[7] L. Mohler, *A characterization of smoothness in dendroids*, Fund. Math. 67 (1970), pp. 369–376.
[8] L. E. Ward, Jr., *A fixed point theorem for multi-valued functions*, Pacific J. Math. 8 (1958), pp. 921–927.
[9] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, New York 1942.

UNIVERSITY OF OREGON
Eugene, Oregon

Reçu par la Rédaction le 30. 5. 1972

Theorien abelscher Gruppen mit einem einstelligen Prädikat

von

Andreas Baudisch (Berlin)

Zusammenfassung. Mit Hilfe der Methode der Modellinterpretierbarkeit wird folgendes Theorem bewiesen:

Theorem. *Sei K eine Klasse abelscher Gruppen, deren Mächtigkeiten nicht endlich beschränkt sind (z. B. kann K aus einer einzigen unendlichen abelschen Gruppe bestehen), ferner sei K_P die Klasse aller abelschen Gruppen $\langle A, P\rangle$ mit einstelligem Prädikat P, $A \in K$, sowie K_P^* die Klasse aller abelschen Gruppen $\langle A, P\rangle$, $A \in K$, wobei P ein endliches einstelliges Prädikat ist. Dann sind die elementaren Theorien $\mathrm{Th}K_P$ und $\mathrm{Th}K_P^*$ rekursiv unentscheidbar.*

1. Das Resultat. Es hat sich herausgestellt, daß die in der Sprache $\langle +\rangle$ formalisierten elementaren Theorien der wichtigsten Klassen abelscher Gruppen rekursiv entscheidbar sind, speziell die Theorie der Klasse aller abelschen Gruppen. Die grundlegende Arbeit auf diesem Gebiet wurde 1954 von W. Szmielew veröffentlicht [7]. Die Situation verändert sich radikal, wenn die zugrundegelegte Sprache erweitert wird. In dieser Arbeit wird die um ein einstelliges Prädikatensymbol P erweiterte Sprache der abelschen Gruppen betrachtet. Ist K eine Klasse abelscher Gruppen, so daß die Mächtigkeiten der Gruppen aus K endlich beschränkt sind, so ist nicht nur die elementare Theorie $\mathrm{Th}K$, sondern auch $\mathrm{Th}K_P$ entscheidbar, wobei K_P die Klasse aller Strukturen $\langle A, P\rangle$ ist, in denen A eine abelsche Gruppe aus K und P ein einstelliges Prädikat in A ist. Das Hauptresultat ist nun, daß diese Fälle gewissermaßen die einzigen hinsichtlich der rekursiven Entscheidbarkeit sind, d.h., es gilt das folgende

THEOREM. *Sei K eine Klasse abelscher Gruppen, deren Mächtigkeiten nicht endlich beschränkt sind (z.B. kann K aus einer einzigen unendlichen abelschen Gruppe bestehen), ferner sei K_P die Klasse aller abelschen Gruppen $\langle A, P\rangle$ mit einstelligem Prädikat P, $A \in K$, sowie K_P^* die Klasse aller abelschen Gruppen $\langle A, P\rangle$, $A \in K$, wobei P ein endliches einstelliges Prädikat ist. Dann sind die elementaren Theorien $\mathrm{Th}K_P$ und $\mathrm{Th}K_P^*$ rekursiv unentscheidbar.*

Hieraus folgt unmittelbar das folgende Korollar:

Sowohl die volle als auch die schwache monadische Theorie zweiter Stufe jeder Klasse K abelscher Gruppen, deren Mächtigkeiten nicht endlich beschränkt sind, ist rekursiv unentscheidbar. Das gilt schon für solche Aussagen, die eine einzige universell quantifizierte Mengenvariable enthalten.

Der Beweis des Theorems wird durch die Methode der Modellinterpretierbarkeit geführt, die auf Malzew zurückgeht. Es zeigt sich, daß die Klassen K_P, sobald K eine unendliche abelsche Gruppe enthält, nicht nur rekursiv unentscheidbar, sondern sogar universell bezüglich Modellinterpretierbarkeit von abzählbaren Strukturen im Sinne von Hauschild und Rautenberg [3] sind.

Für den Fall, daß K die Klasse der endlichen elementaren, bzw. der periodischen, bzw. der endlichen zyklischen abelschen Gruppen ist, hat S. Garfunkel die Unentscheidbarkeit von $\mathrm{Th}K_P$ in [2] angekündigt.

K. Hauschild und W. Rautenberg haben in [3] bewiesen, daß die Theorie der abelschen Gruppen mit einem einstelligen Prädikat für Halbgruppen universell bezüglich Modellinterpretierbarkeit und damit unentscheidbar ist.

Das Resultat des Theorems gilt nicht mehr, wenn das einstellige Prädikat nur über Untergruppen variiert. So ist zum Beispiel die Theorie mit Untergruppenprädikat der Gruppe vom Typ p^∞ rekursiv entscheidbar.

Weiterhin sind folgende Resultate bekannt:

a) Die Theorie mit Variablen für Individuen und für Servanzuntergruppen der endlichen abelschen p-Gruppen ist rekursiv unentscheidbar [5].

b) Die elementare Theorie der Untergruppenverbände der abelschen Gruppen [4], sowie der endlichen abelschen p-Gruppen [5] ist rekursiv unentscheidbar.

c) Die elementare Theorie mit einstelligem Prädikat für Untergruppen der torsionsfreien abelschen Gruppen ist rekursiv entscheidbar [6].

d) Die Theorie mit Variablen für Individuen und für Untergruppen einer Gruppe vom Typ p^∞ ist rekursiv entscheidbar [1].

An dieser Stelle möchte ich insbesondere Herrn Dr. Herre für wertvolle Hinweise und Anregungen danken.

2. Eine Einteilung von Klassen abelscher Gruppen.

Lemma 1. *Wenn K eine Klasse abelscher Gruppen ist, deren Mächtigkeiten nicht endlich beschränkt sind, dann trifft für K einer der folgenden fünf Fälle zu:*

(1) *K enthält eine Gruppe mit einem Element unendlicher Ordnung.*

(2) *K enthält eine periodische Gruppe, die eine unendliche Untergruppe enthält, die direkte Summe zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung größer zwei ist.*

(3) *K enthält eine periodische Gruppe, die eine unendliche Untergruppe enthält, die direkte Summe zyklischer Gruppen der Ordnung zwei ist.*

(4) *K enthält nur endliche Gruppen, deren Mächtigkeiten nicht endlich beschränkt sind.*

(5) *K enthält eine periodische Gruppe, die eine Untergruppe vom Typ p^∞ enthält.*

Wenn keiner der Fälle (1) bis (4) vorliegt, so ist zunächst klar, daß K eine unendliche periodische Gruppe A enthält, welche keine unendliche Untergruppe enthält, die direkte Summe zyklischer Gruppen ist. Dann reduziert sich der Beweis von Lemma 1 gänzlich auf das folgende

Lemma 2. *Jede unendliche periodische abelsche Gruppe A, die keine Untergruppe besitzt, die direkte Summe unendlich vieler zyklischer Gruppen ist, hat eine Untergruppe vom Typ p^∞.*

Beweis. p sei eine Primzahl und A_p sei die Untergruppe aller Elemente von A mit einer Ordnung p^i für gewisses $i \geqslant 0$. A ist periodisch, also direkte Summe der Untergruppen A_p. Wegen der Voraussetzung ist A_p nur für endlich viele Primzahlen p ungleich der Nulluntergruppe. Es folgt, daß einer der primären Summanden A_p unendlich ist. Es wird gezeigt, daß ein solcher Summand A_p eine Gruppe vom Typ p^∞ als Untergruppe enthält.

Es wird der folgende Graph $\langle \alpha, \varrho \rangle$ gebildet. Die Grundmenge sei die Menge aller zyklischen Untergruppen von A_p.

Es wird definiert:

$$\varrho(N, M)\colon N \subseteq M \text{ und } \mathrm{Ord}(N) = p^n,\ \mathrm{Ord}(M) = p^{n+1} \text{ für ein } n \geqslant 0,$$
$$\text{wobei } \mathrm{Ord}(X) \text{ die Ordnung von } X \text{ ist.}$$

$\langle \alpha, \varrho \rangle$ ist ein zusammenhängender Baum. $\langle \alpha, \varrho \rangle$ ist endlichvalent, denn sei N ein Punkt des Baumes, $M_1, M_2, M_3, \ldots$ seine Nachfolger. Es sei L die von $N \cup \bigcup_i M_i$ erzeugte Untergruppe in A_p. Da die Ordnung der Elemente von L endlich beschränkt ist, folgt nach dem ersten Satz von Prüfer, daß L direkte Summe zyklischer Gruppen ist. Nach Voraussetzung des Lemmas muß L dann endlich sein. Damit kann L nur endlich viele Nachfolger haben. Aus dem ersten Satz von Prüfer und der Unendlichkeit von A folgt weiter, daß A_p Elemente beliebig hoher Ordnung haben muß. Der Baum $\langle \alpha, \varrho \rangle$ enthält deshalb beliebig lange Wege. Dann folgt nach dem Königschen Graphensatz die Existenz eines unendlichen Weges in $\langle \alpha, \varrho \rangle$. Dieser unendliche Weg repräsentiert eine Untergruppe vom Typ p^∞. q.e.d.

3. Beweis des Haupttheorems. Unter einem Graphen $\langle\alpha, \varrho\rangle$ verstehen wir im folgenden eine Ordinalzahl $\alpha \leqslant \omega$ und eine irreflexive symmetrische Relation ϱ über allen natürlichen Zahlen $i < \alpha$. Um das Haupttheorem zu beweisen, reicht es nach der Methode der Modellinterpretierbarkeit, in jedem der in Lemma 1 angegebenen Fälle (1) bis (5) mittels definierbarer Prädikate für Grundmenge und Relation die abzählbaren irreflexiven symmetrischen Graphen in K_P (bzw. die endlichen irreflexiven symmetrischen Graphen in K_P^*) zu beschreiben. Es müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

I. In jeder Struktur $\langle A, P\rangle$ aus K_P (bzw. K_P^*) ist die vermittels Definition festgelegte Struktur $\langle\alpha', \varrho'\rangle$ ein Graph (bzw. ein endlicher Graph), falls α' nicht leer ist.

II. Jeder Graph (bzw. jeder endliche Graph) ist in K_P (bzw. in K_P^*) definierbar.

Fall 1. Eine Gruppe A aus K enthält ein Element a unendlicher Ordnung. Es wird ein Graph $\langle\alpha, \varrho\rangle$ betrachtet. $(n_i)_{i<\alpha}$ sei eine Folge von natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft $\sum_{i=1}^{k-1} 2n_i < n_k$. Dann gilt:

(*) Wenn $n_i + n_j = n_k + n_m$, so $\{i, j\} = \{k, m\}$.

Wenn

$$P_\alpha = \{n_i a\}_{i<\alpha}, \quad P_\varrho = \{(n_i+n_j)a\colon \langle i, j\rangle \in \varrho\} \quad \text{und} \quad P = P_\alpha \cup P_\varrho$$

gesetzt wird, kann $\langle\alpha, \varrho\rangle$ in $\langle A, P\rangle$ folgendermaßen definitorisch beschrieben werden:

$$\alpha' = \{x \in A\colon Px \wedge \neg \exists uv(x = u+v \wedge Pu \wedge Pv \wedge u \neq v)\},$$

$$\varrho' = \{\langle x, y\rangle \in \alpha'^2\colon x \neq y \wedge P(x+y)\}.$$

Dann ist $\varphi(i) = n_i a$ ein Isomorphismus von $\langle\alpha, \varrho\rangle$ auf $\langle\alpha', \varrho'\rangle$. Zuerst ist $P_\alpha = \alpha'$ zu zeigen. Wenn $x \in \alpha'$, dann $x \in P$ und $x \notin P_\varrho$, folglich $x \in P_\alpha$. Wenn $x = n_k a \in P_\alpha$, aber nicht $n_k a \in \alpha'$, dann gilt $n_k a = (n_i + \varepsilon n_j + n_l + \delta n_m)a$ mit $i \neq j$, $l \neq m$, $\{i, j\} \neq \{l, m\}$ und $\varepsilon, \delta \in \{0, 1\}$. Dies ist auf Grund der Definition der Folge $(n_i)_{i<\alpha}$ nicht möglich.

Weiter folgt aus $\langle i, j\rangle \in \varrho$, $(n_i+n_j)a \in P_\varrho$ und so $\langle n_i a, n_j a\rangle \in \varrho'$. Umgekehrt gelte $\langle n_i a, n_j a\rangle \in \varrho'$. Dann gilt $(n_i+n_j)a \in P$, und wegen $\alpha' = P_\alpha$ sogar $(n_i+n_j)a \in P_\varrho$. Folglich gibt es ein l und ein m, so daß $(n_i+n_j)a = (n_l+n_m)a$ und $\langle l, m\rangle \in \varrho$. Wegen (*) folgt $\langle i, j\rangle \in \varrho$. Damit ist II gezeigt. I folgt in diesem, wie in allen weiteren Fällen, trivial.

Fall 2. K enthält eine periodische Gruppe A, die eine unendliche Untergruppe B enthält, die direkte Summe zyklischer Gruppen von

Primzahlpotenzordnung größer zwei ist. $(a_i)_{i<\omega}$ sei eine abzählbare Teilmenge einer Basis von B. Der Graph $\langle\alpha, \varrho\rangle$ ist zu beschreiben. Es wird

$$P_\alpha = \{a_i\}_{i<\alpha}, \quad P_\varrho = \{\pm(a_i+a_j)\colon \langle i, j\rangle \in \varrho\} \quad \text{und} \quad P = P_\alpha \cup P_\varrho$$

gesetzt und

$$\alpha' = \{x \in A\colon Px \wedge \neg P(-x)\},$$

$$\varrho' = \{\langle x, y\rangle \in \alpha'^2\colon x \neq y \wedge P(x+y) \wedge P(-x-y)\}$$

definiert. Dann ist $\langle\alpha, \varrho\rangle$ zu $\langle\alpha', \varrho'\rangle$ isomorph. Um dies zu zeigen, wird zuerst $\alpha' = P_\alpha$ gezeigt. Wenn $x \in \alpha'$, folgt Px und $\neg P(-x)$. Hieraus ergibt sich $x \notin P_\varrho$ und damit $x \in P_\alpha$. Umgekehrt sei $x = a_k \in P_\alpha$. Dann gilt Pa_k. Es ist zu zeigen, daß nicht $P(-a_k)$ gilt. Da die Ordnung der a_i größer als zwei ist, gibt es kein j mit $-a_k = a_j$. Weiter kann wegen der linearen Unabhängigkeit der a_i nicht $-a_k = (-1)^\varepsilon(a_j+a_l)$ mit $\varepsilon \in \{0, 1\}$ gelten. Damit ist $\neg P(-a_k)$ nachgewiesen. Aus $\langle i, j\rangle \in \varrho$ folgt sofort $\pm(a_i+a_j) \in P$ und somit $\langle a_i, a_j\rangle \in \varrho'$. Wenn umgekehrt $\langle a_i, a_j\rangle \in \varrho'$, so $\pm(a_i+a_j) \in P$. Da $P_\alpha = \alpha'$, folgt $\pm(a_i+a_j) \in P_\varrho$. Es gibt also ein l und ein m, so daß $a_i+a_j = (-1)^\varepsilon(a_l+a_m)$ mit $\varepsilon \in \{0, 1\}$ und $\langle l, m\rangle \in \varrho$. Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der a_i folgt $\{i, j\} = \{k, l\}$ und somit $\langle i, j\rangle \in \varrho$.

Fall 3. Es gibt eine Gruppe $A \in K$, die eine unendliche Untergruppe B enthält, die direkte Summe zyklischer Gruppen der Ordnung zwei ist. $\{a_i, b_i, c_i\}_{i<\omega}$ sei eine abzählbare Teilmenge einer Basis von B. Es sei ein Graph $\langle\alpha, \hat{\varrho}\rangle$ gegeben. $\{\pi_i\}_{i<\beta}$ sei eine Aufzählung von ϱ. Wenn $\pi_k = \langle i, j\rangle$, sei $\sigma_k = a_i + a_j$. Es wird

$$P_\alpha = \{a_i\}_{i<\alpha},$$

$$P_1 = \{b_i\}_{i<\beta} \cup \{c_i\}_{i<\beta} \cup \{b_i + c_i\}_{i<\beta},$$

$$P_2 = \{\sigma_i + b_i\}_{i<\beta} \cup \{\sigma_i + c_i\}_{i<\beta},$$

$$P_\varrho = P_1 \cup P_2 \quad \text{und} \quad P = P_\alpha \cup P_\varrho$$

gesetzt. Dann ist P_ϱ durch

$$P_\varrho = \{x \in P\colon \exists yz(x = y+z \wedge y \neq z \wedge Py \wedge Pz)\}$$

charakterisiert. Wenn

$$\alpha' = \{x \in P\colon \neg\exists yz(y \neq z \wedge x = y+z \wedge Py \wedge Pz)\},$$

gilt $P_\alpha = \alpha'$. Um ϱ zu definieren, wird

$$\varrho' = \{\langle x, y\rangle \in \alpha'^2\colon \exists uv(u, v \in P_\varrho \wedge u+v = x+y)\}$$

gesetzt. Dann folgt aus $\langle i, j\rangle \in \varrho$ sofort $\sigma_k = a_i + a_j = (\sigma_k + b_k) + b_k$, wobei $\sigma_k + b_k \in P_\varrho$ und $b_k \in P_\varrho$ und damit $\langle a_i, a_j\rangle \in \varrho'$. Umgekehrt gelte $\langle i, j\rangle \notin \varrho$. Es ist zu zeigen, daß die Gleichung $a_i + a_j = u + v$, wobei

$u, v \in P_\varrho$, keine Lösung hat. Da $\langle i, j\rangle \notin \varrho$, gibt es kein k mit $\sigma_k = a_i + a_j$. Eine Lösung hätte deshalb das Aussehen $u = \sigma_k + r$, $v = \sigma_l + s$, wobei $\sigma_k + \sigma_l = a_i + a_j$ und $r \in \{b_k, c_k\}$ und $s \in \{b_l, c_l\}$. Da dann $r + s \neq 0$, wäre auch dies keine Lösung.

Fall 4. K enthält nur endliche Gruppen, deren Mächtigkeiten nicht beschränkt sind. In diesem Fall gilt $K_P = K_P^*$. Es genügt, die endlichen Graphen zu interpretieren. Jede endliche Gruppe ist direkte Summe zyklischer Gruppen. Falls in K direkte Summen mit beliebig hoher Anzahl von Summanden vorkommen, geht man wie in Fall 2 oder 3 vor. Tritt dies nicht ein, so findet man nach Voraussetzung Elemente mit beliebig hoher Ordnung in den Gruppen aus K. In diesem Fall führen Überlegungen wie in Fall 1 zum Ziel.

Fall 5. K enthält eine Gruppe A mit einer Untergruppe B vom Typ p^∞. Es sei ein Graph $\langle \alpha, \varrho\rangle$ gegeben. $P_\alpha = \{a_i\}_{i<\alpha}$ sei eine Folge von Elementen aus B, die den Gleichungen $pa_1 \neq 0$ und $p^2 a_{i+1} = a_i$ genügt. Weiter sei

$$P_\varrho = \{a_i + a_j \colon \langle i, j\rangle \in \varrho\} \quad \text{und} \quad P = P_\alpha \cup P_\varrho .$$

Es wird definiert:

$$\alpha' = \{x \in A \colon Px \wedge \neg \exists yz (y \neq z \wedge x = y + z \wedge Py \wedge Pz)\},$$

$$\varrho' = \{\langle x, y\rangle \in \alpha'^2 \colon P(x+y) \wedge x \neq y\}.$$

Es wird gezeigt, daß $\varphi(i) = a_i$ ein Isomorphismus von $\langle \alpha, \varrho\rangle$ auf $\langle \alpha', \varrho'\rangle$ ist. Zuerst wird $P_\alpha = \alpha'$ gezeigt. $\alpha' \subseteq P_\alpha$ ist trivial. Es sei $a_k \in P_\alpha$, aber $a_k \notin \alpha'$. Dann gilt $a_k = a_i + \varepsilon a_j + a_l + \delta a_m$ oder $a_k = 2a_i + \varepsilon a_j + a_l$, wobei i, j, l, m paarweise verschieden sind, und $\varepsilon, \delta \in \{0, 1\}$. Nach Konstruktion der Folge $(a_i)_{i<\alpha}$ sind die Ordnungen (Bezeichnung $\operatorname{ord}(x)$) der Terme auf den rechten Seiten der beiden Gleichungen paarweise verschieden. Da in primären Gruppen $\operatorname{ord}(a+b) = \operatorname{ord}(a)$, wenn $\operatorname{ord}(a) > \operatorname{ord}(b)$, folgt

$$\operatorname{ord}(a_k) = \max\big(\operatorname{ord}(a_i), \operatorname{ord}(\varepsilon a_j), \operatorname{ord}(a_l), \operatorname{ord}(\delta a_m)\big) \quad \text{bzw.}$$

$$\operatorname{ord}(a_k) = \max\big(\operatorname{ord}(2a_i), \operatorname{ord}(\varepsilon a_j), \operatorname{ord}(a_l)\big).$$

Sei in der ersten Gleichung o.B.d.A.

$$\max\big(\operatorname{ord}(a_i), \operatorname{ord}(\varepsilon a_j), \operatorname{ord}(a_l), \operatorname{ord}(\delta a_m)\big) = \operatorname{ord}(a_i).$$

Dann folgt $a_k = a_i$ nach Konstruktion von P_α. Dies ergibt einen Widerspruch.

In bezug auf die zweite Gleichung muß man zwei Fälle unterscheiden:

a) $\max\big(\operatorname{ord}(2a_i), \operatorname{ord}(\varepsilon a_j), \operatorname{ord}(a_l)\big) \neq \operatorname{ord}(2a_i)$. Da $2a_i \neq 0$, folgt ein Widerspruch wie im Fall der ersten Gleichung.

b) $\max\big(\operatorname{ord}(2a_i), \operatorname{ord}(\varepsilon a_j), \operatorname{ord}(a_l)\big) = \operatorname{ord}(2a_i)$. Falls B primär bezüglich der Primzahl zwei ist, ergibt sich ein Widerspruch, da dann $\operatorname{ord}(2a_i) \neq \operatorname{ord}(a_m)$ für alle m. Sonst gilt $\operatorname{ord}(2a_i) = \operatorname{ord}(a_i)$. Dann folgt $a_k = a_i$, was wie im Fall der ersten Gleichung zum Widerspruch führt. Weiter ergibt sich aus $\langle i, j\rangle \in \varrho$ offensichtlich $\langle a_i, a_j\rangle \in \varrho'$. Umgekehrt gelte $\langle a_i, a_j\rangle \in \varrho'$. Dann $a_i + a_j \in P$. Da $P_\alpha = \alpha'$, folgt $a_i + a_j = a_l + a_m$ mit $\langle l, m\rangle \in \varrho$ für gewisse l, m. $\{i, j\} = \{l, m\}$ und damit $\langle i, j\rangle \in \varrho$ ergibt sich aus ähnlichen Überlegungen wie oben. q.e.d.

Literatur

[1] A. Baudisch, *Entscheidbarkeitsprobleme einiger Theorien der abelschen Gruppe vom Typ p^∞*, erscheint demnächst.

[2] S. Garfunkel, *Notices of the American Mathematical Society* 15, p. 623.

[3] K. Hauschild und W. Rautenberg, *Interpretierbarkeit in der Gruppentheorie*, Algebra Universalis 1, (2) (1971), pp. 136–151.

[4] M. I. Kargapolov, *Über die elementare Theorie der Struktur der Untergruppen von Gruppen*, Algebra i Logika 1 (3) (1962), pp. 46–53.

[5] G. T. Koslov, *Unentscheidbarkeit der elementaren Theorie des Verbandes der endlichen abelschen p-Gruppen*, Algebra i Logika 9 (2) (1970), pp. 167–171.

[6] — und A. I. Kokorin, *Die elementare Theorie der abelschen torsionsfreien Gruppen mit Untergruppenprädikat*, Algebra i Logika 8 (3) (1969), pp. 320–334.

[7] W. Szmielew, *Elementary properties of Abelian groups*, Fund. Math. 41 (1954), pp. 203–271.

Reçu par la Rédaction le 10. 7. 1972