to the same individual. This model gives us a valuation V_j for all atomic formulas in $(G_j)'$. For $j < 2^{\omega_0}$, each $(G_j)'$ has such a valuation, and each $(G_j)'$ has exactly the same set C of constants appearing in it, and the valuations do not conflict since $(G_j)'$ and $(G_k)'$ are disjoint if $k \neq j$. Also, any substitution instance of any formula in $\Delta \cup \Gamma$ which is constructed with constants in C appears in some $(G_j)'$. Thus, we have a structure with the set C as the universe, each constant in C assigned to itself, and the predicates determined by the set of valuations V_j. It can easily be shown by induction that every formula in $\bigcup_{j<2^{\omega_1}} (G_j)'$ is satisfied by this structure. So the structure is a model for $\Delta \cup \Gamma$. Q.E.D.

References

[1] L. Henkin, *Some remarks on infinitely long formulas*, in Infinitistic Methods, Warsaw (1961), pp. 167–183.

Reçu par la Rédaction le 24. 7. 1972

Entscheidungsprobleme der Theorie zweier Äquivalenzrelationen mit beschränkter Zahl von Elementen in den Klassen

von

Kurt Hauschild und **Wolfgang Rautenberg** (Berlin)

Abstract. Let $E_{n,m}$ $(2 \leqslant n \leqslant m < \omega)$ be the class of structures $\langle A, R_0, R_1\rangle$ where R_0, R_1 are equivalence relations such that card $a|R_0 \leqslant n$, card $a|R_1 \leqslant m$ for all $a \in A$. Among other things it is shown that $E_{n,m}$ is recursively decidable iff $n = m = 2$. The same holds for the corresponding classes $E_{n,m}^{\mathrm{fin}}$ of finite structures. Proofs are by model-interpretability.

1. Übersicht. Es sei E die Klasse aller Strukturen $\langle M; R_0, R_1\rangle$, wo R_0, R_1 Äquivalenzrelationen über M sind und überdies die Bedingung

$$(*) \qquad a/R_0 \cap a/R_1 = \{a\} \qquad (a \in M)$$

erfüllt ist. Ferner sei E_n die Klasse derjenigen Strukturen aus E, die darüberhinaus der Bedingung

$$(**) \qquad \operatorname{card} a/R_0 \leqslant n < \omega \qquad (a \in M)$$

genügen. In [1] und — unabhängig davon — in [2] wurde die rekursive Unentscheidbarkeit der (elementaren) Theorie ThE (ohne Identität) gezeigt und darüberhinaus, daß E eine Reduktionsklasse im Sinne der Prädikatenlogik ist (d. h. jede Aussage H des Prädikatenkalküls ist effektiv in eine Aussage H' der Sprache von E (ohne Identität) überführbar, so daß H dann und nur dann allgemeingültig ist, wenn $H' \in$ ThE. ThE_1 kann als Theorie einer Äquivalenzrelation mit Identität aufgefaßt werden; diese Theorie ist bekanntlich entscheidbar, daher erscheint das Entscheidungsproblem für ThE_n, insbesondere für $n = 2$ als eine interessante Fragestellung. Die Antwort wird gegeben durch

THEOREM 1. *E_n $(n \geqslant 2)$ ist universell bezüglich Modellinterpretierbarkeit. Damit ist E_n eine Reduktionsklasse für den PK, und daher ist* ThE_n *rekursiv unentscheidbar.*

Weil $E_2 \subset E_n \subset E$ $(n \geqslant 2)$, und weil ThE_2 endliche Erweiterung von ThE_n ist, genügt es, den Beweis für $n = 2$ zu führen. ThE_2 ist auch endliche Erweiterung von ThE, so daß dies Theorem eine Verschärfung des bislang bekannten Resultats ist. Das bezieht sich im besonderen auf die Universalität bezüglich Modellinterpretierbarkeit, die im folgenden Abschnitt näher zur Sprache kommt und grob gesprochen besagt, daß jede Struktur durch ein Modell aus E_2 (und damit aus E) "kodiert" werden kann und daß diese Kodierung lediglich von der Signatur (dem Typus) einer vorliegenden Struktur abhängt. Die Resultate bleiben übrigens wörtlich dieselben, wenn anstelle von E_2 die Teilklasse derjenigen Strukturen betrachtet wird, die genau zwei Elemente in jeder Äquivalenzklasse $\mathrm{mod}\,R_0$ enthalten.

Es sei $E_{n,m}$ die Klasse derjenigen Strukturen aus E_n, die neben $(*)$ und $(**)$ der Bedingung

$$(***) \qquad \mathrm{card}\, a/R_1 \leqslant m < \omega$$

genügen. Eine weitere Verschärfung von Theorem 1 hinsichtlich des Entscheidungsproblems liefert

THEOREM 2. $\mathrm{Th}\,E_{n,m}$ $(2 \leqslant n \leqslant m)$ *ist einzig im Falle* $n = m = 2$ *rekursiv entscheidbar, in allen übrigen Fällen rekursiv unentscheidbar* (*).

Die Theorien $\mathrm{Th}\,E_{n,m}$ $(2 \leqslant n \leqslant m,\ 3 \leqslant m)$ sind sämtlich endliche Erweiterungen von $\mathrm{Th}\,E_{2,3}$; daher genügt es nach einem bekannten Reduktionssatz, die Unentscheidbarkeit der letztgenannten Theorie zu beweisen. Dieser im dritten Abschnitt geführte Beweis gelingt in überraschend einfacher Weise durch Reduktion auf die unentscheidbare Klasse der 3-regulären Graphen. Aus Gründen, die in [6] im einzelnen erörtert worden sind, kann die Klasse G_3 der 3-regulären Graphen und damit auch $E_{2,3}$ nicht universell bezüglich Modellinterpretierbarkeit sein. Dennoch sind G_3 und damit auch $E_{2,3}$ noch Reduktionsklassen im anfänglich genannten Sinne; dies geht aus einer genauen Analyse der in [5] durchgeführten Betrachtungen hervor.

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit wird die Unentscheidbarkeit von $\mathrm{Th}\,E_{2,3}^{\mathrm{fin}}$ — und damit auch von $\mathrm{Th}\,E^{\mathrm{fin}}$ —, der Theorie der endlichen Modelle von $E_{2,3}$ bzw. E, gezeigt. Dies gelingt durch einfache Reduktion auf das Hauptresultat in [5], die rekursive Unentscheidbarkeit von G_3^{fin}. Wir betrachten hier Theorie ohne Identität, weil diese wegen der Bedingung $(*)$ explizit definierbar ist. Diese Bedingung ist indes keine so einschneidende Bedingung, wie es auf den ersten Blick erscheint, da der Durchschnitt der beiden Äquivalenzrelationen als Kongruenzrelation die Identität gewissermaßen vertreten kann.

Die Beweise sind — verglichen z. B. mit denen in [2] — außerordentlich einfach und führen zugleich zu schärferen Resultaten. Mit derselben Methode können auch alle übrigen in [2] genannten Resultate leicht abgeleitet werden.

(*) Das Resultat bleibt wörtlich dasselbe, wenn $E_{n,m}$ durch die Klasse derjenigen Strukturen aus $E_{n,m}$ ersetzt wird, die genau n bzw genau m Elemente in den Äquivalenzklassen $\mathrm{mod}\,R_0$ bzw. R_1 enthalten.

2. Modellinterpretierbarkeit. Die Methode der Modellinterpretierbarkeit ist seit etwa 1960 von verschiedenen Autoren mit Erfolg für die Lösung von Entscheidungsproblemen verwendet worden. Wir beschränken uns auf eine kurze Darlegung dieser Methode. Zunächst sei der grundlegende Begriff des Reduktes erklärt.

Ist $H(x_1, \ldots, x_n)$ ein Ausdruck der Signatur Σ, M eine Σ-Struktur, so bezeichne $\varrho_M H$ die von H in M beschriebene n-stellige Relation. L_Σ und $L_{\Sigma'}$ seien (elementare) Sprachen der Signaturen Σ bzw. Σ'. Eine *Explikation* von L_Σ in $L_{\Sigma'}$ ist eine Abbildung $\delta\colon \Sigma \to L_{\Sigma'}$ welche

(a) jedem n-stelligen Relationssymbol $R \in \Sigma$ einen Ausdruck $H_R(x_1, \ldots, x_n) \in L_{\Sigma'}$ mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$,

(b) dem Symbol "$=$" von L_Σ einen Ausdruck $H_=(x_1, x_2)$ mit den freien Variablen x_1, x_2,

(c) dem leeren Symbol von Σ einen Ausdruck $P(x_1) \in L_{\Sigma'}$ mit der freien Variablen x_1 zuordnet.

H_R heißt der *R definierende Ausdruck*, $H_=$ *der die Identität von* L_Σ *definierende Ausdruck* und $P(x_1)$ heißt das *Relativierungsprädikat*.

Sei K' eine Klasse von Σ'-Strukturen N, so daß $\varrho_N H_=$ eine Kongruenzrelation bezüglich der Relationen $\varrho_N H_R$ in dem auf $\varrho_N P$ eingeschränkten Teilbereich des Individuenbereichs von N ist. Die durch Faktorisierung nach $\varrho_N H_=$ entstehende Struktur kann in natürlicher Weise als eine Σ-struktur M aufgefaßt werden und heißt das Σ-Redukt von N bezüglich δ, $M = \mathrm{red}_\delta N$.

Eine Klasse K von Strukturen der Signatur Σ heißt *modellinterpretierbar* in einer Klasse K' von Strukturen der Signatur Σ', wenn eine Explikation von L_Σ in $L_{\Sigma'}$ existiert, so daß

(i) jede Σ-Struktur M dem Σ-Redukt einer gewissen Σ'-Struktur $N \in K'$ isomorph ist,

(ii) für gewisses $A \in L_{\Sigma'}$ ist $K = \mathrm{red}_\delta(K' \cap \mathrm{Mod}\,A)$.

Ist K modellinterpretierbar in K', so existiert eine Übersetzung $\tau\colon L_\Sigma \to L_{\Sigma'}$ derart, daß $H \in \mathrm{Th}\,K \Leftrightarrow H^\tau \in \mathrm{Th}\,K'$. Ist δ in dem Sinne effektiv, daß zu vorgegebenem R der definierende Ausdruck effektiv angebbar ist, so ist auch die Übersetzung eine effektive Prozedur. Wenn wir dies zusätzlich voraussetzen, so ist offenbar $\mathrm{Th}\,K$ rekursiv entscheidbar, falls $\mathrm{Th}\,K'$ rekursiv entscheidbar ist und $\mathrm{Th}\,K'$ unentscheidbar, falls $\mathrm{Th}\,K$ unentscheidbar ist.

Eine Modellklasse K_0 der Signatur Σ_0 heißt *universell bezüglich Modellinterpretierbarkeit*, wenn für jede Signatur Σ die Klasse K_Σ aller Strukturen der Signatur Σ in K_0 modellinterpretierbar ist. Ist K_0 modellinterpretierbar in K_0', so ist mit K_0 auch K_0' universell.

Man sieht leicht ein, daß jede Erweiterungsklasse innerhalb derselben Signatur einer universellen Modellklasse wieder universell ist, daher ist ein Resultat über die Universalität einer Modellklasse K um so interessanter, je "enger" die Klasse K ist.

Es ist auch unschwer einzusehen, daß eine bezüglich Modellinterpretierbarkeit universelle Modellklasse K_0 eine Reduktionsklasse in dem in Abschnitt 1 genannten Sinne ist. Die Umkehrung dieses Sachverhalts braucht nicht zu gelten, auch dann nicht, wenn man die Betrachtung ganz auf höchstens abzählbare Modelle einschränkt.

Illustrieren wir diese Definitionen an einem Beispiel, welches zugleich für den Beweis von Theorem 2 von Nutzen ist.

In diesem und im folgenden Abschnitt seien Strukturen $\langle G, S\rangle$, wo S eine Menge von ungeordneten Paaren von Elementen aus G ist, *Graphen* genannt. S kann auch als irreflexiv-symmetrische Relation über G aufgefaßt werden.

Is $s = \{a, b\} \in S$, so heißt s eine mit den Punkten a, b *inzidierende Kante* und a, b heißen *adjazent*. G heißt *höchstens n-valent*, wenn jeder Punkt von G mit höchstens n Kanten inzidiert. G heißt n-regulär (n-valent), wenn jeder Punkt mit genau n Kanten inzidiert. Ein *Kreis* ist ein doppelpunktfreier geschlossener Kantenzug. Ein Graph G heißt 0-*separierbar*, wenn je zwei Kreise in G keinen gemeinsamen Punkt besitzen. 1-valente Punkte heißen *Endpunkte*. Es sei G^0 die Klasse der 0-separierbaren Graphen der Höchstvalenz 4, in denen jeder Punkt der Valenz $\geqslant 3$ mit zwei Endpunkten adjazent ist. Wir werden gleich zeigen, daß $E_{2,2}$ in G^0 modellinterpretierbar ist. Hieraus ergibt sich bereits die Entscheidbarkeit von $\mathrm{Th}\,E_{2,2}$, denn $\mathrm{Th}\,G^0$ ist als endliche Erweiterung der in [3] (Teil II) als endscheidbar nachgewiesenen Theorie der 0-separierbaren Graphen eine entscheidbare Theorie.

Ein gegebenes Modell $M = \langle M; R_0, R_1\rangle \in E_{2,2}$ können wir uns aus Teilen zusammengesetzt denken, wie sie (im Ausschnitt) in Fig. 1a angedeutet sind; vertikalen Kanten entsprechen (zweielementigen) R_0-Klassen, horizontalen R_1-Klassen. Wir beschreiben jetzt anschaulich die Konstruktion eines Graphen $\langle G, S\rangle \in G^0$, dessen $\{R_0, R_1\}$-Redukt bezüglich einer noch anzugebenden Explikation isomorph zur Ausgangsstruktur M sein wird.

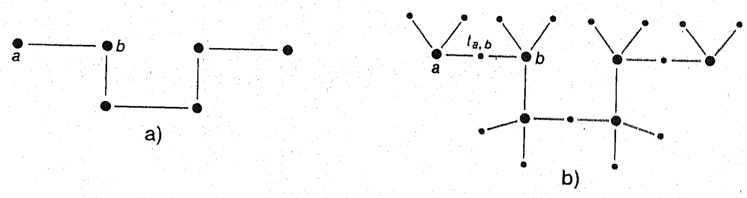

Fig. 1

Der Individuenbereich von $\langle G, S\rangle$ soll M umfassen, für jeden Punkt $a \in M$ zwei Hilfspunkte a', a'' und für jede Klasse $\{a, b\} \bmod R_1$ — anders ausgedrückt für jede R_1-Kante — einen Trennpunkt $t_{a,b}$. Die Punkte a', a'' werden durch eine S-Kante mit a verbunden; ferner führe eine S-Kante von a nach $t_{a,b}$ und von $t_{a,b}$ nach b, sofern $a \equiv b \bmod R_1$, $a \neq b$. Außerdem führe eine S-Kante direkt von a nach b, wenn $a \equiv b \bmod R_0$, $a \neq b$ (vgl. Fig. 1b). Man überlegt sich leicht, daß die so konstruierte Struktur $\langle G, S\rangle$ zu G^0 gehört.

Das Relativierungsprädikat, welches im vorliegenden Fall die Eigenschaft $x \in M$ für die Punkte von G beschreiben soll, ist der Ausdruck

"x_1 inzidiert mit genau zwei Endpunkten".

(Wir verwenden hier Anführungsstriche, um den Ausdruck nicht in extenso formal aufschreiben zu müssen.)

Die definierenden Ausdrücke für R_0, R_1 sind

$$\text{"}x_1 = x_2 \ \text{ oder } \ x_1 \neq x_2 \ \text{ und } \ \{x_1, x_2\} \in S\text{"}$$

beziehungsweise

$$\text{"}x_1 = x_2 \ \text{ oder } \ x_1 \neq x_2 \ \text{ und es existiert ein } y \text{ mit } \{x_1, y\}, \{y, x_2\} \in S\text{"}.$$

Die Identität von M wird durch die Identität in $\langle G, S\rangle$ übersetzt, doch kann dies auch überhaupt unterbleiben, wenn man voraussetzt, daß in $\mathrm{Th}\,E_{2,2}$ das Identitätssymbol gar nicht vorhanden ist.

Bei der Bildung des $\{R_0, R_1\}$-Reduktes ist im vorliegenden Falle keine Faktorisierung durchzuführen und man erkennt unmittelbar, daß dieses Redukt zur Ausgangsstruktur isomorph ist. Damit ist die Bedingung (a) in der Definition der Modellinterpretierbarkeit erfüllt, (b) ergibt sich leicht aufgrund der vorausgesetzten Eigenschaften von G^0.

3. Modellinterpretierbarkeit von G in E_2. Es sei G die Klasse aller Graphen $\langle G, S\rangle$, wobei jeder Punkt von G mit mindestens einer Kante inzidiert. In [4] (Theorem 2) ist gezeigt worden, daß $\langle G, S\rangle$ universell bezüglich Modellinterpretierbarkeit ist. Es wird jetzt gezeigt, daß G in E_2 modellinterpretierbar ist, folglich ist auch E_2 universell und damit wäre Theorem 1 bewiesen.

Sei $\langle G, S\rangle$ gegeben. Wir beschreiben wie eben die Konstruktion eines Modells $M = \langle M; R_0, R_1\rangle$, dessen $\{S\}$-Redukt isomorph zu $\langle G, S\rangle$ sein wird.

Sei $a \in G$ und S_a die Menge aller $s \in S$, die mit a inzidieren. Ferner sei $a_s = \langle a, s\rangle$. Von der Menge $\{a_s\colon s \in S\}$ sprechen wir als von der Menge der "Aufspaltungspunkte" des Punktes a. Der Individuenbereich M soll aus der Menge $\{a_s\colon a \in G,\ s \in S\}$ bestehen. Ferner sollen die Teilmengen $\{a_s\colon s \in S\}$ die sämtlichen Kongruenzklassen $\bmod R_1$ bilden, während die Klassen $\bmod R_0$ aus den Paaren $\{a_s, b_s\}$ mit $s = \{a, b\}$ bestehen sollen. Offenbar gehört das so konstruierte Modell zu E_2.

Wir definieren jetzt die Identität in $\langle G, S\rangle$ durch die Kongruenz $\bmod R_1$, d. h. $\langle G, S\rangle$ wird als Faktorstruktur des konstruierten Modells $\bmod R_1$ in Erscheinung treten.

Der Relation S wird der Ausdruck H_S =:

"Es existieren Elemente x_1', x_2' mit $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2' \bmod R_1$
und $x_1' = x_2' \bmod R_0$"

zugeordnet.

Das Relativierungsprädikat wird in diesem Falle durch das triviale Prädikat $x_1 R x_1$ festgelegt.

Der definierende Ausdruck für S garantiert, daß R_1 eine Kongruenzrelation bezüglich des durch H_S gegebenen Prädikates ist, und man sieht leicht, daß das $\{S\}$-Redukt von M isomorph zu $\langle G, S\rangle$ ist.

4. Modellinterpretierbarkeit von G_3 in $E_{2,3}$. In [3] (I, Theorem 5) wurde die rekursive Unentscheidbarkeit der Theorie $\mathrm{Th}\, G_3$ der Klasse G_3 der höchstens 3-valenten Graphen gezeigt, wobei auch jetzt wieder jeder Punkt von $\langle G, S\rangle$ mit mindestens einer Kante inzidiert ($\langle G, S\rangle$ enthält keine isolierten Punkte).

Zum Beweis von Theorem 2, dessen einer Teil bereits unter 2 gezeigt wurde, genügt es nun offenbar, die Klasse G_3 in $E_{2,3}$ zu interpretieren. Dies ist nun offensichtlich auf die gleiche Weise möglich, wie sie unter 3 beschrieben wurde, statt der Vervielfachung eines Punktes ist in diesem Falle lediglich eine Verdopplung oder Verdreifachung vorzunehmen. Eine Beschreibung der Details können wir uns aus Gründen der Analogie mit dem schon behandelten Fall ersparen.

Indes erfordert die in der Fußnote zu Theorem 2 gemachte Bemerkung eine zusätzliche Betrachtung. Zum Beweis der dort gemachten Behauptung würde es offenbar ausreichen, wenn man anstelle von G_3 die Klasse $\dot{G}_3$ der 3-regulären Graphen in dieser Konstruktion verwenden dürfte, denn jeder Punkt müßte dann exakt verdreifacht werden. Dies ist nun tatsächlich möglich, denn es gilt folgendes

Lemma. *G_3 ist in $\dot{G}_3$ modellinterpretierbar.*

Beweis. Es sei $\langle G, S\rangle$ gegeben. Wir konstruieren in kanonischer Weise einen Einbettungsgraphen $\langle G', S'\rangle \in \dot{G}_3$, innerhalb dessen $\langle G, S\rangle$ definierbar ist.

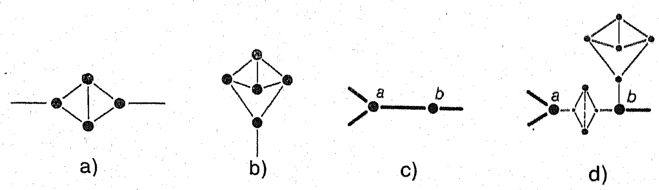

Fig. 2

Ein Graph mit zwei freien Kanten, wie er in Fig. 2a abgebildet ist, heiße eine *Brücke*, Graphen mit einer freien Kante gemäß Fig. 2b mögen *Drachen* genannt werden. An jeden Punkt $a \in G$ der Valenz n $(n < 3)$ werden nun $3-n$ Drachen angebunden, ferner wird jede S-Kante durch eine Brücke aus S'-Kanten ersetzt. Der so entstehende Graph gehört offenbar zu $\dot{G}_3$. Da G keine isolierten Punkte enthielt, gilt offenbar

$a \in G \Leftrightarrow$ "a ist mit einer Brücke verbunden; ist diese Brücke außerdem mit b verbunden, so ist $a \neq b$".

Ferner ist

$\{a, b\} \in S \Leftrightarrow$ "$a, b \in G$ und a, b sind durch eine Brücke verbunden, $a \neq b$".

Aus dem Dargelegten ergibt sich nun leicht der Beweis des Lemmas.

5. Unentscheidbarkeit von $E_{2,3}^{\mathrm{fin}}$. $E_{2,3}^{\mathrm{fin}}$ sei die Klasse der endlichen Modelle von $E_{2,3}$. Die Konstruktion in Abschnitt 4 zeigt, daß G_3^{fin} in $E_{2,3}^{\mathrm{fin}}$ modellinterpretierbar ist. Nun wurde in [5] die rekursive Unentscheidbarkeit von $\mathrm{Th}\, G_3^{\mathrm{fin}}$ gezeigt, folglich ist auch E^{fin} rekursiv unentscheidbar, mehr noch, diese Theorie ist auch nicht rekursiv aufzählbar, weil nämlich eine rekursive Aufzählung von $E_{2,3}^{\mathrm{fin}}$ existiert und jede in $\mathrm{Th}\, E_{2,3}^{\mathrm{fin}}$ widerlegbare Aussage bereits durch ein Modell aus $E_{2,3}^{\mathrm{fin}}$ widerlegbar ist. Da $\mathrm{Th}\, E_{2,3}^{\mathrm{fin}}$ eine endliche Erweiterung von $\mathrm{Th}\, E^{\mathrm{fin}}$ ist, gilt dasselbe Resultat auch für $\mathrm{Th}\, E^{\mathrm{fin}}$.

Anderseits kann nachgewiesen werden, daß die Theorie von $G^{0\,\mathrm{fin}}$ rekursiv entscheidbar ist und wegen der Modellinterpretierbarkeit von $E_{2,2}^{\mathrm{fin}}$ in $G^{0\,\mathrm{fin}}$ ergibt sich die rekursive Entscheidbarkeit von $\mathrm{Th}\, E_{2,2}^{\mathrm{fin}}$.

Literatur

[1] A. Janiczak, *Undecidability of some simple formalized theories*, Fund. Math. 40 (1953), S. 131–139.

[2] H. Rogers, *Certain logical reduction and decision problems*, Ann. of Math. 64 (1956), S. 264–284.

[3] K. Hauschild, W. Rautenberg und H. Herre, *Interpretierbarkeit und Entscheidbarkeit in der Graphentheorie I+II*, Zeitschr. Math. Logik u. Grundl. Math. 17 (1971), S. 42–55, 18 (1972), S. 457–480.

[4] — — *Interpretierbarkeit in der Gruppentheorie*, Algebra Universalis 1 (1971), S. 136–151.

[5] H. Herre, *Unentscheidbarkeit der Theorie der endlichen planaren Graphen*, to appear.

[6] I. Korec, M. G. Peretiatkin and W. Rautenberg, *Definability in structures of finite valency*, to appear in Fund. Math.

Reçu par la Rédaction le 31. 8. 1972