topologies de $\boldsymbol{u}X$ et $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{R}}X$ sont identiques.*

3. Précompactologie sur les espaces de fonctions. Chaque ensemble de morphismes $\mathcal{EP}(X, Y)$ est muni d'une structure précompactologique canonique.

Considérons l'ensemble $\mathcal{H}$ des parties de $\mathcal{EP}(X, Y)$ qui vérifient les deux propriétés suivantes:

(H_1) Pour toute partie $H \in \mathcal{H}$ et tout précompact $P \in \mathcal{P}$ il existe un précompact $Q \in \mathcal{Q}$ tel que $H(P) \subset Q$.

(H_2) Pour tout $P \in \mathcal{P}$ la restriction de H à P est un ensemble uniformément équicontinu de fonctions de P dans $H(P)$.

On munit alors chaque partie H de la structure uniforme suivante: $H|P$ considéré comme partie de $\mathcal{U}(P, Q)$ est muni de la structure uniforme de convergence uniforme, ou ce qui revient au même, $H|P$ étant uniformément équicontinu et P précompact, de la structure uniforme de convergence simple. Ceci fait de $H|P$ un espace précompact séparé. On place alors sur H la structure uniforme initiale associée aux applications de restriction $H \to H|P$. Par abus de langage on l'appellera la structure de $\mathcal{P}$-$\mathcal{Q}$-convergence sur H.

3.1. PROPOSITION. *Munie de la structure de $\mathcal{T}$-$\mathcal{Q}$-convergence, chaque partie H est un espace précompact séparé.*

C'est une conséquence immédiate de [B₁], § 4, Prop. 3.

La famille $\mathcal{H}$ définit alors une précompactologie sur $\mathcal{ET}(X, Y)$.

On désigne par $\mathbf{Hom}(X, Y)$ l'ensemble $\mathcal{ET}(X, Y)$ muni de la précompactologie définie ci-dessus. Le bifoncteur $\mathbf{Hom}$ ainsi défini de $\mathcal{ET}_{\mathrm{op}} \times \mathcal{ET}$ dans $\mathcal{ET}$ fait de la catégorie $\mathcal{ET}$ une catégorie *autonome* et même *cartésiennement fermée* (([L]) et [Mc]). Nous avons besoin pour le montrer de deux lemmes et de quelques notations supplémentaires: soient trois espaces uniformes T, X et Y; l'ensemble $\mathcal{U}(T\times X, Y)$ s'identifie à un sous-ensemble de $\mathcal{U}(T, \mathcal{U}_u(X, Y))$. Si $h \in \mathcal{U}(T\times X, Y)$, on note h_t l'application $x \mapsto h(t, x)$ et $\tilde{h}$ l'application $t \mapsto h_t$; alors $\tilde{h} \in \mathcal{U}(T, \mathcal{U}_u(X, Y))$. Réciproquement si $g \in \mathcal{U}(T, \mathcal{U}_u(X, Y))$ on notera $\bar{g}$ l'application définie par:

$$\bar{g}(t, x) = g(t)(x)\,.$$

3.2. LEMME. *L'application $g \in \mathcal{U}(T, \mathcal{U}_u(X, Y))$ définit une application $\bar{g} \in \mathcal{U}(T\times X, Y)$ ssi l'image $g(T)$ est uniformément équicontinue dans $\mathcal{U}(X, Y)$.*

C'est la proposition 2, § 2 de [B₂], en remarquant que la condition $g \in \mathcal{U}(T, \mathcal{U}_u(X, Y))$ est équivalente à $\{\bar{g}_x\}_{x\in X}$ est uniformément équicontinue dans $\mathcal{U}(T, Y)$.

Plus généralement:

3.3. LEMME. *Soient $H \subset \mathcal{U}(T\times X, Y)$ et $\tilde{H} = \{\tilde{h}/h \in H\}$; la partie H est uniformément équicontinue ssi $\tilde{H}$ et $\tilde{H}(T)$ sont uniformément équicontinues.*

$\tilde{H}$ est contenu dans $\mathcal{U}(T, \mathcal{U}_u(X, Y))$ et $\tilde{H}(T) = H_T$ est l'ensemble des h_t, pour $h \in H$ et $t \in T$.

3.4. THÉORÈME. *Soient $(T; \mathcal{T})$, $(X; \mathcal{Q})$ et $(Y; \mathcal{R})$ trois espaces précompactologiques; l'espace précompactologique $\mathbf{Hom}(T\times X, Y)$ est naturellement isomorphe à l'espace précompactologique $\mathbf{Hom}(T, \mathbf{Hom}(X, Y))$.*

Preuve. Soit H un précompact de $\mathbf{Hom}(T\times X, Y)$; pour tous $P \in \mathcal{T}$, tous $Q \in \mathcal{Q}$, il existe $R \in \mathcal{R}$ tel que

$$\tilde{H}(P)(Q) = H(P\times Q) \subset R$$

et $H|P\times Q$ est une partie uniformément équicontinue de $\mathcal{U}(P\times Q, R)$. D'où $\widetilde{H|P\times Q} \subset \mathcal{U}(P, \mathcal{U}_u(Q, R))$ est une partie uniformément équicontinue ainsi que $\tilde{H}(P)|Q \subset \mathcal{U}(Q, R)$.

Ceci montre que $\tilde{H}(P)$ est un précompact de $\mathbf{Hom}(X, Y)$. Par ailleurs, si l'on compose $\tilde{H}|P$ avec l'application r_Q de restriction $r_Q\colon \tilde{H}(P) \to \tilde{H}(P)|Q$ on obtient $r_Q \circ \tilde{H}|P = \widetilde{H|P\times Q}$ qui est uniformément équicontinue de P dans $\tilde{H}(P)|Q \subset \mathcal{U}(Q, R)$. Donc $\tilde{H}|P$ est uniformément équicontinue de P dans $\tilde{H}(P)$ muni de sa structure de $\mathcal{Q}$-$\mathcal{R}$-convergence. Ainsi $\tilde{H}$ est un précompact de $\mathbf{Hom}(T, \mathbf{Hom}(X, Y))$. Réciproquement, si $g \in \mathbf{Hom}(T, \mathbf{Hom}(X, Y))$ le lemme 3.2 permet de montrer par une technique analogue à la précédente que $\bar{g} \in \mathbf{Hom}(T\times X, Y)$. Si K est un précompact de $\mathbf{Hom}(T, \mathbf{Hom}(X, Y))$, $\bar{K}$ est une partie de $\mathbf{Hom}(T\times X, Y)$ telle que

$$\widetilde{\bar{K}|P\times Q} = r_Q \circ K|P\,;$$

or $r_Q \circ K|P\colon\ P \to L \to L|Q \subset \mathcal{U}_u(Q, R)$ est uniformément équicontinue (avec L un précompact de $\mathbf{Hom}(X, Y)$). D'autre part, $K(P)|Q = \tilde{\bar{K}}(P)|Q$ est uniformément équicontinue de Q dans R, donc, d'après 3.3, $\bar{K}|P\times Q$ est uniformément équicontinue de $P\times Q$ dans R, et $\bar{K}$ est un précompact de $\mathbf{Hom}(T\times X, Y)$.

Reste à montrer que les structures uniformes de H et $\tilde{H}$ sont les mêmes. Ceci résulte immédiatement du fait qu'une sous-base d'écarts sur H est obtenue en faisant varier les triplets (P, Q, R) tels que $H(P\times Q) \subset R$ et l'écart $d \in \mathcal{D}(R)$ dans la formule

$$d_1(g, h) = \operatorname{Sup}\big(d(g(t, x), h(t, x))\big)\,, \qquad t \in P,\ x \in Q\,.$$

De même une sous-base d'écarts sur $\tilde{H}$ est obtenue par:

$$d_2(\tilde{g}, \tilde{h}) = \operatorname*{Sup}_{t\in P}\Big(\operatorname*{Sup}_{x\in Q}\big(d(g_t(x), h_t(x))\big)\Big)\,.$$

Visiblement $d_1(g, h) = d_2(\tilde{g}, \tilde{h})$.

3.5. THÉORÈME. *La catégorie $\mathcal{ET}$ est cartésienne fermée.*

On vient de montrer que le produit direct est un produit tensorie dans la catégorie $\mathcal{ET}$ (cf. [L], [Mc]).

4. p_R-espaces et espaces uniformes de Kelley. Dans cette section X désigne un espace uniforme séparé. Soit $\mathcal{T}_0$ l'ensemble des parties précompactes de X et soit πX l'espace précompactologique $(X; \mathcal{T}_0)$. La topologie induite sur $\mathcal{U}(X)$ par celle de l'algèbre localement convexe $\mathcal{ET}(\pi X)$ définit un elc (= espace localement convexe) séparé noté $\mathcal{U}_p(X)$. Plus généralement si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0$ est une précompactologie (les structures μ_P étant induites par celle de X), on dit que $\mathcal{T}$ est compatible avec la structure uniforme de X; on note alors $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(X)$ le sous-elc correspondant de $\mathcal{ET}(X; \mathcal{T})$.

4.1. THÉORÈME. *Pour chaque précompactologie compatible $\mathcal{T}$, l'algèbre localement convexe complète $\mathcal{ET}(X; \mathcal{T})$ est le complété de $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(X)$.*

En effet toute $f \in \mathcal{ET}(X; \mathcal{T})$ coïncide sur chaque $P \in \mathcal{T}$ avec une fonction $g_P \in \mathcal{U}(X)$, ce qui établit la densité de $\mathcal{U}(X)$ dans $\mathcal{ET}(X; \mathcal{T})$.

4.2. THÉORÈME (Warner-Blanchard-Jourlin). *L'elc $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(X)$ est complet ssi il est quasi-complet.*

D'après 4.1 il suffit de montrer que si $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}(X)$ est quasi-complet on a $\mathcal{ES}(X; \mathfrak{T}) = \mathcal{U}_{\mathfrak{T}}(X)$. Soit donc $f \in \mathcal{ES}(X; \mathfrak{T})$ et supposons d'abord f bornée; pour toute partie précompacte $P \in \mathfrak{T}$ on peut trouver une fonction $g_P \in \mathcal{U}(X)$ telle que $g_P|P = f|P$ et $\|g_P\|_X = \|f\|_P$. Il est évident que la suite généralisée $(g_P)_{P \in \mathfrak{T}}$ tend vers f dans $\mathcal{ES}(X; \mathfrak{T})$. Comme $\{g_P\}_{P \in \mathfrak{T}}$ est borné dans $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}(X)$, son adhérence dans $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}(X)$ est complète et ainsi $f \in \mathcal{U}(X)$. On termine la démonstration pour les fonctions non bornées en étudiant la suite $(f_n)_{n \in N}$ définie par

$$f_n = \max\big(-n, \min(f, n)\big)$$

comme dans [BJ].

Désignons par σX l'espace affaibli de l'espace uniforme X: il est défini par les écarts d_f, $f \in \mathcal{U}(X)$:

$$d_f(x, x') = |f(x) - f(x')|\,.$$

On obtient alors la généralisation du théorème de S. Warner:

4.3. Théorème. *Soit X un espace uniforme et soit $\mathfrak{T}$ une précompactologie compatible; les propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) $\sigma X = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{R}}(X; \mathfrak{T})$;

b) $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}(X)$ *est un elc complet*;

c) $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}(X)$ *est un elc quasi-complet.*

Si on applique ceci à la $\mathcal{C}$-uniformité d'un espace topologique complètement régulier et à sa compactologie canonique, on obtient la caractérisation de Warner des $k_{\boldsymbol{R}}$-espaces.

4.4. Définition. Soient X un espace uniforme et $\mathfrak{T}$ une précompactologie compatible sur X; on dit que *X est un $p_{\boldsymbol{R}}$-espace de type $\mathfrak{T}$* s'il vérifie les propriétés équivalentes du théorème 4.3.

La structure uniforme d'un tel espace n'est entièrement déterminée par la précompactologie $\mathfrak{T}$ que dans le cas ou $X = \sigma X$; on dit alors que X est un *$p_{\boldsymbol{R}}$-espace faible*. On sait qu'une partie P précompacte de X est également précompacte, avec la même structure induite, dans σX. Ainsi σX est un $p_{\boldsymbol{R}}$-espace si X en est un.

Remarque 1. Pour tout $p_{\boldsymbol{R}}$-espace, l'espace vectoriel $\mathcal{U}(X)$ est une algèbre.

Remarque 2. Un $p_{\boldsymbol{R}}$-espace complet est un $k_{\boldsymbol{R}}$-espace; de plus on a $\mathcal{U}(X) = \mathcal{C}(X)$. Réciproquement tout $k_{\boldsymbol{R}}$-espace est un $p_{\boldsymbol{R}}$-espace pour sa structure uniforme universelle ou sa $\mathcal{C}$-uniformité.

Remarque 3. Soit $\hat{X}$ le complété d'un $p_{\boldsymbol{R}}$-espace; on a $\mathcal{U}(\hat{X}) = \mathcal{U}(X) \subset \mathcal{C}(\hat{X}) \subset \mathcal{ES}(\pi X)$, donc $\mathcal{U}(\hat{X}) = \mathcal{C}(\hat{X})$. En particulier si X est faible, il en est de même de $\hat{X}$ qui est alors, en tant qu'espace topologique, un espace replet.

4.5. Théorème-Définition. *On appelle espace uniforme de Kelley un espace uniforme $(X; \mu)$ satisfaisant aux propriétés équivalentes*:

a) *pour tout espace uniforme Y, on a* $\mathcal{U}(X, Y) = \mathcal{ES}(\pi X, \pi Y)$;

b) *une partie $H \subset \mathcal{ES}(\pi X)$ est uniformément équicontinue ssi, pour toute partie précompacte $P \subset X$, sa restriction $H|P$ est uniformément équicontinue*;

c) $(X; \mu) = \boldsymbol{u}(X; \mathfrak{T}_0)$, *i.e.* $X = \boldsymbol{u} \circ \pi X$.

L'équivalence de a) et c) est assurée par la propriété 2.3 et celle de b) et c) par la remarque 2.4.

On désignera par p le foncteur $\boldsymbol{u} \circ \pi$. L'espace pX s'appelle le Kelleyifié de l'espace uniforme X. L'adjonction $(\boldsymbol{u}, \pi)$ donne alors:

4.6. Corollaire. *Soit $(X; \mathfrak{T})$ un espace précompactologique complètement régulier; alors $\boldsymbol{u}X$ est un espace uniforme de Kelley.*

Pour tout espace uniforme Y on a:

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{u}X, Y) \subset \mathcal{ES}(\pi \circ \boldsymbol{u}X, \pi Y) \subset \mathcal{ES}(X, \pi Y)\,.$$

L'égalité $\mathcal{U}(\boldsymbol{u}X, Y) = \mathcal{ES}(X, \pi Y)$ permet de conclure.

4.7. Corollaire. *Soient $(X; \mu)$ un espace uniforme et $\mathfrak{T}$ une précompactologie compatible; si pour tout espace uniforme Y on a*

$$\mathcal{U}(X, Y) = \mathcal{ES}\big((X; \mathfrak{T}), \pi Y\big)$$

alors X est un espace uniforme de Kelley.

La structure uniforme de $\boldsymbol{u}(X; \mathfrak{T})$ est plus fine que celle de $\boldsymbol{u} \circ \pi X$, elle-même plus fine que μ. Comme $\boldsymbol{u}(X; \mathfrak{T}) = X$ d'après 2.3, on a $X = \boldsymbol{u} \circ \pi X$.

De tout ceci découlent quelques égalités fonctorielles:

$$\boldsymbol{u} \circ \pi \circ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \qquad (\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}) \tag{4.8.1}$$

car

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{u} \circ \pi \circ \boldsymbol{u}X, Y) = \mathcal{ES}(\pi \circ \boldsymbol{u}X, \pi Y) = \mathcal{U}(\boldsymbol{u}X, Y)$$

d'après 4.6

$$\pi \circ \boldsymbol{u} \circ \pi = \pi \qquad (\pi \circ p = \pi) \tag{4.8.2}$$

car la précompactologie de πX est compatible avec la structure uniforme de $\boldsymbol{u} \circ \pi X$ et celle-ci est plus fine que la structure uniforme de X. Alors:

4.9. Proposition. *La sous-catégorie pleine $\mathcal{UK}$ des espaces uniformes de Kelley est coréflective dans $\mathcal{U}$.*

En effet, pour tout espace uniforme de Kelley X, et tout espace uniforme Y, on a:

$$\mathcal{U}(X, pY) = \mathcal{ES}(\pi X, \pi \circ pY) = \mathcal{ES}(\pi X, \pi Y) = \mathcal{U}(X, Y)\,.$$

On désigne maintenant par p_R le foncteur $\sigma\circ p$. Si X est un espace uniforme, $p_R X$ est le p_R-espace uniforme faible associé à X. On a le diagramme suivant où les flèches représentent l'application identique (uniformément continue):

$$\begin{tikzcd}
 & & p\circ\sigma X \arrow[dr] & & \\
pX \arrow[r] \arrow[ddrr] & p\circ p_R X \arrow[ur] \arrow[dr] & & p_R\circ\sigma X \arrow[r] & \sigma X \\
 & & p_R X \arrow[ur] & & \\
 & & X \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}$$

En général les p_R-espaces ainsi construits à partir de X sont distincts. Cependant:

a) si X est un espace de Kelley, alors:

$$p\circ\sigma X = p\circ p_R X \quad \text{et} \quad p_R X = \sigma X\ (= p_R\circ\sigma X);$$

b) si X est un espace faible, alors:

$$pX = p\circ p_R X = p\circ\sigma X \quad \text{et} \quad p_R X = p_R\circ\sigma X;$$

c) si X est un espace localement fin ([I]), alors $\pi X = \pi\circ\sigma X$ et:

$$pX = p\circ p_R X = p\circ\sigma X \quad \text{et} \quad p_R X = p_R\circ\sigma X.$$

Dans ces trois cas on a toujours l'égalité précompactologique:

$$\pi\circ\sigma X = \pi\circ p_R X.$$

5. Précompactologies et espaces topologiques. Tous les espaces topologiques sont supposés complètement réguliers (séparés). Soit T un tel espace. On sait que la structure uniforme universelle et la $\mathcal{C}$-uniformité de T ont les mêmes précompacts: ce sont exactement les parties $B\subset T$, telles que, pour toute $f\in\mathcal{C}(T)$, $f(B)$ soit relativement compact dans $\boldsymbol{R}$. On appelle partie bornée de T, ou simplement borné de T un tel précompact (relatively pseudocompact dans la littérature américaine). On désigne par T_v (resp. T_θ) l'espace uniforme obtenu en munissant T de la $\mathcal{C}$-uniformité (resp. de la structure uniforme universelle). La structure uniforme induite par T_v (ou T_θ) sur un borné B est appelée structure canonique de B et on note B_θ l'espace uniforme correspondant.

5.1. Définition. On appele ub_R-espace un *espace topologique* T tel que l'espace uniforme T_v soit un p_R-espace.

On désigne par $\mathcal{B}_0$ l'ensemble de tous les bornés de T. On a donc $T_v = \boldsymbol{u}_R(T;\mathcal{B}_0)$. Comme $\boldsymbol{u}(T;\mathcal{B}_0)$ et $\boldsymbol{u}_R(T;\mathcal{B}_0)$ ont la même topologie et que $\boldsymbol{u}(T;\mathcal{B}_0)$ est un espace uniforme plus fin que T_θ, on a:

5.2. Proposition. *Si T est un ub_R-espace la structure uniforme universelle de l'espace topologique T est identique à la structure uniforme universelle de l'espace précompactologique $(T;\mathcal{B}_0)$.*

On obtient ainsi deux caractérisations pratiques des ub_R-espaces:

5.3. Proposition. *Un espace topologique est un ub_R-espace ssi toute fonction à valeurs réelles dont les restrictions aux bornés sont uniformément continues est continue.*

5.4. Proposition. *Un espace topologique est un ub_R-espace ssi tout ensemble de fonctions à valeurs réelles dont les restrictions aux bornés sont uniformément équicontinues est équicontinu.*

Les ub_R-espaces étaient appelés b'-espaces dans [BJ] et b_R-espaces dans [B_4] et [B_5]. Il semble préférable d'utiliser la notation ub_R, la notation b_R étant déjà préoccupée ([N]). On trouvera dans [B_4], [B_5] et [P_2] des applications de ces ub_R-espaces au problème de la complétion topologique d'un produit d'espaces complètement réguliers.

Les k_R-espaces, les b_R-espaces au sens de N. Noble, les M-espaces de K. Morita sont des ub_R-espaces. On précise encore cette notion en choisissant une précompactologie compatible $\mathcal{B}$ sur T_θ. Un espace T est un ub_R-espace de type $\mathcal{B}$ si une fonction $f\colon T\to\boldsymbol{R}$ est continue dès que ses restrictions aux parties bornées $B\in\mathcal{B}$ sont uniformément continues pour la structure canonique.

Le théorème 4.3 ci-dessus donne comme corollaire le théorème de N. Blanchard-M. Jourlin ([BJ], th. 1.3).

Le théorème d'Ascoli donne la conséquence suivante:

5.5. Proposition. *Soit T un ub_R-espace de type $\mathcal{B}$; les parties relativement compactes de $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(T)$ sont exactement les parties équicontinues et simplement bornées de $\mathcal{C}(T)$.*

Etant donnés deux ub_R-espaces T et X, de types respectifs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on désigne par $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ l'ensemble des parties $A\times B\subset T\times X$, $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$. L'ensemble $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ définit bien une précompactologie sur $T\times X$ mais en général elle n'est pas compatible avec la topologie de $T\times X$ (cf. [P_2]). Cependant si $\mathcal{B}=\mathcal{K}$ il en est bien ainsi. De plus:

5.6. Théorème. *Soient T un ub_R-espace de type $\mathcal{A}$ et X un espace localement compact; alors $T\times X$ est un ub_R-espace de type $\mathcal{A}\otimes\mathcal{K}$.*

Remarquons d'abord que si X est un k_R-espace, on a $\mathcal{C}(X) = \mathcal{E}\mathcal{S}(X;\mathcal{K})$ et $\pi\mathcal{C}_c(X) = \mathbf{Hom}(X;\mathcal{K})$ d'après 5.5.

Si X est localement compact, on a alors les égalités:

$$\mathcal{C}(T\times X)=\mathcal{C}(T,\mathcal{C}_c(X))=\mathcal{E}\mathcal{T}((T;\mathcal{A}),\pi\mathcal{C}_c(X))=\mathcal{E}\mathcal{T}((T;\mathcal{A}),\mathbf{Hom}(X;\mathcal{K}))$$
$$=\mathcal{E}\mathcal{T}(T\times X;\mathcal{A}\otimes\mathcal{K})$$

d'après 4.5 et 3.4.

Bibliographie

[B_1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, ch. 2, 4-ème éd., Paris 1965.

[B_2] — *Topologie Générale*, ch. 10, 2-ème éd., Paris 1961.

[B_3] H. Buchwalter, *Topologie et compactologies*, Pub. Dép. Math. Lyon 6 (1969), pp. 1–74.

[B_4] — *Sur le théorème de Glicksberg-Frolík*, C. R. Acad. Sc. Paris, série A, t. 273 (1971), pp. 11–14.

[B_5] — *Produit topologique, produit tensoriel et c-replétion*, Colloque International d'Analyse fonctionnelle de Bordeaux, Bull. Soc. Math. France, Suppl. au numero de Septembre 1972, pp. 51–71.

[BJ] N. Blanchard et M. Jourlin, *La topologie de la convergence bornée sur les algèbres de fonctions continues*, Pub. Dép. Math. Lyon 6 (1969), pp. 85–96.

[BP_1] H. Buchwalter et R. Pupier, *Une caractérisation topologique de la complétion universelle d'un espace complètement régulier*, C. R. Acad. Sc. Paris, série A, 268 (1969), pp. 1534–1536.

[BP_2] — — *Complétion d'un espace uniforme et formes linéaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, série A, 273 (1971), pp. 96–98.

[I] J. R. Isbell, *Uniform spaces*, Math. Surveys nb. 12, Providence 1964.

[K] M. Katětov, *On real-valued functions in topological spaces*, Fund. Math. 38 (1951), pp. 85–91.

[L] F. E. J. Linton, *Autonomous categories and duality of functors*, J. Algebra 2 (1965), pp. 315–349.

[Mc] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, 1971.

[N] N. Noble, *A note on z-closed projections*, Proc. A.M.S. 23 (1969), pp. 73–76.

[P_1] R. Pupier, *Méthodes fonctorielles en topologie générale*, Thèse Sciences Mathématiques, Université de Lyon I, février 1971.

[P_2] — *Topological completion of a product*, à paraitre in Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées.

[W] S. Warner, *The topology of compact convergence on continuous functions spaces*, Duke Math. J. 25 (1958), pp. 265–282.

UNIVERSITÉ DE SAINT-ETIENNE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Reçu par la Rédaction le 15. 9. 1972

Atomic compactness in $\aleph_1$-categorical Horn theories

by

John T. Baldwin (East Lansing, Mich.)

Abstract. Theorem. *If T is an almost strongly minimal $\forall\exists$ Horn theory then every model of T is atomic compact.*

Mycielski [7] introduced the notion of an atomic compact algebra. A structure $\mathcal{A}$ is atomic compact if each class Σ of atomic formulas (possibly with constants naming elements of $\mathcal{A}$) which is finitely satisfiable in $\mathcal{A}$ is satisfiable in $\mathcal{A}$. Atomic compact structures have been intensively investigated e.g. [8, 11]. Taylor's recent paper [10] contains an extensive bibliography on atomic compact structures.

We were struck by the remark in [7] that all divisible Abelian groups were atomic compact. This meant in particular that every model of the complete $\aleph_1$-categorical theory of infinite, torsion-free divisible Abelian groups was atomic compact. We sought sufficient conditions on a complete first order theory T for all its models to be atomic compact.

We found a narrow class of $\aleph_1$-categorical first order theories which satisfy this condition. These are the almost strongly minimal, model complete, Horn theories. Various properties of almost strongly minimal theories are investigated in [1, 2]. A theory T is model complete if every submodel of a model of T is an elementary submodel. A Horn theory is one axiomatized by Horn sentences. We rely on the fact [9] that the class of models of a Horn theory is closed under direct power. Various examples of theories of the type we are considering are given in [5]. This paper assumes familiarity with [11], sections 1 and 2 of [4] and the first section of [1].

We deal with structures $\mathcal{A}$ which may have both relations and function for a first order language L. The logical connectives of L are $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\forall$ and $\exists$. A formula A is existential ($\exists$-formula) if it is equivalent to a formula in prenex normal form all of whose quantifiers are existential. A is an $\forall\exists$ formula if it is equivalent to a formula in prenex normal form whose prefix consists of a string of universal quantifiers followed by a string of existential quantifiers. A McKinsey formula is a conjunction of atomic and negation of atomic formulas (neg-atomic) at most one of which is atomic. A Horn formula is a formula in prenex normal form