and

$$b \in U_n - \mathrm{Im}_{n+1,n+1}(Z, X) = \mathrm{Im}_{n+1,n+1}(Z', X)$$

where

$$Z' = \{c;\ \overline{\mathfrak{M}} \models \psi(c, Z, a_{n+1})\}\,.$$

P. Zbierski [5] uses a form of downward Skolem-Lövenheim theorem for A_{n+1}. It is easy to see that the same results holds true for the system $\mathrm{BS}_{n+1}+\mathrm{Comp}_{n+1,n+1}+W_n$. The strong comprehension scheme $\mathrm{Comp}_{n+1,n+1}$ is needed for "the definition of truth". Using W_n one can define Skolem functions and prove (for notation see Zbierski [5] p. 561):

(8) $\quad \mathrm{BS}_{n+1}+\mathrm{Comp}_{n+1,n+1}+W_n \vdash (\forall Y)$
$$(Y \text{ is a model of } A_n \to (\exists a)(a \in Y \ \&\ a \prec Y))\,.$$

Now, the result follows directly: applying the Skolem-Lövenheim theorem (8) in $\overline{\mathfrak{M}}[X]$ we obtain a $b \in U_n$, $b \prec U_n$. Thus b codes a β-model — a contradiction with the minimality of $\mathfrak{M}$.

Remark. By (4), $\mathfrak{M}^* = \langle U_1, \ldots, U_n, \mathrm{Def}_{\mathfrak{M}}\rangle$ is a model of $\mathrm{BS}_{n+1}+ \mathrm{Comp}_{n+1,n}+W_{n-1}$. The generic extension

$$\mathfrak{M}^*[X] = \langle U_1, \ldots, U_n, \mathrm{Def}_{\mathfrak{M}}[X]\rangle$$

is a model of $\mathrm{BS}_{n+1}+\mathrm{Comp}_{n+1,n}+W_n$. Thus, we may conclude, that the Skolem-Lövenheim theorem (8) is not provable in $\mathrm{BS}_{n+1}+W_n+ \mathrm{Comp}_{n+1,n}$. By further analysis, we may conclude that "the truth cannot be defined" in this system.

References

[1] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Hermann 1956.
[2] A. Mostowski, *Models of second order arithmetic with definable Skolem functions*, Fund. Math. 75 (1972), pp. 223–234.
[3] A. Mostowski and Y. Suzuki, *On ω-models which are not β-models*, Fund. Math. 65 (1969), pp. 83–93.
[4] P. Vopěnka and P. Hájek, *The Theory of Semisets*, Prague 1972.
[5] P. Zbierski, *Models for higher order arithmetics*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19 (1971), pp. 557–562.

Reçu par la Rédaction le 29. 9. 1973

Некоторые простые следствия аксиомы конструктивности

С. Р. Когаловский (Иваново)

Abstract. Addison's lemma on Δ_2^1 well orderability of $P(w)$ is generalized (in the supposition $V = L$) to any infinite structures (Theorem 2.10) that gives a possibility of transferring a lot of well-known results referring to the standard model of arithemetics to any infinite structures. In the article there are considered some "direct" applications of Theorem 2.10. So A. Tarsky's question on definability of the definability notion is settled for any infinite structure. There is found a relation between semantic completeness and cathegoricity for sentences of the 2nd higher orders. There is proved isomorphism of denumerable elementary structures of the finite signature satisfying the same sentences of the class V_2^1.

В этой статье рассмотрения проводятся в рамках $\mathrm{ZF}+\mathrm{V}=\mathrm{L}$.

Порядком структуры $\mathfrak{S}$ мы называем ординал $\mathrm{Od}\,\mathfrak{S} = \min\{\mathrm{Od}'\mathfrak{S}'\colon \mathfrak{S}' \simeq \mathfrak{S}\}$, а порядком отношения a^τ (типа τ) в $\mathfrak{S}$ — ординал $\mathrm{Od}\,\mathfrak{S}(a^\tau)$, где $\mathfrak{S}(a^\tau)$ — структура, образованная из $\mathfrak{S}$ добавлением a^τ к множеству определяющих отношений $\mathfrak{S}$. Мы доказываем, что для всякой бесконечной элементарной структуры $\mathfrak{S}$ и всякого типа $\tau = (0,\ldots 0)$ отношение $\mathrm{Od}\,\mathfrak{S}(a^\tau) < \mathrm{Od}\,\mathfrak{S}(b^\tau)$ определимо в $\mathfrak{S}$ как формулой из V_2^1, так и формулой из Δ_2^1. Этот результат обобщается на случай произвольных бесконечных структур и произвольных типов τ (теорема 2.10), что создает возможность перенесения на произвольные бесконечные структуры известных результатов, относящихся к стандартной модели арифметики, в частности, результатов Аддисона [1], связанных со свойствами проективных иерархий, результатов, связанных с вопросом Тарского [11] об определимости понятия определимости, и т. д. В статье рассмотрены лишь некоторые из „непосредственных“ теоретико модельных приложений теоремы 2.10, именно-следующие.

1. Пользуясь тем, что отношение квазипорядка $\mathrm{Od}\,\mathfrak{S}(a^\tau) < \mathrm{Od}\,\mathfrak{S}(b^\tau)$ в бесконечной структуре $\mathfrak{S}$ индуцирует отношение вполне упорядочения на множестве $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$ отношений типа τ, инвариантных относительно автомор-

физмов $\mathfrak{S}$, и что множество $D_\tau(\mathfrak{S})$ всех отношений типа τ, определимых в $\mathfrak{S}$ формулами конечных ступеней, включается в $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$, мы устанавливаем, что множество $D_\tau(\mathfrak{S})$ определимо в $\mathfrak{S}$ в точности тогда, когда оно совпадает с $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$. Отсюда следует, что определимость $D_\tau(\mathfrak{S})$ в $\mathfrak{S}$ равносильна тому, что $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$ не более чем счетно, а для $\tau \neq 0$ — тому, что $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$ конечно (теоремы 4.6 и 4.8).

2. Пусть $\mathfrak{L}$ — какой-нибудь фрагмент языка высших ступеней. Выполнимое предложение φ этого языка называется семантически полным в $\mathfrak{L}$, если для всякого предложения ψ из $\mathfrak{L}$ общезначимо $\varphi \to \psi$ или $\varphi \to \neg\psi$. Если φ семантически полно и $\varphi \to \psi$ общезначимо, то φ называется семантическим пополнением ψ (в $\mathfrak{L}$). В силу полноты узкого исчисления предикатов понятия дедуктивной и семантической полноты для языков 1-ой ступени совпадают. Для языков 2-ой и высших ступеней это не так в силу теоремы неполноты Гёделя. Пользуясь теоремой 2.10, мы доказываем следующую теорему, в некотором смысле двойственную теореме неполноты: для языка $\mathfrak{L}$ достаточно высокой ступени (точнее, такого, что его ступень больше ступеней его констант) существует эффективная процедура, переводящая всякое выполнимое предположение из $\mathfrak{L}$ в его семантическое пополнение (теорема 5.1.4).

3. Доказывается, что счетные элементарные структуры изоморфны, если они выполняют одни и те же предложения 2-ой ступени (теорема 6.2.1), а также что всякий счетный ординал α определим формулой 2-ой ступени в структуре $\langle \beta, \in \restriction \beta \rangle$ для всякого большего счетного ординала β (3.3.1).

§ 1. Символом T обозначается наименьшее из множеств M слов в алфавите $\{0, (,)\}$, для которых $0 \in M$ и $(\tau_1 \ldots \tau_n) \in M$ для всяких $\tau_1, \ldots, \tau_n$ из M. Элементы T называются *типами*. *Ступенью типа* τ называется число $\mathrm{St}\,\tau$ такое, что $\mathrm{St}\,0 = 0$, $\mathrm{St}(\tau_1 \ldots \tau_n) = 1 + \max\{\mathrm{St}\,\tau_1, \ldots, \mathrm{St}\,\tau_n\}$.

Пусть A — непустое множество. *Типовой башней* над A называется семейство $(A^\tau)_{\tau \in T}$, определяемое так: $A^0 = A$, $A^{(\tau_1 \ldots \tau_n)} = P(A^{\tau_1} \times \ldots \times A^{\tau_n})$ (где $P(B)$ — множество всех подмножеств B).

Для каждого типа τ элементы множества A^τ называются *отношениями типа* τ на A и обозначаются малыми начальными латинскими буквами с верхним индексом τ (и иногда — с нижними индексами).

Пусть $B \subset A$. Для всякого $a \in A$ полагаем $a \restriction B$ равным a, если $a \in B$, и не определенным в противном случае. Для всякого отношения $a^{(\tau_1 \ldots \tau_n)}$ на A отношение $a^{(\tau_1 \ldots \tau_n)} \restriction B$ определяем как $\{\langle a_1^{\tau_1} \restriction B \ldots a_n^{\tau_n} \restriction B \rangle : \langle a_1^{\tau_1} \ldots a_n^{\tau_n} \rangle \in a^{(\tau_1 \ldots \tau_n)}\}$ и называем *B-сужением* или *B-ограничением* $a^{(\tau_1 \ldots \tau_n)}$.

Для всякого отношения $a^{(00)}$ на A через $\mathrm{dom}\, a^{(00)}$ будет обозначаться $\{a : \exists b(\langle ab \rangle \in a^{(00)})\}$, через $\mathrm{rg}\, a^{(00)}$ — $\{b : \exists a(\langle ab \rangle \in a^{(00)})\}$ и через $\mathrm{field}\, a^{(00)}$ — $\mathrm{dom}\, a^{(00)} \cup \mathrm{rg}\, a^{(00)}$.

Пусть $(A^\tau)_{\tau \in T}$ и $(B^\tau)_{\tau \in T}$ — типовые башни, F_0 — отображение A^0 в B^0. Отображения $F_\tau : A^\tau \to B^\tau$, определяемые рекурсией:

$$F_{(\tau_1 \ldots \tau_n)}(a^{(\tau_1 \ldots \tau_n)}) = \{\langle F_{\tau_1}(a_1^{\tau_1}) \ldots F_{\tau_n}(a_n^{\tau_n}) \rangle : \langle a_1^{\tau_1} \ldots a_n^{\tau_n} \rangle \in a^{(\tau_1 \ldots \tau_n)}\},$$

называются *распространениями отображения* F_0.

Структурой будем называть всякий кортеж $\mathfrak{S} = \langle A, a_0^{\tau_0}, \ldots, a_m^{\tau_m} \rangle$ такой, что A — непустое множество, $a_i^{\tau_i}$ — отношения (типов τ_i) на A. Множество A называется *базой структуры* $\mathfrak{S}$ и обозначается через $|\mathfrak{S}|$. Отношения $a_i^{\tau_i}$ называются *определяющими отношениями* $\mathfrak{S}$. Кортеж $\varrho = \langle \tau_0 \ldots \tau_m \rangle$ называется *родом* или *сигнатурой* $\mathfrak{S}$. Число $\max\{\mathrm{St}\,\tau_0, \ldots, \mathrm{St}\,\tau_m\}$ называется *ступенью рода* ϱ или *ступенью* $\mathfrak{S}$ и обозначается через $\mathrm{St}\,\varrho$ или $\mathrm{St}\,\mathfrak{S}$. Удобно расширить понятие структуры, положив, что всякое непустое множество есть структура (пустого рода) и что ступень такой структуры равна 0. Если $\mathrm{St}\,\varrho \leqslant 1$, то ϱ называется *элементарным родом*. Род $\langle (00) \rangle$ будет обозначаться через ϱ_0, а род $\langle (00)(00)(00) \rangle$ — через ϱ_1. Структура элементарного рода называется *элементарной структурой*. Отношения на $|\mathfrak{S}|$ называются *отношениями* в $\mathfrak{S}$. Отношения типа 0 в $\mathfrak{S}$, то есть элементы $|\mathfrak{S}|$, называются *индивидами* $\mathfrak{S}$. Верхний индекс 0 в обозначениях индивидов чаще всего опускается.

Всюду далее символ $\mathfrak{S}$ будет обозначать произвольную фиксированную бесконечную структуру $\langle A, a_0^{\tau_0}, \ldots, a_m^{\tau_m} \rangle$, а символ ϱ — род $\mathfrak{S}$.

Пусть $0 \leqslant i_0 < \ldots < i_k \leqslant m$. Структура $\mathfrak{S}' = \langle A, a_{i_0}^{\tau_{i_0}}, \ldots, a_{i_k}^{\tau_{i_k}} \rangle$ называется $\{a_{i_0}^{\tau_{i_0}}, \ldots, a_{i_k}^{\tau_{i_k}}\}$*-обеднением* или просто *обеднением* $\mathfrak{S}$, а $\mathfrak{S}$ — *обогащением структуры* $\mathfrak{S}'$. Обогащение $\langle A, a_0^{\tau_0}, \ldots, a_m^{\tau_m}, b_0^{v_0}, \ldots, b_n^{v_n} \rangle$ структуры $\mathfrak{S}$ обозначается через $\mathfrak{S}(b_0^{v_0}, \ldots, b_n^{v_n})$.

Пусть $\emptyset \neq B \subset A$ и $a_i \in B$ для всякого определяющего отношения a_i (типа 0) структуры $\mathfrak{S}$. Тогда структура $\langle B, a_0^{\tau_0} \restriction B, \ldots, a_m^{\tau_m} \restriction B \rangle$ называется *B-сужением* или *B-ограничением* $\mathfrak{S}$ и обозначается через $\mathfrak{S} \restriction B$.

Пусть $\mathfrak{S}_1 = \langle A, a_0^{\tau_0}, \ldots, a_n^{\tau_n} \rangle$ и $\mathfrak{S}_2 = \langle B, b_0^{\tau_0}, \ldots, b_n^{\tau_n} \rangle$ — структуры одного и того же рода, F_0 — взаимно однозначное отображение A на B такое, что $F_{\tau_i}(a_i^{\tau_i}) = b_i^{\tau_i}$ ($i \leqslant n$). Тогда F_0 называется *изоморфным отображением* $\mathfrak{S}_1$ на $\mathfrak{S}_2$. Если существует изоморфное отображение $\mathfrak{S}_1$ на $\mathfrak{S}_2$, то говорят, что $\mathfrak{S}_1$ *изоморфна* $\mathfrak{S}_2$, и пишут $\mathfrak{S}_1 \simeq \mathfrak{S}_2$. Изоморфное отображение $\mathfrak{S}_1$ на $\mathfrak{S}_1$ называется *автоморфизмом* $\mathfrak{S}_1$.

(Каждому) роду $\varrho = \langle \tau_0 \ldots \tau_m \rangle$ соотносится язык высших ступеней $L(\varrho)$, алфавит которого содержит последовательность $v_0^\tau, v_1^\tau, \ldots$ переменных типа τ для каждого типа τ, последовательность констант $c_0^{\tau_0}, \ldots, c_m^{\tau_m}$, равенство $=$, логические связки $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, кванторы $\exists$, $\forall$ и скобки (,).

Переменные и константы (типа τ) называются *термами* (*типа* τ или $\mathrm{St}\,\tau$-ой ступени). Термы типа 0 называются *индивидными термами*. В их обозначениях верхние индексы чаще всего будут опускаться.

Выражения видов $t_1 = t_2$ и $t^{(v_1 \ldots v_n)} t_1^{v_1} \ldots t_n^{v_n}$, где $t_1, t_2, t^{(v_1 \ldots v_n)} \ldots$ — термы, называются *атомарными формулами*. Отправляясь от понятия атомарной формулы, обычным образом определяют понятие *формулы* и понятия свободного и связанного вхождений переменной в формулу. Формулы без свободных вхождений переменных называются *предложениями*.

Если σ обозначает некоторую формулу, то символ $\sigma(v_{i_1}^{v_1}, \ldots, v_{i_n}^{v_n})$ служит и обозначением той же формулы и указанием на то, что все вхождения переменных $v_{i_1}^{v_1}, \ldots, v_{i_n}^{v_n}$ в σ свободны и что не существует свободных вхождений в σ иных переменных.

Ступенью формулы называется *наивысшая* из ступеней входящих в нее переменных, увеличенная на единицу. Через $L_n(\varrho)$ обозначается фрагмент языка $L(\varrho)$, располагающий переменными лишь таких типов τ, что $\mathrm{St}\,\tau < n$. Язык $L_n(\varrho)$ называется *языком n-ой ступени*. Язык $L(\varrho)$ $(L_n(\varrho))$ для пустого ϱ называется *чистым языком* (*n-ой ступени*) и обозначается $L(L_n)$.

Пусть σ — формула языка $L(\varrho)$. Функция f называется $(\mathfrak{S}, \sigma)$-функцией, если 1^0 в области ее определения $\operatorname{dom} f$ содержатся $c_0^{\tau_0}, \ldots, c_m^{\tau_m}$ и все переменные, входящие в σ свободно, 2^0 $f(c_i^{\tau_i}) = a_i^{\tau_i}$, 3^0 $f(v^\tau) \in A^\tau$ для всякой переменной v^τ из $\operatorname{dom} f$. Понятие выполнения $(\mathfrak{S}, \sigma)$-функцией f формулы σ определяется так:

1. Если σ — атомарная формула $t_1 = t_2$, то f выполняет σ, если $f(t_1) = f(t_2)$.

2. Если σ — атомарная формула $t^{(v_1\ldots v_n)} t_1^{v_1} \ldots t_n^{v_n}$, то f выполняет σ, если $\langle f(t_1^{v_1}) \ldots f(t_n^{v_n})\rangle \in f(t^{(v_1\ldots v_n)})$.

3. Если σ есть $\neg\sigma_1$, то f выполняет σ, если f не выполняет σ_1.

4. Если σ есть $\sigma_1 \wedge \sigma_2$, то f выполняет σ, если f выполняет σ_1 и f выполняет σ_2.

5. Если σ есть $\sigma_1 \vee \sigma_2 (\sigma_1 \to \sigma_2, \sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$, то f выполняет σ, если f выполняет $\neg(\neg\sigma_1 \wedge \neg\sigma_2)(\neg\sigma_1 \vee \sigma_2, \sigma_1 \to \sigma_2 \wedge \sigma_2 \to \sigma_1)$.

6. Если σ есть $\forall v^\tau(\sigma_1)$, то f выполняет σ, если всякая $(\mathfrak{S}, \sigma_1)$-функция g такая, что $g(t^\tau) = f(t^\tau)$ для всякого $t^\tau \neq v^v$, выполняет σ_1.

7. Если σ есть $\exists v^\tau(\sigma_1)$, то f выполняет σ, если f выполняет $\neg\forall v^\tau(\neg\sigma_1)$.

Говорят, что $\sigma(b_{i_1}^{v_{i_1}}, \ldots, b_{i_n}^{v_{i_n}})$ выполняется в $\mathfrak{S}$, или что $\langle b_{i_1}^{v_{i_1}}, \ldots, b_{i_n}^{v_{i_n}}\rangle$ выполняет σ в $\mathfrak{S}$, и пишут „$\mathfrak{S} \vdash \sigma(b_{i_1}^{v_{i_1}}, \ldots, b_{i_n}^{v_{i_n}})$", если некоторая $(\mathfrak{S}, \sigma)$-функция f такая, что $f(v_{i_e}^{v_{i_e}}) = b_{i_e}^{v_{i_e}}$ $(e = 1, \ldots, n)$, выполняет σ. Говорят, что формула σ выполнима в $\mathfrak{S}$, если некоторая $(\mathfrak{S}, \sigma)$-функция выполняет σ. Если $\neg\sigma$ не выполнима в $\mathfrak{S}$, то говорят, что σ истинна в $\mathfrak{S}$. Хорошо известно, что для всякого предложения σ имеет место

1.1. $\mathfrak{S} \vdash \sigma \wedge \mathfrak{S} \simeq \mathfrak{S}' \Rightarrow \mathfrak{S}' \vdash \sigma$.

Формула называется *выполнимой* (в классе структур K) если она выполнима в какой-нибудь структуре (из K), и общезначимой (в K), если она истинна в каждой структуре (из K). Формулы σ_1 и σ_2 называются *эквивалентными* (в K), если формула $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ общезначима (в K).

Предваренная формула называется *регулярной*, если ее приставка не имеет частей вида $Q_1 v_i^\tau Q_2 v_j^v$, где Q_1, Q_2 — кванторы и $\mathrm{St}\,\tau < \mathrm{St}\,v$. Хорошо известно, что для всякой формулы можно построить эквивалентную ей регулярную формулу той же ступени.

Через V_n^k $(\varLambda_n^k)$ обозначается класс всех регулярных формул, начинающихся с квантора существования (общности), связывающего переменную k-ой ступени, и имеющих не более $n-1$ перемен кванторов, связывающих переменные k-ой ступени. Через ∇_n^k обозначается $V_n^k \cup \varLambda_n^k$, а через $\varDelta_n^k$ — класс всех формул из V_n^k, эквивалентных формулам из $\varLambda_n^k$. Следующее предложение хорошо известно.

1.2 (ZFC). *Пусть $\mathrm{St}\,\tau < k$. Тогда всякая формула $Qv^\tau(\sigma)$, где Q — квантор общности или существования и $\sigma \in V_n^k$ $(\varLambda_n^k)$, преобразуема в эквивалентную формулу из V_n^k $(\varLambda_n^k)$.*

Пусть K — класс структур рода ϱ. Говорят, что класс $M \subset K$ определяется (в K) системой предложений Σ (языка $L(\varrho)$), если он состоит из тех структур (из K), в которых истинны предложения из Σ. В частности, структура $\mathfrak{S} \in K$ определяется (в K) системой Σ, если класс $\{\mathfrak{S}' : \mathfrak{S}' \simeq \mathfrak{S}\}(\cap K)$ определяется (в K) этой системой. Структура называется *определимой*, если она определяется некоторым предложением.

Говорим, что отношение a^τ определяется в $\mathfrak{S}$ по содержанию формулой $\varphi(v^\tau)$, если $\mathfrak{S} \vdash \varphi(a^\tau) \wedge \forall v^\tau(\varphi(v^\tau) \to v^\tau = a^\tau)$. Отношение называется $\mathfrak{L}$-*определимым в $\mathfrak{S}$ по содержанию*, если оно определяется в $\mathfrak{S}$ по содержанию некоторой формулой из $\mathfrak{L}$.

Пусть $\tau = (v_0 \ldots v_n)$. Говорим, что отношение a^τ *определяется в $\mathfrak{S}$ по объему формулой* $\psi(v_1^{v_1}, \ldots, v_n^{v_n})$, если $\langle b_1^{v_1} \ldots b_n^{v_n}\rangle \in a^\tau \Leftrightarrow \mathfrak{S} \vdash \psi(b_1^{v_1}, \ldots, b_n^{v_n})$. Отношение называется $\mathfrak{L}$-*определимым в $\mathfrak{S}$ по объему*, если оно определяется в $\mathfrak{S}$ по объему некоторой формулой из $\mathfrak{L}$.

Если a^τ определяется в $\mathfrak{S}$ по объему формулой $\psi(v_1^{v_1}, \ldots, v_n^{v_n})$, то a^τ определяется в $\mathfrak{S}$ по содержанию формулой $\forall v_1^{v_1} \ldots v_n^{v_n}(v^\tau v_1^{v_1} \ldots v_n^{v_n} \leftrightarrow \psi(v_1^{v_1}, \ldots, v_n^{v_n}))$.

Если a^τ определяется в $\mathfrak{S}$ по содержанию формулой $\varphi(v^\tau)$, то оно определяется в $\mathfrak{S}$ по объему формулой $\forall v^\tau(\varphi(v^\tau) \leftrightarrow v^\tau v_1^{v_1} \ldots v_n^{v_n})$ или формулой $\exists v^\tau(\varphi(v^\tau) \wedge v^\tau v_1^{v_1} \ldots v_n^{v_n})$. Таким образом, $L(\varrho)$-определимость в $\mathfrak{S}$ отношения ненулевого типа по содержанию равносильна его $L(\varrho)$-определимости в $\mathfrak{S}$ по объему. Поэтому отношения, $L(\varrho)$-определимые в $\mathfrak{S}$ по объему или по содержанию, будут называться $L(\varrho)$-*определимыми* в $\mathfrak{S}$ или просто *определимыми* в $\mathfrak{S}$ отношениями. Понятие $L_n(\varrho)$-определимости по объему шире понятия $L_n(\varrho)$-определимости по содержанию (и это — одна из причин, по которым термины „определимость по объему" и „определимость по содержанию" мы предпочитаем здесь терминам „явная определимость" и „неявная определимость").

Пусть φ — чистое предложение. Будем говорить, что кардинал η определяется φ, если φ определяет класс множеств мощности η. Кардинал, определимый предложением из $V_n^k(\Lambda_n^k, \Delta_n^k)$, будем называть V_n^k-(Λ_n^k-Δ_n^k-) *кардиналом.*

Пусть структура $\mathfrak{S} = \langle A, a_0^{\tau_0}, \ldots, a_m^{\tau_m}\rangle$ определяется предложением $\psi(a_0^{\tau_0}, \ldots, a_m^{\tau_m})$, а мощность A — предложением φ. Тогда $\mathfrak{S}$ определяется предложением χ:

$$\varphi \wedge \forall v_0^{\tau_0} \ldots v_m^{\tau_m}\big(\psi(v_0^{\tau_0}, \ldots, v_m^{\tau_m}) \to i(v_0^{\tau_0}, \ldots, v_m^{\tau_m})\big),$$

где $i(v_0^{\tau_0}, \ldots, v_m^{\tau_m})$ — формула, выражающая, что структура $\langle A, v_0^{\tau_0}, \ldots, v_m^{\tau_m}\rangle$ изоморфна $\mathfrak{S}$. Пусть φ — предложение класса Λ_n^k, где $k \geqslant \max\{1, \mathrm{St}\,\mathfrak{S}\}$ и $\langle nk\rangle \neq \langle 11\rangle$. Если ψ — предложение класса V_n^k, то, так как $i(v_0^{\tau_0}, \ldots, v_m^{\tau_m})$ преобразуема в эквивалентную формулу класса $V_1^{\max\{1, \mathrm{St}\,\mathfrak{S}\}}$, предложение χ преобразуемо в эквивалентное предложение класса Λ_n^k. Если же φ — предложение класса V_n^k, ψ — класса Λ_n^k и $k > \max\{1, \mathrm{St}\,\mathfrak{S}\}$, то, использованием 1.2 легко доказать, что χ преобразуемо в предложение класса V_n^k. Таким образом, имеет место следующее полезное предложение:

1.3 (ZFC). *Пусть структура $\mathfrak{S}$ такова, что $|\overline{\overline{\mathfrak{S}}}|$ есть Δ_n^k-кардинал, где $k \geqslant \max\{1, \mathrm{St}\,\mathfrak{S}\}$. Тогда*

1) *если $\mathfrak{S}$ определяется предложением класса V_n^k, то $\mathfrak{S}$ определяется предложением класса Λ_n^k,*

2) *если $\mathfrak{S}$ определяется предложением класса V_n^k и $k > \max\{1, \mathrm{St}\,\mathfrak{S}\}$, то $\mathfrak{S}$ определяется предложением класса Δ_n^k.*

Следующее предложение доказывается аналогично 1.3.

1.4 (ZFC). *Для всякой структуры $\mathfrak{S}$ и всякого типа τ имеет место*

1) *всякое отношение a^τ, определимое в $\mathfrak{S}$ по содержанию формулой класса V_n^k, определимо в $\mathfrak{S}$ по содержанию формулой класса Λ_n^k, при этом если $k \geqslant \mathrm{St}\,\tau$, то определимость a^τ* в $\mathfrak{S}$ *по содержанию формулой класса Δ_n^k равносильна определимости a^τ в $\mathfrak{S}$ по объему формулой того же класса.*

2) *если $k > \mathrm{St}\,\tau$, то определимость a^τ в $\mathfrak{S}$ по содержанию формулой класса V_n^k равносильна определимости a^τ в $\mathfrak{S}$ по содержанию формулой класса Δ_n^k.*

Структуру $\mathfrak{T}$ будем называть *частично вполне упорядоченной*, если какое-нибудь ее определяющее отношение $a^{(00)} \neq \emptyset$ вполне упорядочивает свое поле ($\mathrm{field}\, a^{(00)}$). Если таких отношений более одного, то среди них будем выделять некоторое, которое будем обозначать через $<_{\mathfrak{T}}$ или $a_<^{(00)}$. Элементы поля $<_{\mathfrak{T}}$ будем называть *$\mathfrak{T}$-ординалами*. Если $\mathfrak{T}$-ординал a таков, что $\langle \hat{a}, <_{\mathfrak{T}} \upharpoonright \hat{a}\rangle$ (где $\hat{a} = \{b\colon \mathfrak{T} \vdash b < a\}$) имеет порядковый тип α, то a будем обозначать через $\alpha(\mathfrak{T})$ или, если это не будет приводить к недоразумениям — через α, field $<_{\mathfrak{T}}$-ограничение $\mathfrak{T}$ будем обозначать через $\mathfrak{T}_<$, а $\{<_{\mathfrak{T}}\}$-обеднение $\mathfrak{T}$ — через $\mathfrak{T}^<$. *Порядковым типом* $\mathfrak{T}$ будем называть порядковый тип вполне упорядоченного множества $\mathfrak{T}_<^<$, $\{<_{\mathfrak{T}}\}$-обеднения $\mathfrak{T}^<$. Если $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_<$, то $\mathfrak{T}$ будем называть *вполне упорядоченной структурой.*

Термин „ординал“ часто будем использовать не только в обычном смысле, но и как обозначающий структуру $\langle \alpha, <\rangle$, где α — ординал в обычном смысле, а $<$ — ограничение отношения принадлежности на α. Так, фраза „ординал α выполняет формулу φ (из $L(\varrho_0)$)'' будет пониматься как „структура $\langle \alpha, <\rangle$ выполняет φ''.

§ 2. Будем рассматривать структуры рода $\varrho_1 = \langle (00)(00)(00)\rangle$. Константы $c_0^{(00)}, c_1^{(00)}, c_2^{(00)}$ языка $L(\varrho_1)$ будем обозначать через $<$, ε, F. Вместо „$c_0^{(00)}vw$'' будем писать „$v < w$'', вместо „$c_1^{(00)}vw$'' — „$v\,\varepsilon\, w$'' и вместо „$c_2^{(00)}vw$'' — „$F(v) = w$''. Обозначим через U класс всех структур $\mathfrak{T} = \langle A, <_{\mathfrak{T}}, \varepsilon_{\mathfrak{T}}, F_{\mathfrak{T}}\rangle$ рода ϱ_1, выполняющих

2.1.1. $\forall vw(v < w \to v\,\varepsilon\, w)$,

аксиому экстенсиональности

2.1.2. $\forall vw\big(\forall z(z\,\varepsilon\, v \leftrightarrow z\,\varepsilon\, w) \to v = w\big)$,

аксиому регулярности

2.1.3. $\forall v\Big(\exists w(w\,\varepsilon\, v) \to \exists w\big(w\,\varepsilon\, v \wedge \forall z(\neg(z\,\varepsilon\, v \wedge z\,\varepsilon\, w))\big)\Big)$

и таких, что

2.1.4. $<_{\mathfrak{T}}$ — отношение, вполне упорядочивающее свое поле, которое бесконечно.

Пусть $\mathfrak{T}$ — структура из U, $a, a_1, \ldots, a_n, b$ — элементы ее базы. Будем писать

$$\begin{array}{lll}
a \subset b, & \text{если} & \mathfrak{T} \vdash \forall v(v\,\varepsilon\, a \to v\,\varepsilon\, b), \\
a = \{v\colon \varphi(v, a_1, \ldots, a_n)\}, & \text{если} & \mathfrak{T} \vdash \forall v\big(v\,\varepsilon\, a \leftrightarrow \varphi(v, a_1, \ldots, a_n)\big), \\
a = \{a_1, a_2\}, & \text{если} & a = \{v\colon v = a_1 \vee v = a_2\}, \\
a = \{a_1\}, & \text{если} & a = \{v\colon v = a_1\}, \\
a = <a_1>, & \text{если} & a = a_1, \\
a = <a_1 a_2>, & \text{если} & a = \big\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\big\}, \\
a = <a_1 a_2 \ldots a_n>, & \text{если} & a = <a_1 <a_2 \ldots a_n>>.
\end{array}$$

Обозначим через $o(u, v)$ формулу $v\,\varepsilon\, u$ и для всяких типов $\tau_1, \ldots, \tau_n$ через $(\tau_1 \ldots \tau_n)(u, v)$ — формулу

$$\forall w\big(w\,\varepsilon\, v \to \exists v_1 \ldots v_n(\tau_1(u, v_1) \wedge \ldots \wedge \tau_n(u, v_n) \wedge w = <v_1 \ldots v_n>)\big).$$

Если переменные, входящие в формулу $\tau(u, v)$, интерпретировать как множества из некоторого набора M, а ε — как стандартное отношение принадлежности, то эта формула будет выражать, что v есть принадлежащее M отношение типа τ на u.

Полагаем $\mathrm{Set}^0 v = v$,

$\mathrm{Set}^{(\tau_1 \ldots \tau_n)} v = \{\langle v_1^{\tau_1} \ldots v_n^{\tau_n}\rangle\colon$

$$\exists w_1 \ldots w_n(v_1^{\tau_1} = \mathrm{Set}^{\tau_1} w_1 \wedge \ldots \wedge v_n^{\tau_n} = \mathrm{Set}^{\tau_n} w_n \wedge <w_1 \ldots w_n>\varepsilon\, v)\}.$$

Тогда, в частности,

$$\mathrm{Set}^{(0)}v = \{w\colon\ w \varepsilon v\}\,,$$
$$\mathrm{Set}^{(00)}v = \{\langle w_1 w_2\rangle\colon\ <w_1 w_2> \varepsilon v\}\,,$$
$$\mathrm{Set}^{((0))}v = \{\mathrm{Set}^{(0)}w\colon\ w \varepsilon v\}\,.$$

Индукцией по $\mathrm{St}\,\tau$ легко доказываются.

2.2.1. *Для всякой структуры* $\mathfrak{T}$ *из* U *и всяких* $a \in |\mathfrak{T}|$ *и* $a^\tau \in |\mathfrak{T}|^\tau$ *условие* $a^\tau = \mathrm{Set}^\tau a$ *выразимо формулой из* $\Delta_1^{\mathrm{St}\tau-1}$.

2.2.2. *Во всякой структуре* $\mathfrak{T}$ *из* U *условия* $\tau(a, b)$ *и* $\mathrm{Set}^\tau b \in [\mathrm{Set}^{(0)}a]^\tau$ *равносильны* ($[\mathrm{Set}^{(0)}a]^\tau$ — *представитель типовой башни над* $\mathrm{Set}^{(0)}a$).

Пусть $\varrho = \langle\tau_0 \ldots \tau_m\rangle$ — произвольный род. Обозначим через $\varrho(v)$ формулу

$$\exists u v_0 \ldots v_m w\big(v = <u v_0 \ldots v_m> \wedge w \varepsilon u \wedge \tau_0(u, v_0) \wedge \ldots \wedge \tau_m(u, v_m)\big)\,.$$

Пусть $\mathfrak{T} \vdash \varrho(a)$. Обозначим через $\mathrm{Set}^\varrho a$ кортеж $<\langle\mathrm{Set}^{(0)}d,\ \mathrm{Set}^{\tau_0}e_0, \ldots$ $\ldots, \mathrm{Set}^{\tau_m}e_m\rangle$, где $a = <d e_0 \ldots e_m>$. Из $\mathfrak{T} \vdash \varrho(a)$ следует $\mathrm{Set}^{(0)}d \neq \emptyset$. Отсюда и из 2.2.2 следует.

2.2.3. *Пусть* $\mathfrak{T}$ — *структура из* U *и* $\mathfrak{T} \vdash \varrho(a)$. *Тогда* $\mathrm{Set}^\varrho a$ *есть структура рода* ϱ.

Очевидно, что

2.3. *Если* $\mathfrak{T} \in U$, *то* $\mathfrak{T}_< \in U$ *и* $\mathfrak{T}_< \vdash \forall v w(v < w \leftrightarrow v \varepsilon w)$.

Обозначим через $\mathrm{Le}\, v_1 v_2 w_1 w_2$ формулу $v_2 < w_2 \vee (v_2 = w_2 \wedge v_1 < w_1)$, а через $\mathrm{R}\, v_1 v_2 w_1 w_2$ —

$$\mathrm{Max}\{v_1, v_2\} < \mathrm{Max}\{w_1, w_2\} \vee (\mathrm{Max}\{v_1, v_2\} = \mathrm{Max}\{w_1, w_2\} \wedge \mathrm{Le}\, v_1 v_2 w_1 w_2)\,.$$

Отношения, определяемые в $\mathfrak{T}$ этими формулами, вполне упорядочивают декартов квадрат $\mathrm{field} <_{\mathfrak{T}}$. На множестве $\{0, \ldots, 8\} \times (\mathrm{field} <_{\mathfrak{T}})^2$, где $0, \ldots, 8$ $\mathfrak{T}$-ординалы, определяем отношение S:

$$\langle v_1 v_2 v_3\rangle S \langle w_1 w_2 w_3\rangle \Leftrightarrow \mathfrak{T} \vdash \mathrm{R}\, v_2 v_3 w_2 w_3 \vee (v_2 = w_2 \wedge v_3 = w_3 \wedge v_1 < w_1)\,.$$

S вполне упорядочивает это множество. Следовательно, существует и притом единственная функция J, определенная на некотором начальном отрезке упорядоченного множества $\langle\mathrm{field}\, S, S\rangle$ и являющаяся изоморфным отображением этого отрезка на $\mathfrak{T}_<^{\leq}$.

Полагаем $w = J_i\langle v_1 v_2\rangle$, если $w = J\langle i v_1 v_2\rangle$ $(i = 0, \ldots, 8)$. Области значений функций J_i попарно не пересекаются. На множестве $\mathfrak{T}$-ординалов ($\mathrm{field} <_{\mathfrak{T}}$) определяем функции K_1 и K_2:

$$K_1 a = b \Leftrightarrow \exists i c(a = J\langle i b c\rangle)\,,$$
$$K_2 a = b \Leftrightarrow \exists i c(a = J\langle i c b\rangle)\,.$$

Полагаем $a = F_1(a_1 a_2)$, если $a = \{a_1, a_2\}$, и $a = F_i(a_1 a_2)$ для $i = 2, \ldots, 8$ если $\mathfrak{T} \vdash \forall w\big(w \varepsilon a \leftrightarrow w \varepsilon a_1 \wedge \varphi_i(w, a_2)\big)$, где

$\varphi_2(w, a_2)$	есть	$\exists u v(w = <uv> \wedge v \varepsilon u)$,
$\varphi_3(w, a_2)$	есть	$\neg w \varepsilon a_2$,
$\varphi_4(w, a_2)$	есть	$\exists u v(w = <uv> \wedge v \varepsilon a_2)$,
$\varphi_5(w, a_2)$	есть	$\exists u v(v = <uw> \wedge v \varepsilon a_2)$,
$\varphi_6(w, a_2)$	есть	$\exists u v(w = <uv> \wedge <vu> \varepsilon a_2)$,
$\varphi_7(w, a_2)$	есть	$\exists u_1 u_2 u_3(w = <u_1, u_2 u_3> \wedge <u_2 u_3 u_1> \varepsilon a_2)$,
$\varphi_8(w, a_2)$	есть	$\exists u_1 u_2 u_3(w = <u_1, u_2 u_3> \wedge <u_1, u_3 u_2> \varepsilon a_2)$.

Обозначим через U^Δ класс всех структур $\mathfrak{T}$ из U, для которых

2.4.1. $F_{\mathfrak{T}}$ — частичная функция,

2.4.2. $\mathrm{field} <_{\mathfrak{T}} \cup \mathrm{rg}(F_{\mathfrak{T}} \upharpoonright \mathrm{field} <_{\mathfrak{T}}) = |\mathfrak{T}|$,

2.4.3. $\mathrm{field} <_{\mathfrak{T}} \subset \mathrm{dom}\, F_{\mathfrak{T}}$,

2.4.4. $a \in \mathrm{rg} J_0 \Rightarrow F_{\mathfrak{T}}(a) = \{F(v)\colon\ v < a\}$,

2.4.5. $a \in \mathrm{rg} J_i \Rightarrow F_{\mathfrak{T}}(a) = F_i\big(F_{\mathfrak{T}}(K_1 a) F_{\mathfrak{T}}(K_r a)\big)$ для $i = 1, \ldots, 8$.

Частичные функции $K_1, K_2, F_1, \ldots, F_8$ определимы по объему в структурах из U формулами 1-ой ступени. Условия 2.4.1-2.4.3 выразимы формулами 1-ой ступени. Для всякого $i \in \{0, \ldots, 8\}$ условие $a \in \mathrm{rg} J_i$ равносильно во всякой структуре $\mathfrak{T}$ из U следующему: существуют частичная функция J, определенная на некотором начальном отрезке упорядоченного множества $\langle\mathrm{field}\, S, S\rangle$ и являющаяся изоморфным отображением этого отрезка на $\mathfrak{T}_<^{\leq}$, и элементы b, c такие, что $J\langle i b c\rangle = a$. Последнее выразимо формулой из V_1^1. Следовательно, 2.4.4 и 2.4.5 выразимы формулами из Δ_1^1. Отсюда и из определимости класса U предложением из Δ_1^1 следует

2.5. *Класс* U^Δ *определяется предложением из* Δ_1^1.

Доказательство следующего предложения является дословным повторением доказательства 9.5 в [4].

2.6. *Если* $\mathfrak{T} \in U^\Delta$ *и* $a \in \mathrm{field} <_{\mathfrak{T}}$, *то* $\mathfrak{T} \vdash F(a) \subset \{F(v)\colon\ v < a\}$.

Использованием 2.3, 2.6 и того обстоятельства, что во всякой структуре $\mathfrak{T}$ из U функции $K_1, K_2, F_1, \ldots, F_8$ определяются только через $<_{\mathfrak{T}}$, легко доказывается

2.7. Теорема. *Структуры из* U^Δ *одного и того же порядкового типа изоморфны.*

Следовательно, структуры из U^Δ изоморфны начальным отрезкам конструктивного универсума.

Очевидно, что, в предположении аксиомы выбора, для каждого бесконечного множества A существует структура из U^Δ с базой A.

Начиная с этого места, мы будем предполагать аксиому конструктивности $V=L$. Условимся в следующем. Выражение в скобках между номером теоремы и ее формулировкой будет обозначать ту теорию множеств, для которой эта теорема доказывается (здесь) или была доказана в других работах. Отсутствие такого выражения будет означать, что теорема доказывается в $ZF+V=L$.

Содержащееся в [4] доказательство выводимости 12.2 из 12.3 является и доказательством следующего предложения, несколько усиливающего 12.2.

2.8.1. $\beta<\omega_\alpha\Rightarrow P(\{F(\gamma)\colon\ \gamma<\beta\})\subset\{F(\gamma)\colon\ \gamma<\omega_\alpha\}$.

Отсюда и из $\mathrm{Od}'v<\omega_\alpha\Rightarrow\mathrm{Od}'v^2<\omega_\alpha$ следует

2.8.2. $\mathrm{Od}'u<\omega_\alpha\wedge v\subset u^n\Rightarrow\mathrm{Od}'v<\omega_\alpha$ $(n<\omega)$.

Отсюда же следует

2.8.3. Пусть a^τ — отношение типа $\tau\neq 0$ на ω_α. Тогда $\mathrm{Od}'a^\tau<\omega_{\alpha+\mathrm{St}\tau}$.

Для всякой структуры $\mathfrak{S}$ ординал $\min\{\mathrm{Od}'\mathfrak{S}'\colon\ \mathfrak{S}'\simeq\mathfrak{S}\}$ будем называть *порядком* $\mathfrak{S}$ и обозначать $\mathrm{Od}\,\mathfrak{S}$.

Пусть ступень структуры $\mathfrak{S}_0=\langle\omega_\alpha, a_0^{\tau_0},\dots,a_m^{\tau_m}\rangle$ равна $n\neq 0$. Тогда, согласно 2.8.3, $\mathrm{Od}'a_i^{\tau_i}<\omega_{\alpha+n}$ $(i\leqslant m)$. Так как $\mathrm{Od}'v<\omega_\beta\wedge\mathrm{Od}'w<\omega_\beta\Rightarrow$ $\Rightarrow\mathrm{Od}'\langle vw\rangle<\omega_\beta$, то $\mathrm{Od}'\mathfrak{S}_0<\omega_{\alpha+n}$. Отсюда следует

2.9.1. Пусть $\mathfrak{S}$ — структура мощности ω_α. Тогда $\overline{\overline{\mathrm{Od}\,\mathfrak{S}}}\leqslant\omega_{\alpha+(\mathrm{St}\mathfrak{S}\dot{-}1)}$.

Так что, в частности, для всякой бесконечной элементарной структуры $\mathfrak{S}$ имеет место $\overline{\overline{\mathrm{Od}\,\mathfrak{S}}}=|\overline{\overline{\mathfrak{S}}}|$.

Пусть a^τ — отношение в $\mathfrak{S}$. Порядок структуры $\mathfrak{S}(a^\tau)$ будем называть *порядком* a^τ в $\mathfrak{S}$ и обозначать через $\mathrm{Od}\,a^\tau(\mathfrak{S})$ или через $\mathrm{Od}\,a^\tau$, если из контекста ясно, какая структура $\mathfrak{S}$ имеется в виду. Из 2.9.1 следует

2.9.2. Пусть $\mathfrak{S}$ — структура мощности ω_α, a^τ — отношение в $\mathfrak{S}$. Тогда $\overline{\overline{\mathrm{Od}\,a^\tau}}\leqslant\omega_{\alpha+(\max\{\mathrm{St}\mathfrak{S},\mathrm{St}\tau\}\dot{-}1)}$.

Для каждого типа τ будем обозначать через $\lessdot^\tau$ или через $\lessdot$, если из контекста ясно, какой тип τ имеется в виду, отношение типа $(\tau\tau)$ в $\mathfrak{S}$ такое, что $a_{\mathrm{I}}^\tau\lessdot a_{\mathrm{II}}^\tau\Leftrightarrow\mathrm{Od}\,a_{\mathrm{I}}^\tau<\mathrm{Od}\,a_{\mathrm{II}}^\tau$. Отношение $\lessdot^\tau$ определимо в $\mathfrak{S}$. В самом деле, пусть v — некоторый тип ступени $\max\{\mathrm{St}\mathfrak{S},\mathrm{St}\tau\}$. Согласно 2.9.2 существует структура $\mathfrak{T}$ из U^Δ с базой $|\mathfrak{S}|^v$ такая, что для всяких отношений типа τ в $\mathfrak{S}$ их порядки (в $\mathfrak{S}$) меньше порядкового типа $\mathfrak{T}$. Следовательно, $a_{\mathrm{I}}^\tau\lessdot a_{\mathrm{II}}^\tau$ равносильно следующему: существуют структура $\mathfrak{T}$ из U^Δ с базой $|\mathfrak{S}|^v$ и $\mathfrak{T}$-ординалы α_{I}, α_{II} такие, что $\alpha_{\mathrm{I}}<\alpha_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{T}\vdash\varrho\big(F(\alpha_i)\big)$, $\mathrm{Set}^\varrho F(\alpha_i)\simeq\mathfrak{S}(a_i^\tau)$ и для всякого $\beta<\alpha_i$, если $\mathfrak{T}\vdash\varrho\big(F(\beta)\big)$, то $\mathrm{Set}^\varrho F(\beta)\not\simeq\mathfrak{S}(a_i^\tau)$ $(i=\mathrm{I},\mathrm{II})$. Легко видеть, что это условие выразимо на языке $L(\varrho)$. Посредством несколько более тщательных рассмотрений устанавливается

2.10.1. Для всякого рода ϱ и всякого типа τ таких, что $\max\{\mathrm{St}\,\varrho,\mathrm{St}\,\tau\}\leqslant 1$ существует формула из Δ_2^1, определяющая по объему в каждой бесконечной структуре рода ϱ отношение $\lessdot^\tau$.

Пусть a_{I}^τ, a_{II}^τ — отношения в $\mathfrak{S}$. Согласно 2.9.2 $\overline{\overline{\mathrm{Od}\,a_i^\tau}}=\overline{\overline{A}}$ $(i=\mathrm{I},\mathrm{II})$. Отсюда следует, что $a_{\mathrm{I}}^\tau\lessdot a_{\mathrm{II}}^\tau$ равносильно существованию в $\mathfrak{S}$ отношений $a_<^{(00)}$, $a_\varepsilon^{(00)}$ $a_F^{(00)}$ таких, что структура $\mathfrak{T}=\langle A, a_<^{(00)}, a_\varepsilon^{(00)}, a_F^{(00)}\rangle$ принадлежит U^Δ и существуют $\mathfrak{T}$-ординалы α_{I}, α_{II} для которых

2.10.1.1. $\mathfrak{T}\vdash\varrho\big(F(\alpha_i)\big)$ и $\mathrm{Set}^\varrho F(\alpha_i)\simeq\mathfrak{S}(a_i^\tau)$ $(i=\mathrm{I},\mathrm{II})$.

2.10.1.2. Для всякого $\mathfrak{T}$-ординала $\beta<\alpha_i$, если $\mathfrak{T}\vdash\varrho\big(F(\beta)\big)$, то $\mathrm{Set}^\varrho F(\beta)\not\simeq\mathfrak{S}(a_i^\tau)$ $(i=\mathrm{I},\mathrm{II})$.

2.10.1.3. $\alpha_{\mathrm{I}}<\alpha_{\mathrm{II}}$.

В $\mathfrak{S}^*=\mathfrak{S}(a_<^{(00)}, a_\varepsilon^{(00)}, a_F^{(00)})$ условие принадлежности $\mathfrak{T}$ классу U^Δ выразимо, согласно 2.5, формулой из Δ_1^1, условия $\mathfrak{T}\vdash\varrho\big(F(\alpha_i)\big)$ и 2.10.1.3 — элементарными формулами, условие 2.10.1.1 — формулой из V_1^1, так как $\mathrm{Set}^\varrho F(\alpha_i)\simeq\mathfrak{S}(a_i^\tau)$ равносильно следующему: существуют $b^{(0)}, b_0^{\tau_0},\dots,b_m^{\tau_m}$, $d_0,\dots,d_m, a, f^{(00)}$, для которых $F(\alpha_i)=<ad_0\dots d_m>$, $b^{(0)}=\mathrm{Set}^{(0)}a$, $b_0^{\tau_0}=$ $=\mathrm{Set}^{\tau_0}d_0,\dots,b_m^{\tau_m}=\mathrm{Set}^{\tau_m}d_m$, $f^{(00)}$ есть изоморфное отображение $\mathfrak{S}(a_i^\tau)$ на $\mathrm{Set}^\varrho F(\alpha_i)$. Последнее очевидно выразимо формулой из V_1^1. Наконец, условие 2.10.1.2 выразимо в $\mathfrak{S}^*$ формулой из Δ_1^1. В самом деле, оно равносильно следующему условию: если $\mathfrak{T}\vdash\varrho\big(F(\beta)\big)$, то для всяких $b^{(0)}, b_0^{\tau_0},\dots,b_m^{\tau_m}$, $a, d_0,\dots,d_m, f^{(00)}$ таких, что $F(\beta)=<ad_0\dots d_m>$, $b^{(0)}=\mathrm{Set}^{(0)}a$, $b_0^{\tau_0}=$ $=\mathrm{Set}^{\tau_0}d_0,\dots,b_m^{\tau_m}=\mathrm{Set}^{\tau_m}d_m$, $f^{(00)}$ не есть изоморфное отображение $\mathfrak{S}(a_i^\tau)$ на $\mathrm{Set}^\varrho F(\beta)$. Последнее же очевидно выразимо формулой из Δ_1^1. Таким образом, конъюнкция условий 2.10.1.1-2.10.1.3 и $\mathfrak{T}\in U^\Delta$ выразима в $\mathfrak{S}^*$ формулой из V_2^1. Следовательно, условие $a_{\mathrm{I}}^\tau\lessdot a_{\mathrm{II}}^\tau$ выразимо в $\mathfrak{S}$ формулой из V_2^1. В силу 2.7, это условие равносильно следующему: для всяких отношений $a_<^{(00)}, a_\varepsilon^{(00)}, a_F^{(00)}$ в $\mathfrak{S}$ таких, что структура $\mathfrak{T}=\langle A, a_<^{(00)}, a_\varepsilon^{(00)}, a_F^{(00)}\rangle$ принадлежит U^Δ, и всяких $\mathfrak{T}$-ординалов $\alpha_{\mathrm{I}},\alpha_{\mathrm{II}}$, для которых в $\mathfrak{S}^*=$ $=\mathfrak{S}(a_<^{(00)}, a_\varepsilon^{(00)}, a_F^{(00)})$ выполняются условия 2.10.1.1 и 2.10.1.2, выполняется и 2.10.1.3. Последнее выразимо в $\mathfrak{S}$ формулой из Δ_2^1 (См. также 1.4). Следовательно, условие $a_{\mathrm{I}}^\tau\lessdot a_{\mathrm{II}}^\tau$ выразимо в $\mathfrak{S}$ формулой из Δ_2^1.

Доказанное предложение обобщается следующей теоремой.

2.10. Теорема. *Для всякого рода ϱ и всякого типа τ существует формула из $\Delta_2^{\max\{1,\mathrm{St}\varrho,\mathrm{St}\tau\}}$, определяющая по объему в каждой бесконечной структуре $\mathfrak{S}$ рода ϱ отношение $\lessdot^\tau$.*

Обозначим через v монадический, то есть принадлежащий множеству $\{0,(0),((0)),\dots\}$, тип ступени $\max\{\mathrm{St}\,\varrho,\mathrm{St}\,\tau\}\dot{-}1$. Если $\mathrm{St}\,v=0$, то $\lessdot^\tau$ определимо в $\mathfrak{S}$ по объему формулой из Δ_2^1, в силу 2.10.1. Пусть $\mathrm{St}\,v>0$. Зададимся произвольными отношениями a_{I}^τ и a_{II}^τ в $\mathfrak{S}$. Согласно 2.9.2, $\overline{\overline{\mathrm{Od}\,a_i^\tau}}\leqslant\omega_{\alpha+\mathrm{St}v}$, где $\omega_\alpha=\overline{\overline{A}}$. Отсюда (и из существования в $\mathfrak{S}$ отношения типа (v), имеющего мощность $\omega_{\alpha+\mathrm{St}v}$) следует, что $a_{\mathrm{I}}^\tau\lessdot a_{\mathrm{II}}^\tau$ равносильно существованию $a^{(v)}, a_<^{(vv)}, a_\varepsilon^{(vv)}, a_F^{(vv)}$ таких, что структура $\mathfrak{T}=\langle a^{(v)}, a_<^{(vv)}, a_\varepsilon^{(vv)}, a_F^{(vv)}\rangle$ принадлежит U^Δ, и существованию $\mathfrak{T}$-ординалов α_{I} и α_{II}, для которых выполняются 2.10.1.1-2.10.1.3. Это условие непосредственно не выражается формулой ступени $\max\{\mathrm{St}\,\varrho,\mathrm{St}\,\tau\}+1$. Для доказательства выразимости нам понадобятся следующие ниже формулы, относящиеся к языку $L(\varrho_1)$.

Будем писать $w \operatorname{ind} v^v$,, если $\{\ldots\{w\}\ldots\}\varepsilon u^v$. Через $\operatorname{Ind} u^v$ обозначим $\{w\colon\ w \operatorname{ind} u^v\}$. Через $\operatorname{repr}_0(v, v^v, u^v)$ обозначим формулу $\{\ldots\{v\}\ldots\} = v^v \wedge v^v \varepsilon u^v$, через $\operatorname{repr}_{(\tau_0\ldots\tau_m)}(v^{(\tau_0\ldots\tau_m)}, v^v, u^v)$ — формулу

$$(\tau_0\ldots\tau_m)(u^v, v^v) \wedge \forall v_0^{\tau_0}\ldots v_m^{\tau_m} w^v w_0^v \ldots w_m^v \big(\tau_0(u^v, w_0^v) \wedge \ldots \wedge \tau_m(u^v, w_m^v) \wedge$$
$$\wedge \operatorname{repr}_{\tau_0}(v_0^{\tau_0}, w_0^v, u^v) \wedge \ldots \wedge \operatorname{repr}_{\tau_m}(v_m^{\tau_m}, w_m^v, u^v) \wedge w^v = \langle w_0^v \ldots w_m^v \rangle \rightarrow$$
$$\rightarrow (w^v \varepsilon v^v \leftrightarrow v^{(\tau_0\ldots\tau_m)} v_0^{\tau_0} \ldots v_m^{\tau_m})\big).$$

$a_{\mathrm{I}}^{\tau} \leqslant a_{\mathrm{II}}^{\tau}$ равносильно существованию $a^{(v)}, a_<^{(vv)}, a_\varepsilon^{(vv)}, a_F^{(vv)}$ таких, что структура $\mathfrak{T} = \langle a^{(v)}, a_<^{(vv)}, a_\varepsilon^{(vv)}, a_F^{(vv)} \rangle$ принадлежит U^{Δ}, и $\mathfrak{T}$-ординалов α_{I} и α_{II}, для каждого из которых в $\mathfrak{S}(a^{(v)}, a_<^{(vv)}, a_\varepsilon^{(vv)}, a_F^{(vv)})$ выполняются условия:

I. $\varrho(F(\alpha_i))$ и существуют $b^v, d_0^v, \ldots, d_{m+1}^v, l_0^{\tau_0}, \ldots, l_m^{\tau_m}, l_{m+1}^{\tau}$ такие, что

$$\forall v^v\big(v^v \varepsilon b^v \rightarrow \exists w (w \operatorname{ind} v^v)\big), \qquad F(\alpha_i) = \langle b^v d_0^v \ldots d_{m+1}^v \rangle,$$

$\operatorname{repr}_{\tau_j}(l_i^{\tau_j}, d_j^v, b^v)$ для $j \leqslant m$, $\operatorname{repr}_{\tau}(l_{m+1}^{\tau}, d_{m+1}^v, b^v)$,

$$\mathfrak{S}(a_i^{\tau}) \simeq \langle \operatorname{Ind} b^v, l_0^{\tau_0}, \ldots, l_m^{\tau_m}, l_{m+1}^{\tau} \rangle.$$

II. Для всякого $\mathfrak{T}$-ординала $\beta < \alpha_i$, выполняющего $\varrho(F(\beta))$, и всяких $b^v, d_0^v, \ldots, d_{m+1}^v, l_0^{\tau_0}, \ldots, l_m^{\tau_m}, l_{m+1}^{\tau}$ таких, что

$$\forall v^v\big(v^v \varepsilon b^v \rightarrow \exists w (w \operatorname{ind} v^v)\big), \qquad F(\beta) = b \langle^v d_0^v \ldots d_{m+1}^v \rangle,$$

$\operatorname{repr}_{\tau_j}(l_j^{\tau_j}, d_j^v, b^v)$ для $j \leqslant m$ и $\operatorname{repr}_{\tau}(l_{m+1}^{\tau}, d_{m+1}^v, b^v)$, имеет место

$$\mathfrak{S}(a_i^{\tau}) \not\simeq \langle \operatorname{Ind} b^v, l_0^{\tau_0}, \ldots, l_{m+1}^{\tau} \rangle.$$

III. $\alpha_{\mathrm{I}} < \alpha_{\mathrm{II}}$.

Условия I, II, III выразимы формулами из $V_2^{\max\{\mathrm{St}\varrho, \mathrm{St}\tau\}}$. Следовательно, и условие $a_{\mathrm{I}}^{\tau} \leqslant a_{\mathrm{II}}^{\tau}$ выразимо в $\mathfrak{S}$ формулой того же класса. В силу 2.7 и 2.9.2 $a_{\mathrm{I}}^{\tau} \leqslant a_{\mathrm{II}}^{\tau}$ равносильно следующему: для всяких $a^{(v)}, a_<^{(vv)}, a_\varepsilon^{(vv)}, a_F^{(vv)}$ таких, что структура $\mathfrak{T} = \langle a^{(v)}, a_<^{(vv)}, a_\varepsilon^{(vv)}, a_F^{(vv)} \rangle$ принадлежит U^{Δ}, и всяких $\mathfrak{T}$-ординалов α_{I} и α_{II}, для которых выполняются в $\mathfrak{S}(a^{(v)}, a_<^{(vv)}, a_\varepsilon^{(vv)}, a_F^{(vv)})$ условия I и II, выполняется и III. Отсюда следует выразимость условия $a_{\mathrm{I}}^{\tau} \leqslant a_{\mathrm{II}}^{\tau}$ формулой из $\Lambda_2^{\max\{\mathrm{St}\varrho, \mathrm{St}\tau\}}$ (см. также 1.4).

Отношения a_{I}^{τ} и a_{II}^{τ} в структуре $\mathfrak{S}$ назовем *неразличимыми* в $\mathfrak{S}$, если $\mathrm{Od}\, a_{\mathrm{I}}^{\tau} = \mathrm{Od}_{\mathrm{II}}^{\tau}$. Отношения неразличимы в точности тогда, когда существует автоморфизм $\mathfrak{S}$, переводящий одно из них в другое. Теорема 2.10 влечет для всякой бесконечной структуры $\mathfrak{S}$ и всякого типа τ существование вполне упорядочения классов неразличимых отношений типа τ, определимого в $\mathfrak{S}$ по объему формулой класса $\Lambda_2^{\max\{1, \mathrm{St}\mathfrak{S}, \mathrm{St}\tau\}}$.

§ 3. Для всяких родов $\varrho = \langle \tau_0 \ldots \tau_m \rangle$ и $\varrho' = \langle v_0 \ldots v_n \rangle$ через $\varrho \oplus \varrho'$ будем обозначать род $\langle \tau_0 \ldots \tau_m v_0 \ldots v_n \rangle$.

Пусть ϱ — элементарный род. Рассмотрим язык $L(\varrho \oplus \varrho_1 \oplus \langle 0 \rangle)$. Его константы будем обозначать через $C_0^{\tau_0}, \ldots, C_m^{\tau_m}, <, \varepsilon, F, d$.

Через $\sigma_1(<, \varepsilon, F)$ будем обозначать предложение языка $L(\varrho_1)$, принадлежащее классу Λ_1^1 и выражающее для структуры рода ϱ_1, что она принадлежит U^{Δ}. Существование такого предложения следует из 2.5.

Через $\sigma_2(<, d)$ будем обозначать элементарное предложение

$$\forall vw (v < w \wedge w \neq d \rightarrow w < d).$$

Через $\sigma_3(C_0^{\tau_0}, \ldots, C_m^{\tau_m}, <, \varepsilon, F, d)$ будем обозначать предложение из V_1^1, выражающее для всякой структуры $\mathfrak{T} = \langle A, a_0^{\tau_0}, \ldots, a_m^{\tau_m}, a_<^{(00)}, a_\varepsilon^{(00)}, a_F^{(00)}, a_d \rangle$, выполняющей σ_1 и σ_2, что $\mathfrak{T} \vdash \varrho(F(a_d))$ и $\mathrm{Set}^{\varrho} F(a_d)$ изоморфно ϱ-обеднению (т. е. $\{a_0^{\tau_0}, \ldots, a_m^{\tau_m}\}$-обеднению) $\mathfrak{T}$. Существование такого предложения следует из рассуждений, доказывающих 2.10.1.

Через σ_4 будем обозначать предложение из Λ_1^1, выражающее для всякой структуры $\mathfrak{T}$, выполняющей σ_1, σ_2 и σ_3, что для всякого $e < a_d$ такого, что $\mathfrak{T} \vdash \varrho(F(e))$, $\mathrm{Set}^{\varrho} F(e)$ не изоморфно ϱ-обеднению $\mathfrak{T}$. Существование такого предложения также следует из рассуждений, доказывающих 2.10.1.

Для всякого предложения φ из $L(\varrho)$, принадлежащего классу $V_n^k(\Lambda_n^k)$, обозначим через $\sigma_5[\varphi]$ предложение, выражающее для всякой структуры $\mathfrak{T}$, выполняющей σ_1, σ_2, σ_3 и σ_4, что для всякого $e < a_d$ такого, что $\mathfrak{T} \vdash \varrho(F(e))$, ϱ-обеднение $\mathfrak{T}$ выполняет φ, и принадлежащее V_1^1 (Λ_1^1), если $k = 0$, и V_n^k (Λ_n^k) — если $k > 0$.

3.1.1. *Существует эффективная процедура, позволяющая перевести всякое предложение φ языка $L(\varrho_0)$, принадлежащее V_n^k (Λ_n^k), где $k > 0$ и $\langle nk \rangle \neq \langle 11 \rangle$, в предложение φ^* языка $L(\varrho)$, принадлежащее V_n^k (Λ_n^k) и такое, что для всякой бесконечной структуры $\mathfrak{S}$ рода ϱ имеет место* $\mathrm{Od}\,\mathfrak{S} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{S} \vdash \varphi^*$.

Действительно, $\mathrm{Od}\,\mathfrak{S} \vdash \varphi$ равносильно тому, что $\mathfrak{S}$ выполняет предложение, образованное из $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4 \wedge \sigma^*$ — где σ^* предложение того же класса, что и φ, выражающее, что $\mathfrak{T}_<^{\leq} \vdash \varphi$, где $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(a_<^{(00)}, a_\varepsilon^{(00)}, a_F^{(00)}, a_d)$ — заменой констант $<, \varepsilon, F, d$ переменными тех же типов и связыванием последних кванторами существования. Это предложение преобразуемо в предложение из V_n^k, если $\varphi \in V_n^k$. В силу 2.7, оно эквивалентно в бесконечных структурах предложению, образованному из $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4 \rightarrow \sigma^*$ заменой $<, \varepsilon, F, d$ переменными тех же типов и связыванием этих переменных кванторами общности. Последнее преобразуемо в предложение из Λ_n^k, если $\varphi \in \Lambda_n^k$.

Совершенно аналогично можно доказать

3.1.2. *Для всякого элементарного рода ϱ существует эффективная процедура, позволяющая перевести всякое предложение φ языка $L(\varrho)$, принадлежащее V_n^k (Λ_n^k), где $k > 0$ и $\langle nk \rangle \neq \langle 11 \rangle$, в предложение φ^+ языка, $L(\varrho_0)$, принадлежащее V_n^k (Λ_n^k) и такое, что для всякой бесконечной структуры $\mathfrak{S}$ рода ϱ имеет место* $\mathfrak{S} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathrm{Od}\,\mathfrak{S} \vdash \varphi^+$.

Пусть $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — структуры рода ϱ. Будем говорить, что они *n-эквивалентны*, и писать $\mathfrak{S}_1 \equiv \mathfrak{S}_2(n)$, если эти структуры выполняют одни и те же предложения из $L_n(\varrho)$. Из 3.1.1 и 3.1.2 непосредственно следует

3.1.3. *Для всяких элементарных структур $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ одного и того же рода и всякого $n > 1$ имеет место* $\mathfrak{S}_1 \equiv \mathfrak{S}_2(n) \Leftrightarrow \mathrm{Od}\,\mathfrak{S}_1 \equiv \mathrm{Od}\,\mathfrak{S}_2(n)$.

Из рассуждений, доказывающих 2.10.1 и 3.1.1, легко выводится

3.1.4. *Для всякого элементарного рода ϱ и всякого $n > 1$ существует эффективная процедура, позволяющая построить по всякому предложению φ из $L_n(\varrho)$ предложение ψ из $L_n(\varrho)$, выражающее для всякой бесконечной структуры $\mathfrak{S}$ рода ϱ, что всякая структура того же рода и меньшего порядка выполняет φ. При этом если $\varphi \in V_n^k$ (Λ_n^k), где $k > 0$ и $\langle nk \rangle \neq \langle 11 \rangle$, то и $\psi \in V_n^k$ (Λ_n^k).*

Действительно, таковым является для $\varphi \in V_n^k$ предложение, образованное из $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4 \wedge \sigma_5[\varphi]$ заменой констант $<, \varepsilon, F, d$ переменными (тех же типов), связыванием последних кванторами существования и приведением полученного предложения, использующим алгоритм, описанный в [12], к регулярной форме. Для $\varphi \in \Lambda_n^k$ таковым является предложение, образованное из $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4 \rightarrow \sigma_5[\varphi]$, заменой $<, \varepsilon, F, d$ переменными, связыванием последних кванторами общности и приведением полученного предложения к регулярной форме (посредством того же алгоритма).

Пользуясь теоремами о редукциях языков высших ступеней (см., например, [6], теоремы 1.1 и VI), можно доказать следующие предложения, обобщающие 3.1.1 и 3.1.2.

3.2.1. *Для всякого рода ϱ и всякого типа τ существует эффективная процедура, позволяющая перевести всякое предложение φ языка $L(\varrho_0)$ в предложение φ^* языка $L(\varrho)$, такое, что*

1. *если $\varphi \in V_n^k$ (Λ_n^k), где $k \geqslant \max\{1, \mathrm{St}\,\varrho\}$ и $\langle nk \rangle \neq \langle 1 \max\{1, \mathrm{St}\,\varrho\} \rangle$, то $\varphi^* \in V_n^{k+\mathrm{St}\tau}$ $(\Lambda_n^{k+\mathrm{St}\tau})$,*

2. *для всякой бесконечной структуры $\mathfrak{S}$ рода ϱ такой, что $\overline{\overline{\mathrm{Od}\,\mathfrak{S}}} = \overline{\overline{|\mathfrak{S}|}}^{\tau}$, имеет место $\mathrm{Od}\,\mathfrak{S} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{S} \vdash \varphi^*$.*

3.2.2. *Для всякого рода ϱ и всякого типа τ существует эффективная процедура, позволяющая перевести всякое предложение φ языка $L(\varrho)$ в предложение φ^+ языка $L(\varrho_0)$ такое, что*

1. *если $\varphi \in V_n^{k+\mathrm{St}\tau}$ $(\Lambda_n^{k+\mathrm{St}\tau})$, где $k \geqslant \max\{1, \mathrm{St}\,\varrho\}$ и $\langle nk \rangle \neq \langle 1 \max\{1, \mathrm{St}\,\varrho\} \rangle$, то $\varphi^+ \in V_n^k$ (Λ_n^k),*

2. *для всякой бесконечной структуры $\mathfrak{S}$ рода ϱ такой, что $\overline{\overline{\mathrm{Od}\,\mathfrak{S}}} = \overline{\overline{|\mathfrak{S}|}}^{\tau}$, имеет место $\mathfrak{S} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathrm{Od}\,\mathfrak{S} \vdash \varphi^+$.*

Вместе с тем, справедливо следующее предложение, обобщающее 3.1.4:

3.2.3. *Для всякого рода ϱ и всякого $n > \mathrm{St}\,\varrho$ существует эффективная процедура, позволяющая построить по всякому предложению φ из $L_n(\varrho)$ предложение ψ из $L_n(\varrho)$, выражающее для всякой бесконечной структуры $\mathfrak{S}$ рода ϱ, что всякая структура этого же рода и меньшего порядка выполняет φ. При этом если $\varphi \in V_p^k$ (Λ_p^k), где $k \geqslant \max\{1, \mathrm{St}\,\varrho\}$ и $\langle \varrho k \rangle \neq \langle 1 \max\{1, \mathrm{St}\,\varrho\} \rangle$, то и $\psi \in V_p^k$ (Λ_p^k).*

Для случая $\mathrm{St}\,\varrho \leqslant 1$ утверждение справедливо в силу 3.1.4. Пусть $\mathrm{St}\,\varrho > 1$. Обозначим через v монадический тип ступени $\mathrm{St}\,\varrho - 1$. Рассмотрим следующие предложения языка $L(\varrho \oplus \langle (v)(vv)(vv)(vv)v \rangle)$, последние пять констант которого будем обозначать через $S, <, \varepsilon, F, d^v$: $\sigma_1^\varrho(S, <, \varepsilon, F, d^v)$ — предложение класса $\Lambda_1^{\mathrm{St}\varrho}$, выражающее для всякой структуры $\mathfrak{T} = \langle a_S^{(v)}, a_<^{(vv)}, a_\varepsilon^{(vv)}, a_F^{(vv)} \rangle$, что она принадлежит U^Δ; $\sigma_2^\varrho(<, d^v)$ — предложение $\forall v^v w^v (v^v < w^v \wedge w^v \neq d^v \rightarrow w^v < d^v)$, $\sigma_3^\varrho(C_0^{\tau_0}, \ldots, C_m^{\tau_m}, S, <, \varepsilon, F, d^v)$ — предложение класса $V_2^{\mathrm{St}\varrho}$, выражающее для всякой структуры $\mathfrak{T}^* = \langle A, a_0^{\tau_0}, \ldots, a_m^{\tau_m}, a_S^{(v)}, a_<^{(vv)} a_\varepsilon^{(vv)}, a_F^{(vv)}, a_d^v \rangle$, выполняющей σ_1^ϱ и σ_2^ϱ, что $\mathfrak{T} = \langle a_S^{(v)}, a_<^{(vv)}, a_\varepsilon^{(vv)}, a_F^{(vv)}, a_d^v \rangle \vdash \varrho(F(a_d^v))$ и $\mathrm{Set}^\varrho F(a_d^v)$ изоморфно ϱ-обеднению $\mathfrak{T}^*$. Существование такого предложения следует из рассуждений, доказывающих 2.10 (см. условие 1). Из тех же рассуждений (см. условие II) следует существование предложения $\sigma_4(C_0^{\tau_0}, \ldots, C_m^{\tau_m}, S, <, \varepsilon, F, d^v)$ из $V_2^{\mathrm{St}\varrho}$, выражающего для всякой структуры $\mathfrak{T}^*$, выполняющей σ_1^ϱ, σ_2^ϱ и σ_3^ϱ, что для всякого $v^v < a_d^v$ такого, что $\mathfrak{T} \vdash \varrho(F(v^v))$, $\mathrm{Set}^\varrho F(v^v)$, не изоморфно ϱ-обеднению $\mathfrak{T}^*$. Наконец, через $\sigma_5^\varrho[\varphi]$, где $\varphi \in V_p^k$ (Λ_p^k), обозначим предложение, принадлежащее $V_1^{\mathrm{St}\varrho}(\Lambda_1^{\mathrm{St}\varrho})$ для $k < \mathrm{St}\,\varrho$ и V_p^k (Λ_p^k) для $k \geqslant \mathrm{St}\,\varrho$ и выражающее для всякой структуры $\mathfrak{T}^*$, выполняющей $\sigma_1^\varrho, \sigma_2^\varrho, \sigma_3^\varrho, \sigma_4^\varrho$, что для всякого $v^v < a_d^v$ такого, что $\mathfrak{T} \vdash \varrho(F(a_d^v))$, имеет место $\mathrm{Set}^\varrho F(v^v) \vdash \varphi$. Если $\varphi \in V_p^k$ (Λ_p^k), то требуемым предложением ψ будет предложение, образованное из $\sigma_1^\varrho \wedge \sigma_2^\varrho \wedge \sigma_3^\varrho \wedge \sigma_4^\varrho \wedge \sigma_5^\varrho[\varphi]$ (из $\sigma_1^\varrho \wedge \sigma_2^\varrho \wedge \sigma_3^\varrho \wedge \sigma_4^\varrho \rightarrow \sigma_5^\varrho[\varphi]$) заменой констант $S, <, \varepsilon, F, d^v$ переменными (тех же типов), связыванием последних кванторами существования (общности) и приведением полученного предложения (посредством алгоритма, описанного в [12]; см. также [6]) к регулярной форме.

3.3.1. *Пусть $\mathfrak{S}$ — счетная вполне упорядоченная структура. Тогда всякий ее индивид определим формулой из Δ_2^1.*

Пусть A — база $\mathfrak{S}$, $<_{\mathfrak{S}}$ — определяющее отношение, вполне упорядочивающее A. Обозначим через $\widetilde{\omega}$ начальный отрезок $\mathfrak{S}^< = \langle A, <_{\mathfrak{S}} \rangle$, имеющий порядковый тип ω. Все элементы $\widetilde{\omega}$ определимы в $\mathfrak{S}^<$ элементарными формулами. В силу 2.9.2, всякое отображение $\widetilde{\omega}$ на A имеет счетный порядок (в $\mathfrak{S}^<$). Обозначим через f то из них, порядок которого наименьший. Оно определимо по объему в $\mathfrak{S}^<$, а значит, и в $\mathfrak{S}$ формулой из Δ_2^1. Действительно, условие $f(n) = a$ (где $n = n(\mathfrak{S})$) равносильно выполнимости в $\mathfrak{S}^<$ следующего условия: на A существуют отношения $a_<^{(00)}, a_\varepsilon^{(00)}, a_F^{(00)}$, a_d типов $(00), (00), (00), 0$ такие, что

1. $\mathfrak{T} = \langle A, a_<^{(00)}, a_\varepsilon^{(00)}, a_F^{(00)} \rangle$ принадлежит U^Δ,
2. $a_d \in \mathrm{field}\, a_<^{(00)}$,
3. $\mathrm{Set}^{(00)} F_{\mathfrak{T}}(a_d)$ есть взаимно однозначное отображение $\widetilde{\omega}$ на A,

4. $\langle na\rangle \in \mathrm{Set}^{(00)}F_{\mathfrak{X}}(a_d)$,

5. для всякого $e < a_d$ отношение $\mathrm{Set}^{(00)}F_{\mathfrak{X}}(e)$ не есть взаимно однозначное отображение $\widetilde{\omega}$ на A.

В $\mathfrak{S}^{<}(a_{<}^{(00)}, a_{\varepsilon}^{(00)}, a_F^{(00)}, a_d)$ условия 1 и 5 выразимы формулами из Δ_1^1, а условия 2, 3, 4 — формулами из V_1^1. Следовательно, f определяется в $\mathfrak{S}^{<}$ формулой из V_2^1.

Условие $f(n) = a$ равносильно следующему (в силу 2.7): для всяких $a_{<}^{(00)}, a_{\varepsilon}^{(00)}, a_F^{(00)}, a_d$, таких, что выполняются 1, 2, 3, 5, имеет место 4. Это условие выразимо формулой из Δ_2^1. Следовательно, f определяется в $\mathfrak{S}^{<}$ (по объему) формулой из Δ_2^1. Отсюда следует доказываемое.

Таким образом, для всякого счетного ординала α всякий меньший ординал определим в α формулой из Δ_2^1. Следовательно, если α — определимый ординал, то и всякий меньший ординал определим. При этом, если α определяется предложением из V_n^k (Δ_n^k), то и всякий меньший ординал определяется подходящим предложением того же класса.

Заметим, что из 3.3.1 легко выводится известное предложение о сравнимости Δ_2^1 — степеней множеств натуральных чисел (см. [2], теорема 5).

Отношение a^{τ} назовем инвариантным в структуре $\mathfrak{S}$, если $F_{\tau}(a^{\tau}) = a^{\tau}$ для всякого автоморфизма F_0 структуры $\mathfrak{S}$. Будем обозначать через $\mathrm{In}_{\tau}(\mathfrak{S})$ множество всех инвариантных в $\mathfrak{S}$ отношений типа τ, а через $\mathrm{In}(\mathfrak{S})$ — множество $\bigcup_{\tau\in T} \mathrm{In}_{\tau}(\mathfrak{S})$.

3.3.2. *Пусть $a^{(\tau)}$ — счетное отношение в $\mathfrak{S}$ и $a^{(\tau)} \subset \mathrm{In}(\mathfrak{S}(a^{(\tau)}))$. Тогда всякое $a^{\tau} \in a^{(\tau)}$ определяется в $\mathfrak{S}(a^{(\tau)})$ по содержанию формулой из $\Delta_2^{\max\{\mathrm{St}\mathfrak{S},\mathrm{St}(\tau)\}}$.*

В самом деле, отношение $\leqslant^{\tau}$ определимо в $\mathfrak{S}$ по объему формулой из $\Delta_2^{\max\{1,\mathrm{St}\mathfrak{S},\mathrm{St}\tau\}}$. Сужение этого отношения на $a^{(\tau)}$ определимо в $\mathfrak{S}(a^{(\tau)})$ формулой из $\Delta_2^{\max\{1,\mathrm{St}\mathfrak{S},\mathrm{St}\tau\}}$ и вполне упорядочивает $a^{(\tau)}$, так как, по условию, всякое $a^{\tau} \in a^{(\tau)}$ инвариантно в $\mathfrak{S}(a^{(\tau)})$. Из 3.3.1 следует, что всякое $a^{\tau} \in a^{(\tau)}$ определимо в $\langle a^{(\tau)}, \leqslant^{\tau} \restriction a^{(\tau)}\rangle$ формулой из Δ_2^1, откуда вытекает определимость a^{τ} в $\mathfrak{S}(a^{(\tau)})$ по содержанию формулой из $\Delta_2^{\max\{\mathrm{St}\mathfrak{S},\mathrm{St}(\tau)\}}$.

Из 3.3.2 следует, что если счетное отношение $a^{(\tau)}$ в $\mathfrak{S}$ таково, что для всякого n в $a_k^{(\tau)}$ существует a^{τ}, не определимое в $\mathfrak{S}$ по содержанию формулой из Δ_n^k, где $k \geqslant \max\{\mathrm{St}\mathfrak{S}, \mathrm{St}(\tau)\}$, то $a^{(\tau)}$ не определимо в $\mathfrak{S}$ формулой $(k+1)$-ой ступени. Так что, в частности, если для всякого k существует $a^{\tau} \in a^{(\tau)}$, не определимое в $\mathfrak{S}$ формулой $(k+1)$-ой ступени, то $a^{(\tau)}$ не определимо в $\mathfrak{S}$. Пользуясь этим предложением, можно показать, что множество всех определимых в $\mathfrak{S}$ отношений типа τ определимо в $\mathfrak{S}$ лишь в тривиальных случаях.

§ 4. Через $D_{\tau}(\mathfrak{S})$ будем обозначать множество всех определимых в $\mathfrak{S}$ отношений типа τ, а через $D(\mathfrak{S})$ — множество $\bigcup_{\tau\in T} D_{\tau}(\mathfrak{S})$. Следующее предложение очевидно.

4.1. *$D_{\tau}(\mathfrak{S})$ есть конечное или счетное тело множеств для всякого $\tau \neq 0$. В частности*

$$\{D_{\tau}(\mathfrak{S}) \cap a^{(\tau)}\} \subset D(\mathfrak{S}) \Rightarrow D_{\tau}(\mathfrak{S}) \cap a^{(\tau)} \in D(\mathfrak{S}).$$

Пусть в структуре $\mathfrak{S}$ некоторая формула $\varphi(v, w)$ определяет отношение $<_{\mathfrak{S}}$ типа (00), вполне упорядочивающее $\mathrm{field}<_{\mathfrak{S}}$, и пусть последнее несчетно. Тогда множество $D_0(\mathfrak{S})$ определимых в $\mathfrak{S}$ индивидов не определимо в $\mathfrak{S}$. Допустим, что это не так и что $D_0(\mathfrak{S})$ определяется в $\mathfrak{S}$ некоторой формулой $\psi(v)$. Так как $D_0(\mathfrak{S})$ счетно, а $\mathrm{field}<_{\mathfrak{S}}$ несчетно, то в $\mathrm{field}<_{\mathfrak{S}}$ имеются не определимые в $\mathfrak{S}$ индивиды. Формула

$$\chi(v) \wedge \neg\psi(v) \wedge \forall w(\chi(w) \wedge \neg\psi(w) \rightarrow v \leqslant w),$$

где $\chi(v)$ — формула $\exists v_1(\varphi(v, v_1) \vee \varphi(v_1, v))$, определяет наименьший из неопределимых индивидов в $\mathrm{field}<_{\mathfrak{S}}$, что противоречит неопределимости этого индивида. Такова в „очищенном“ виде идея принадлежащего А. Тарскому [11] доказательства неопределимости в стандартной модели арифметики $\mathfrak{A}$ множества $D_{((0))}(\mathfrak{A})$. Ее удобно выразить в следующей по видимости более общей форме:

4.2 (ZF). *Пусть $\{a^{(\tau)}, a^{(\tau\tau)}\} \subset D(\mathfrak{S})$ и $a^{(\tau\tau)} \restriction a^{(\tau)}$ — отношение вполне упорядочения на $a^{(\tau)}$. Тогда если $a^{(\tau)} \not\subset D(\mathfrak{S})$, то $a^{(\tau)} \cap D(\mathfrak{S}) \notin D(\mathfrak{S})$.*

Те же рассуждения доказывают справедливость следующего несколько более сильного предложения.

4.3 (ZF). *При условиях из 4.2 всякая формула $\psi(v^{\tau})$, выполняющаяся в $\mathfrak{S}$ на каждом определимом отношении из $a^{(\tau)}$, выполняется на каждом отношении из $a^{(\tau)}$.*

(Из 4.3 следует, что при условиях 4.2 множество всех определимых отношений из $a^{(\tau)}$ не определяется в $\mathfrak{S}$ никакой системой формул. Следовательно, и $D_{\tau}(\mathfrak{S})$ не определяется в $\mathfrak{S}$ никакой системой формул).

4.4 (ZF). *Пусть база структуры $\mathfrak{S}$ включает счетное множество. Тогда $D_{((0))}(\mathfrak{S}) \notin D(\mathfrak{S})$.*

Отношение $a^{((00))}$ в $\mathfrak{S}$ назовем *ординальным*, если оно состоит из всевозможных $a^{(00)}$, являющихся отношениями вполне упорядочения, имеющими один и тот же порядковый тип. Множество $a^{(((00)))}$ всех ординальных отношений принадлежит $D(\mathfrak{S})$. Так как для каждого бесконечного ординала $\alpha < \aleph_1$ существует ординальное отношение порядкового типа α, то множество $a^{(((00)))}$ несчетно и, следовательно, содержит неопределимое ординальное отношение. Вполне упорядочение $a^{((((00))))}$, индуцируемое естественным упорядочением порядковых типов отношений из $a^{(((00)))}$ (находящихся во взаимно однозначном соответствии с этими отношениями), определимо в $\mathfrak{S}$. Следовательно, в силу 4.2, $a^{(((00)))} \cap D(\mathfrak{S})$ не принадлежит $D(\mathfrak{S})$.

В рамках ZF предложение 4.2 перестает быть пригодным для отыскания критериев определимости $D_\tau(\mathfrak{S})$ в произвольной структуре $\mathfrak{S}$ в случае $\mathrm{St}\,\tau \leqslant 1$ или $\tau = ((0))$ (правда, пользуясь идеей Аддисона [3], [5], можно, в частности, установить, что $D_{((0))}(\mathfrak{S}) \notin D(\mathfrak{S})$ а значит, $D_\tau(\mathfrak{S}) \notin D(\mathfrak{S})$ для всякой не конечной структуры $\mathfrak{S}$ и всякого типа τ не ниже 2-ой ступени). Применение теоремы 2.10 делает (в рамках $\mathrm{ZF}+\mathrm{V}=\mathrm{L}$) предложение 4.2 эффективным и в этих случаях.

Следующие предложения очевидны.

4.5.1. $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$ *для* $\tau \neq 0$ *есть полное тело множеств.*

4.5.2. $D(\mathfrak{S}) \subset \mathrm{In}(\mathfrak{S})$.

4.5.3. $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S}) \in D(\mathfrak{S})$ *для всякого типа* τ. *Более того, если* $\tau \neq 0$, *то* $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$ *определяется в* $\mathfrak{S}$ *по объему формулой из* $\Delta_1^{\max\{1,\mathrm{St},\mathrm{St}\tau\}}$.

Из 2.10 следует существование формулы из $\Delta_2^{\max\{1,\mathrm{St}\mathfrak{S},\mathrm{St}\tau\}}$, определяющей по объему вполне упорядочение $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$. Если $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S}')$ несчетно, то $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S}) \not\subset D(\mathfrak{S})$, и тогда, в силу 4.2, $D_\tau(\mathfrak{S}) \notin D(\mathfrak{S})$. Если $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$ счетно, то, согласно 3.3.2, всякий элемент $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$ определим в $\mathfrak{S}(\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S}))$, а значит, в силу 4.5.3, определим в $\mathfrak{S}$. Иначе говоря, в этом случае $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S}) \subset D(\mathfrak{S})$, и потому $D_\tau(\mathfrak{S}) = \mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$, а значит, в силу 4.5.3, $D_\tau(\mathfrak{S}) \in D(\mathfrak{S})$. Таким образом, имеет место

4.6. Теорема. *Для всякой структуры* $\mathfrak{S}$ *и всякого типа* τ $D_\tau(\mathfrak{S}) \in D(\mathfrak{S})$ *равносильно тому, что* $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$ *не более чем счетно, а последнее — тому, что* $D_\tau(\mathfrak{S}) = \mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$.

Из 4.6 следует, в частности,

4.6.1. *Если структура* $\mathfrak{S}$ *имеет счетную базу, то* $D_0(\mathfrak{S}) \in D(\mathfrak{S})$.

Пусть $\tau = (\tau_1 \ldots \tau_n)$ и $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$ бесконечно. На сумме $S(\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})) = \bigcup_{a^\tau \in \mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})} a^\tau$ рассмотрим отношение эквивалентности E, задаваемое так:

$$\langle a_1^{\tau_1} \ldots a_n^{\tau_n} \rangle \,\mathrm{E}\, \langle b_1^{\tau_1} \ldots b_n^{\tau_n} \rangle \Leftrightarrow \forall a^\tau \big(a^\tau \in \mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S}) \to (a^\tau a_1^{\tau_1} \ldots a_n^{\tau_n} \leftrightarrow a^\tau b_1^{\tau_1} \ldots b_n^{\tau_n})\big).$$

Классы эквивалентности принадлежат $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$. Пусть $e^{(\tau)}$ — множество, состоящее из всех этих классов. В силу его дизъюнктности, соответствие $d^{(\tau)} \to S(d^{(\tau)})$ для $d^{(\tau)} \subset e^{(\tau)}$ взаимно однозначно. Так как все $S(d^{(\tau)})$ принадлежат $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$, то имеет место

4.7. *Если* $\tau \neq 0$ *и* $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$ *бесконечно, то* $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$ *несчетно.*

Отсюда и из 4.6 следует

4.8. Теорема. *Для всякой структуры* $\mathfrak{S}$ *и всякого* $\tau \neq 0$ $D_\tau(\mathfrak{S}) \in D(\mathfrak{S})$ *имеет место в точности тогда, когда* $D_\tau(\mathfrak{S})$ *конечно. Если* $\mathrm{St}\,\tau > 1$, *то* $D_\tau(\mathfrak{S}) \in D(\mathfrak{S})$ *равносильно конечности* $|\mathfrak{S}|$.

Из 4.8 следует

4.8.1. *Если* $D_0(\mathfrak{S})$ *бесконечно, то* $D_\tau(\mathfrak{S}) \notin D(\mathfrak{S})$ *для всякого* $\tau \neq 0$.

Из 2.10 и 4.3 следует

4.9. *Для всякой структуры* $\mathfrak{S}$ *рода* ϱ *и всякого типа* τ *множество* $D_\tau(\mathfrak{S})$ $L(\varrho)$ *— неотделимо в* $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$, *то есть всякая формула* $\psi(v^\tau)$, *выполняющаяся в* $\mathfrak{S}$ *на каждом* a^τ *из* $D_\tau(\mathfrak{S})$, *выполняется на каждом* a^τ *из* $\mathrm{In}_\tau(\mathfrak{S})$.

В частности, имеет место

4.9.1. *Пусть* $\mathrm{In}_0(\mathfrak{S}) = |\mathfrak{S}|$. *Тогда всякая формула* $\psi(v^\tau)$, *выполняющаяся на каждом определимом (в* $\mathfrak{S}$) a^τ, *истинна в* $\mathfrak{S}$.

(Из 4.9 следует, что для всякой структуры $\mathfrak{S}$ и всякого типа τ $D_\tau(\mathfrak{S}) \notin D(\mathfrak{S})$ равносильно тому, что $D_\tau(\mathfrak{S})$ не определяется в $\mathfrak{S}$ никакой системой формул).

Обозначим через $D_{n\tau}^i(\mathfrak{S})$ (через $D_{n\tau}^e(\mathfrak{S})$) множество всех отношений типа τ, определимых в $\mathfrak{S}$ по объему (по содержанию) формулами n-ой ступени. Для $n > \mathrm{St}\,\tau$ имеет место $D_{n\tau}^i(\mathfrak{S}) = D_{n\tau}^e(\mathfrak{S})$, и поэтому в случае $n > \mathrm{St}\,\tau$ будем писать $D_{n\tau}(\mathfrak{S})$ вместо $D_{n\tau}^i(\mathfrak{S})$ и вместо $D_{n\tau}^e(\mathfrak{S})$. Для $n \leqslant \mathrm{St}\,\tau$ множество $D_{n\tau}^e(\mathfrak{S})$ пусто, и потому $D_{n\tau}^i(\mathfrak{S})$ и $D_{n\tau}^e(\mathfrak{S})$ вообще не совпадают, но для всяких $\mathfrak{S}$, n и τ имеет место $D_{n\tau}^e(\mathfrak{S}) \subset D_{n\tau}^i(\mathfrak{S})$. Из аргументов, влекущих 4.5.3-4.8, следует

4.10. *Пусть* $n > \max\{1, \mathrm{St}\mathfrak{S}\}$. *Тогда*

1. $D_{n0}(\mathfrak{S}) \in D_{n(0)}(\mathfrak{S})$ *равносильно тому, что* $\mathrm{In}_0(\mathfrak{S})$ *не более чем счетно,*
2. *если* $\mathrm{St}\,\tau = 1$, *то* $D_{n\tau}(\mathfrak{S}) \in D_{n(\tau)}^e(\mathfrak{S})$ *равносильно конечности* $D_{n\tau}(\mathfrak{S})$,
3. *если* $n > \mathrm{St}\,\tau > 1$, *то* $D_{n\tau}(\mathfrak{S}) \in D_{n(\tau)}^e(\mathfrak{S})$ *равносильно конечности* $|\mathfrak{S}|$.

§ 5. Пусть ϱ — произвольный род, $\mathfrak{L}$ — какой-нибудь фрагмент языка $L(\varrho)$. Выполнимое предложение φ из $\mathfrak{L}$ назовем *семантически полным в* $\mathfrak{L}$ или, короче, $\mathfrak{L}$-*полным*, если для всякого предложения ψ из $\mathfrak{L}$ общезначимо $\varphi \to \psi$ или $\varphi \to \neg\psi$. Если φ $\mathfrak{L}$-полно и $\varphi \to \psi$ общезначимо, то будем говорить, что φ есть $\mathfrak{L}$-пополнение ψ.

Если $\mathfrak{L}$ есть $L_1(\varrho)$, то, в силу гёделевской теоремы полноты, понятия семантической полноты и дедуктивной полноты для $\mathfrak{L}$ (в $\mathrm{ZF}+\mathrm{ADC}$) совпадают. Для языков второй и высших ступеней эти понятия не совпадают в силу теоремы неполноты Гёделя, влекущей, в частности, существование выполнимого предложения из $L_1(\varrho)$, не имеющего $L_1(\varrho)$-пополнения (если $L_1(\varrho)$ содержит немонадическую константу). Более того, из 3.2.3 непосредственно следует

5.1. *Пусть* $n > \mathrm{St}\,\varrho$. *Тогда для любого выполнимого в бесконечной структуре предложения из* $L_n(\varrho)$ *существует* $L_n(\varrho)$-*пополнение, являющееся категоричным предложением.*

Следовательно, для предложений из $L_n(\varrho)$ семантическая полнота равносильна категоричности.

Это утверждение будет усилено теоремой 5.1.4.

5.1.1. *Пусть* ϱ *элементарный род и* $\mathfrak{L}$ *есть либо* $L(\varrho)$, *либо* $L_n(\varrho)$ *для какого-нибудь* $n > 1$. *Тогда существует эффективная процедура, переводящая* *всякое предложение φ из $\mathfrak{L}$ в предложение ψ из $\mathfrak{L}$, выполнимое в точности тогда, когда φ выполнимо в бесконечной структуре и не выполнимо в конечных, и такое, что если ψ выполнимо, то оно категорично и является $\mathfrak{L}$-пополнением φ.*

Действительно, в силу 3.1.4, по φ можно эффективно построить предложение φ^* языка $\mathfrak{L}$, выражающее для всякой бесконечной структуры $\mathfrak{S}$, что всякая структура того же рода и меньшего порядка не выполняет φ. Пусть χ — предложение из V_1^1, выражающее, что структура бесконечна. Тогда $\psi = \varphi\wedge\varphi^*\wedge\chi$ — предложение языка $\mathfrak{L}$, выражающее, что структура бесконечна и ее порядок есть наименьший из порядков структур рода ϱ, выполняющих φ. Следовательно, если ψ выполнимо, то оно категорично.

Заметим, что если $\varphi \in V_n^k\,(\Delta_n^k)$, где $k>0$ и $\langle nk\rangle \neq \langle 11\rangle$, то, в силу 3.1.4, $\varphi^* \in \Delta_n^k\;(V_n^k)$, и следовательно, $\psi \in \Delta_{n+1}^k$. С помощью этого замечания легко доказывается

5.1.2. *Пусть $\mathfrak{L}$ — то же, что и в 5.1.1. Тогда для всякого выполнимого предложения φ языка $\mathfrak{L}$, принадлежащего V_n^k $(k>0)$, существует $\mathfrak{L}$-пополнение из Δ_{n+1}^k.*

В самом деле, каждому выполнимому предложению φ соотнесем элементарное предложение ψ^*, которое в случае невыполнимости φ в бесконечных структурах определяет структуру наименьшего порядка, выполняющую φ, а в противном случае совпадает с $\forall v(v\neq v)$. Предложение $\psi\vee\psi^*$, где ψ — то же, что и в 5.1.1, выполнимо одновременно с φ и в случае выполнимости φ категорично, а значит, является $\mathfrak{L}$-пополнением φ. Так как ψ^* элементарно, а ψ принадлежит Δ_{n+1}^k, то $\psi\vee\varphi^*$ преобразуемо в эквивалентное предложение из Δ_{n+1}^k.

Покажем теперь, что 5.1.2 можно „эффективизировать“ и тем самым усилить.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, <\rangle$ — конечное линейно упорядоченное множество. Тогда для всякого натурального k можно записать элементарную формулу, определяющую в $\mathfrak{A}$ лексикографический порядок $\preccurlyeq$ на A^k. Пользуясь этой формулой, нетрудно записать Δ^0-формулу, задающую следующий линейный порядок $\lll$ на $P(A^n)$: $C \lll D$ для $C, D \in P(A^k)$, если существуют $d_1, \ldots, d_k$ из A такие, что $\langle d_1 \ldots d_k\rangle \in D\setminus C$ и для всякого кортежа $\langle c_1 \ldots c_k\rangle \preccurlyeq \langle d_1 \ldots d_k\rangle$ имеет место $\langle c_1 \ldots c_k\rangle \in C \Leftrightarrow \langle c_1 \ldots c_k\rangle \in D$. Пусть $\tau = (\underbrace{0 \ldots 0}_{k})$ и $\mathfrak{S}_1 = \langle A, a^\tau, <_1\rangle$, $\mathfrak{S}_2 = \langle B, b^\tau, <_2\rangle$ — конечные структуры, в которых $<_1$ и $<_2$ — отношения линейного порядка. Полагаем $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}_2$, если $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ или $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ и $F_\tau(a^\tau) \lll b^\tau$, где F_0 — изоморфное отображение $\mathfrak{S}_1^<$ на $\mathfrak{S}_2^<$, F_τ — распространение F_0, $\lll$ — порядок в $P(B^k)$, описанный выше.

Пусть $\mathfrak{T} = \langle A, a^\tau\rangle$ — конечная структура (рода $\langle\tau\rangle$). Для каждого линейного порядка $<_i$ на A обозначим через $\mathfrak{T}_i$ структуру $\langle A, a^\tau, <_i\rangle$. Полагаем $\mathfrak{T}_i \leqslant \mathfrak{T}_j$, если $\mathfrak{T}_i < \mathfrak{T}_j$ или $\mathfrak{T}_i \simeq \mathfrak{T}_j$. Введенное отношение есть отношение квазипорядка. Его факторотношение по отношению изоморфности есть отношение линейного порядка (между классами изоморфных структур $\widetilde{\mathfrak{T}}_i$). Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{T}}$ наименьший (относительно последнего отношения) из классов эквивалентности. Пусть теперь $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ — произвольные конечные структуры рода $\langle\tau\rangle$. Полагаем $\mathfrak{T}_1 \leqslant \mathfrak{T}_2$, если $\mathfrak{T}_1^* < \mathfrak{T}_2^*$ или $\mathfrak{T}_1^* \simeq \mathfrak{T}_2^*$, где $\mathfrak{T}_i^*$ — произвольный представитель $\widetilde{\mathfrak{T}}_i$ $(i=1,2)$. Введенное отношение есть отношение линейного порядка на изоморфных типах конечных структур (рода $\langle\tau\rangle$).

Из сказанного выводится, что для всякого принадлежащего $V_n^k\,(k>0)$ предложения φ из $L(\langle\tau\rangle)$ можно записать предложение φ^{**} из Δ_{n+1}^k, выражающее, что структура выполняет φ, конечна и что всякая меньшая (в смысле определенного выше квазипорядка) структура не выполняет φ. Заменяя в доказательстве 5.1.2 предложение ψ^* на ψ^{**}, приходим к справедливости следующего предложения.

5.1.3. *Существует эффективная процедура, переводящая всякое предложение φ из $\mathfrak{L}$ (где $\mathfrak{L}$ — то же, что и в 5.1.1) в предложение χ, выполнимое одновременно с φ и такое, что если χ выполнимо, то оно есть $\mathfrak{L}$-пополнение φ, и если $\varphi \in V_n^k$ $(k>0)$, то $\chi \in \Delta_{n+1}^k$.*

5.1.3, очевидно, остается справедливым для всякого элементарного рода ϱ. Описанный способ задания отношения порядка между изоморфными типами конечных структур распространим на структуры любого рода. Пользуясь этим и обобщающим 3.1.4 предложение 3.2.3, или пользуясь 5.1.3 и теоремами о редукциях языков высших ступеней к языкам 2-ой ступени, можно доказать справедливость следующей теоремы

5.1.4. Теорема. *Пусть ϱ — произвольный род и $\mathfrak{L}$ есть либо $L(\varrho)$ либо $L_p(\varrho)$ для $p > \mathrm{St}\,\varrho$. Существует эффективная процедура, переводящая всякое предложение φ из $\mathfrak{L}$ в предложение χ, выполнимое одновременно с φ и такое, что 1) если φ выполнимо, то χ есть $\mathfrak{L}$-пополнение φ, 2) если $\varphi \in V_n^k$, где $k \geqslant \max\{1, \mathrm{St}\,\varrho\}$, то $\chi \in \Delta_{n+1}^k$.*

§ 6. Пусть α — счетный ординал, f — то из отображений ω на α, которое имеет наименьший порядок. В § 3 (см. доказательство 3.3.1) доказано, что f определяется в α по объему формулой из Δ_2^1. Обозначим через $\varphi(u, v)$ формулу из Δ_2^1, выражающую, что $f(u) < f(v)$. Пусть α_1 и α_2 — счетные 2-эквивалентные ординалы. Тогда, в силу определимости в α_1 и α_2 всех $m, n < \omega$, имеет место

$$\alpha_1 \vdash \varphi(m, n) \Leftrightarrow \alpha_2 \vdash \varphi(m, n)\,.$$

Следовательно, отношения порядка на ω, определимые в α_1 и α_2 формулой φ, совпадают. Но эти отношения имеют порядковые типы α_1 и α_2. Следовательно, имеет место

6.1. *Пусть α_1 и α_2 — счетные ординалы. Тогда $\alpha_1 \equiv \alpha_2(2) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$. Более того, для $\alpha_1 = \alpha_2$ достаточно, чтобы α_1 и α_2 выполняли одни и те же формулы $\varphi(m, n)$.*

Отсюда и из того, что всякое $m<\omega$ элементарно определимо во всяком счетном ординале, следует

6.1.1. *Если счетные ординалы выполняют одни и те же предложения из Δ_2^1, то они равны.*

Пусть $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — счетные элементарные 2-эквивалентные структуры, выполняющие одни и те же предложения из Δ_2^1. В силу 2.9.1, $\mathrm{Od}\,\mathfrak{S}_1$ и $\mathrm{Od}\,\mathfrak{S}_2$ — счетные ординалы. В силу 3.1.1, эти ординалы выполняют одни и те же предложения из Δ_2^1. Отсюда и из 6.2.1 следует $\mathrm{Od}\,\mathfrak{S}_1=\mathrm{Od}\,\mathfrak{S}_2$, а значит $\mathfrak{S}_1\simeq\mathfrak{S}_2$. Таким образом, имеет место

6.2. Теорема. *Счетные элементарные структуры (одного и того же рода), выполняющие одни и те же предложения из Δ_2^1, изоморфны.*

В частности

6.2.1. *Счетные элементарные 2-эквивалентные структуры изоморфны.*

Добавление. Основные результаты статьи справедливы во всяком обогащении ZF, в котором доказуемо существование „хорошо“ определимого вполне упорядочения универсума или подходящих его частей. Таковым, помимо $\mathrm{ZF}+\mathrm{V}=\mathrm{L}$, является обогащение ZF аксиомой, утверждающей существование нормального ультрафильтра D, для которого $\mathrm{V}=L^D$ (см. [10]). Из 6.3.1 непосредственно следует доказуемость равенства счетных 2-эквивалентных ординалов в $\mathrm{ZF}+\omega_1=\omega_1^L$. Вместе с тем, из недоказуемости в ZFC+GCH существования определимого вполне упорядочения для какого-либо несчетного подмножества $P(\omega)$ следует, что для всякого натурального n в ZFC+GCH не доказуемо равенство счетных n-эквивалентных ординалов. Отсюда же следует недоказуемость в ZFC+ +GCH теорем 4.6 и 4.9. Из (установленной А. Леви) совместимости с ZFC+GCH предложения о существовании определимого в стандартной модели арифметики непустого отношения типа $\big((0)\big)$ из неопределимых элементов следует недоказуемость в ZFC+GCH предложения 5.1.

Результаты статьи были доложены на семинарах по математической логике в ВИНИТИ и МГУ (1970 г.), на XI Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре (1971 г.), на IV Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки (1971 г.) и анонсированы в [7], [8].

Литература

[1] J. W. Addison, *Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory*, Fund. Math. 46 (1958), стр. 123–135.

[2] — *Some consequences of the axiom constructibility*, Fund. Math. 46 (1959), стр. 337–357.

[3] — *The undefinability of the definable*, Amer. Math. Soc. Notices 12 (1965), стр. 347–348.

[4] К. Гёдель, *Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств*, Успехи Мат. Наук 3 (1) (1948), стр. 96–149.

[5] R. Jensen, *Modelle der Mengenlehre*, 1967.

[6] С. Р. Когаловский, *К семантике теории типов*, Известия высших учебных заведений, Математика 1 (1966), стр. 89–98.

[7] — *Some results on higher-order logic*, IV-th. International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. Abstracts. Bucharest, 1971, стр. 31.

[8] — *О степенях неопределимости*, II Всесоюзная конференция по математической логике (тезисы сообщений), Москва 1972, стр. 22.

[9] A. Mostowski, *Thirty years of foundational studies*, Acta Philos. Fennica 18 (1965).

[10] J. W. Silver, *Measurable cardinals and Δ_3^1 well-orderings*, Ann. of Math. 94 (1971), стр. 414–446.

[11] A. Tarski, *A note on the notion of definability*, JSL 13 (1948), стр. 107–111.

[12] А. А. Зыков, *Проблема спектра в расширенном исчислении предикатов*, Изв. АН СССР, сер. Матем. 17 (1) (1953), стр. 63–76.

Reçu par la Rédaction le 7. 12. 1973