a subcontinuum of K containing two of them then $d_n(x, f_n^m(H)) < e_0$ for each x in $f_n^m(K)$; suppose this is not the case. For each positive integer i, let K_i be a subcontinuum of X_m such that if a, b, and c are three points of K_i then there is a subcontinuum H of K_i containing two of them such that there is a point x of $f_n^m(K_i)$ with $e-1/i \leqslant d_n(x, f_n^m(H))$. Some subsequence of $K_1, K_2, \ldots$ converges to a subcontinuum K_0 of X_m; for notational convenience, we assume that $K_1, K_2, \ldots$ converges to K_0. There are three points a_0, b_0, and c_0 of K_0 such that if H is a subcontinuum of K_0 containing two of them then $d_n(x, f_n^m(H)) < e$ for each x in $f_n^m(K_0)$. Taking subsequences and changing notation, we have sequences a, b, and c of points and a sequence H of continua such that, for each i, a_i, b_i, and c_i are points of K_i and H_i is a subcontinuum of K_i containing a_i and b_i such that there is a point p_i in K_i with $e-1/i \leqslant d_n(f_n^m(p_i), f_n^m(H_i))$ and such that $a_1, a_2, \ldots$ converges to a_0, etc., $H_1, H_2, \ldots$ converges to a subcontinuum H_0 of K_0, and $p_1, p_2, \ldots$ converges to a point p_0 of K_0. Note that H_0 is a subcontinuum of K_0 containing a_0 and b_0. But the fact that $d_n(f_n^m(p_i), f_n^m(H_i))$ is at least $e-1/i$ for each i implies that $d_n(f_n^m(p_0), f_n^m(H_0))$ is at least e, a contradiction.

To show that $g_1^2, g_2^3, \ldots$ is in the interior of B_{en} it remains to show that if $r(g_1^2, g_2^3, \ldots, h_1^2, h_2^3, \ldots)$ is sufficiently small then h_n^m differs from g_n^m at each point by less than $(e-e_0)/2$. We omit the proof of this.

We now have that for each positive integer n and positive number e, B_{en} is a dense open subset of S. Since S is complete, the intersection of all the sets B_{en} for e a positive rational number and n a positive integer is a dense inner limiting subset of S; but according to Theorem 4, this intersection is A.

References

[1] R. H. Bing, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pacific J. Math. 1 (1951), p. 43.

[2] S. Mazurkiewicz, *Sur les continus absolument indecomposable*, Fund. Math. 16 (1930), pp. 151–159.

[3] R. H. Sorgenfrey, *Concerning continua irreducible about n points*, Amer. J. Math. 68 (1946), p. 667.

Reçu par la Rédaction le 12. 6. 1972

О мощности открытых покрытий топологических пространств

Н. В. Величко (Свердловск)

Резюме. Устанавливаются оценки мощности открытых покрытий топологических пространств. Для этой цели используются инварианты: $c(X)$ — число Суслина, $cc(X)$ — наследственное число Суслина, $c_0(X) = \sup|\eta|$: η — дискретное семейство открытых в X множеств.

1) Если γ — локально $c(X)$ — кратное покрытие X, то $|\gamma| \leqslant c(X)$.

2) Если γ — локально конечное покрытие X, то $|\gamma| \leqslant c_0(X)$.

3) Если γ — точечно конечное покрытие совершенного пространства X, то $|\gamma| \leqslant cc(X)$.

4) Если γ — σ-точечно конечное покрытие бэровского пространства X, то $|\gamma| \leqslant c(X)$.

Среди других результатов отметим следующий:

5) Бэровское σ-пространство обладает плотным метризуемым подпространством.

Устанавливаются оценки мощности открытых покрытий топологических пространств. Для этой цели используются некоторые кардинально-значные инварианты пространств такие, как $c(X)$, $d(X)$, $ic(X)$. Вопросы подобного характера рассматривались и ранее, назовем для примера следующие факты:

1) Если γ — точечно счетное открытое покрытие пространства X, то $|\gamma| \leqslant s(X)$.

2) Если γ — точечно счетная база счетно компактного хаусдорфова пространства, то $|\gamma| \leqslant \aleph_0$.

3) Если γ — σ-дизъюнктное открытое покрытие X, то $|\gamma| \leqslant c(X)$.

Здесь и далее:

$|\gamma|$ — мощность семейства γ,

$s(X) = \min|S|$: S плотно в X,

$c(X) = \sup|\gamma|$: γ — дизъюнктное семейство открытых в X множеств.

Все кардинальные числа предполагаются бесконечными, все семейства и покрытия открытыми, если не оговаривается противное. На пространства налагается аксиома отделимости T_1.

Типичные обозначения:

$[A]$ — замыкание множества A,

$\langle A\rangle$ — внутренность A,
$\tilde{\gamma} = \bigcup\{H\colon H \in \gamma\}$ — тело семейства γ,
τ^{+} — кардинал, непосредственно следующий за τ,
$\emptyset$ — пустое множество.

1. Локально конечные и локально τ-кратные семейства. Семейство $\gamma = \{P\}$ будем называть *локально τ-кратным (в себе)*, если у каждой точки $x \in X$ $(x \in \tilde{\gamma})$ найдется окрестность Ox, пересекающаяся не более чем с τ элементами γ. Семейство γ назовем *σ-локально-τ-кратным (в себе)*, если $\gamma = \bigcup\limits_n \gamma_n$ и γ_n локально τ-кратно (в себе).

Пространство X назовем *τ-стойким ($\sigma\tau$-стойким)*, если всякое открытое покрытие X имеет локально τ-кратное (σ-локально-τ-кратное в себе) открытое измельчение.

При $\tau = \aleph_0$ будем называть τ-стойкое ($\sigma\tau$-стойкое) пространство *стойким (σ-стойким)*.

Теорема 1. *Если γ — локально $c(X)$-кратное в себе семейство, то $|\gamma| \leqslant c(X)$.*

Доказательство. Так как $\tilde{\gamma}$ открыто в X, то $c(\tilde{\gamma}) \leqslant c(X)$. Выберем произвольно точку $x_1 \in \tilde{\gamma}$ и ее окрестность P_1, пересекающуюся не более чем с $c(X)$ элементами γ. По индукции построим максимальную последовательность пар $\{X_\alpha, P_\alpha\}$ такую, чтобы выполнялись условия:

1) P_α — окрестность $x_\alpha \in \tilde{\gamma}$, пересекающаяся не более чем с $c(X)$ элементами γ,

2) $P_\alpha \subseteq \bigcup\{H\colon H \cap (\bigcup P_\beta\colon \beta < \alpha) = \emptyset,\ H \in \gamma\}$.

Семейство $\{P_\alpha\}$ дизъюнктно, что следует из 2, поэтому $|\{P_\alpha\}| \leqslant c(\tilde{\gamma})$. Каждое $H \in \gamma$ пересекается с некоторым P_α в силу максимальности $\{x_\alpha, P_\alpha\}$. Тогда в силу 1:

$$|\gamma| \leqslant |\{P_\alpha\}|^2 = |\{P_\alpha\}| \leqslant c(X)\,.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает ряд любопытных следствий.

Следствие 1. *Всякое $\sigma c(X)$-стойкое пространство $(\infty, c(X)^{+})$-компактно.*

Пространство X называется *(∞, τ)-компактным*, если всякое открытое покрытие X содержит подпокрытие мощности $< \tau$.

Пространство X удовлетворяет *условию Суслина*, если $c(X) \leqslant \aleph_0$.

Следствие 2. *Всякое σ-стойкое пространство, удовлетворяющее условию Суслина, финально компактно.*

Более общее утверждение:

Следствие 3. *Всякое σ-локально счетное (в себе) покрытие пространства, удовлетворяющего условию Суслина, счетно.*

Отсюда вытекает

Следствие 4. *Пространство с σ-локально счетной (в себе) базой, удовлетворяющее условию Суслина, обладает счетной базой.*

В частности

Следствие 5. *Регулярное пространство с σ-локально счетной (в себе) базой, удовлетворяющее условию Суслина, метризуемо.*

Из следствий 2 и 3 вытекает

Следствие 6. *σ-стойкое пространство, локально удовлетворяющее условию Суслина, распадается в дискретную сумму финально компактных пространств.*

Доказательство. Пусть $\gamma = \bigcup\limits_n \gamma_n = \{H\}$ — σ-локально счетное в себе открытое покрытие X такое, что всякое множество $H \in \gamma$ удовлетворяет условию Суслина. По следствию 2 каждое множество $[H]$ финально компактно. Из следствия 3 вытекает, что γ звездно счетно. По теореме из [8] γ распадается на счетные семейства γ_α такие, что $\tilde{\gamma}_\alpha$ открыто-замкнуто и $\tilde{\gamma}_\alpha \cap \tilde{\gamma}_\beta = \emptyset$ при $\alpha \neq \beta$. Ясно, что $\tilde{\gamma}_\alpha$ финально компактно.

В частности

Следствие 7. *Регулярное σ-стойкое пространство, локально удовлетворяющее условию Суслина, сильно паракомпактно.*

Из следствий 5 и 6 вытекает

Следствие 8. *Регулярное пространство с σ-локально счетной базой, локально удовлетворяющее условию Суслина, метризуемо.*

Положим $ic(X) = \min \tau^{+}\colon X$ — (∞, τ) -компактно [2].

В связи с теоремой 1 отметим следующий элементарный факт:

Предложение 1. *Если γ — покрытие локальной кратности $\leqslant ic(X)$, то $|\gamma| \leqslant ic(X)$.*

Положим $c_0(X) = \sup|\eta|\colon \eta$ — дискретное семейство открытых в X множеств.

Теорема 2. *Если γ — локально конечное покрытие пространства X, то $|\gamma| \leqslant c_0(X)$.*

Доказательство. Пусть $\gamma = \{H_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Пусть $\mathcal{K} = \{K\}$ — совокупность всех конечных подмножеств из Λ. Для каждого $K \in \mathcal{K}$ определяем открытое множество

$$l(K) = \bigcap \{H_\alpha\colon \alpha \in K\} \setminus \bigcup\{[H_\alpha]\colon \alpha \notin K\}\,.$$

Пусть γ_r — совокупность всех непустых множеств $l(K)$ таких, что $|K| = r$, где $r = 1, 2, \ldots$ Положим $\gamma_0 = \bigcup\limits_r \gamma_r$. Докажем, что γ_r — дискретное семейство. Ясно, что γ_r дизъюнктно. Поэтому достаточно доказать, что γ_r локально конечно.

Пусть $x \in X$ — произвольная точка, $\{H_\alpha: \alpha \in K\}$ — все элементы из γ такие, что $x \in [H_\alpha]$. Положим

$$Ox = X \setminus \bigcup \{[H_\alpha]: \alpha \notin K\}.$$

Рассмотрим два случая.

1) $|K| < r$.

Если $l(K_1) \in \gamma_r$, то найдется $\alpha_0 \in K_1 \setminus K$, и так как $l(K_1) \subseteq H_{\alpha_0} \subseteq [H_{\alpha_0}] \subseteq \subseteq X \setminus Ox$, то $Ox \cap \tilde{\gamma}_r = \emptyset$.

2) $|K| \geqslant r$.

Если $l(K_2) \in \gamma_r$ таково, что $K_2 \setminus K \neq \emptyset$, то ясно, что $l(K_2) \cap Ox = \emptyset$. Так как K имеет только конечное число подмножеств мощности r, то Ox может пересекаться только с конечным числом элементов γ_r.

Этим доказано, что γ_r дискретно. Тогда $|\gamma_r| \leqslant c_0(X)$ и $|\gamma_0| \leqslant c_0(X)$.

Докажем, что $|\gamma_0| = |\gamma|$.

Каждому $l(K) \in \gamma_0$ поставим в соответствие семейство

$$T(K) = \{H_\alpha: \alpha \in K\}.$$

Положим

$$\gamma' = \bigcup \{T(K): l(K) \in \gamma_0\} = \{H_\alpha: \alpha \in K, l(K) \in \gamma_0\}.$$

Тогда $\gamma' \subseteq \gamma$ и $|\gamma'| = |\gamma_0|$, так как отображение $T: \gamma_0 \to \gamma'$ конечнократно. Докажем, что $|\gamma'| = |\gamma|$.

Пусть $H_\beta \in \gamma$, $x \in H_\beta$. Пусть K таково, что $x \in [H_\alpha]$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in K$. Положим

$$M_0 = H_\beta \setminus \bigcup \{[H_\alpha]: \alpha \notin K\}.$$

Тогда M_0 — окрестность точки x. Если $M_0 \subseteq [H_\alpha]$ для каждого $\alpha \in K$, то ясно, что $l(K) \neq \emptyset$, а так как $\beta \in K$, то $H_\beta \in T(K) \subseteq \gamma'$.

Пусть найдется $\alpha_1 \in K$ такое, что $M_1 = M_0 \setminus [H_{\alpha_1}] \neq \emptyset$. Тогда или $H_\beta \in T(K_1) \subseteq \gamma'$, где $K_1 = K \setminus \{\alpha_1\}$, или найдется $\alpha_2 \in K$ такое, что $M_2 = M_1 \setminus [H_{\alpha_2}] \neq \emptyset$. Для некоторого $m \leqslant |K| - 1$ должно выполняться: $H_\beta \in T(K_m) \subseteq \gamma'$, где $K_m = K \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$. Следовательно, $H_\beta \in \gamma'$ и $\gamma' \equiv \gamma$. Окончательно:

$$|\gamma| = |\gamma'| = |\gamma_0| \leqslant c_0(X).$$

Теорема доказана.

2. Точечно конечные покрытия совершенных и бэровских пространств. Положим $d(X) = \sup |P|$: P дискретно в X (множество A дискретно в X тогда и только тогда, когда всякое подмножество A замкнуто в X).

Согласно [9] пространство X будем называть *совершенным*, если всякое замкнутое множество в X имеет тип G_δ.

Теорема 3. *Пусть γ — точечно конечное покрытие совершенного пространства X. Тогда $|\gamma| \leqslant d(X)$.*

Доказательство. Пусть $\gamma = \{H_\alpha: \alpha \in A\}$. Пусть $\mathcal{M} = \{K\}$ — совокупность всех конечных подмножеств A. Для каждого $K \in \mathcal{M}$ определяем множество

$$t(K) = \bigcap \{H_\alpha: \alpha \in K\} \setminus \bigcup \{H_\alpha: \alpha \notin K\}.$$

Пусть γ_r — совокупность непустых множеств $t(K)$ при $|K| = r$. Ясно, что $\gamma_0 = \bigcup_r \gamma_r$ — покрытие X. Так как γ_1 дискретно, то $|\gamma_1| \leqslant d(X)$. Далее, $\tilde{\gamma}_1 = \bigcap_n G_{1n}$, где множества G_{1n} открыты в X. Положим

$$\gamma_{2n} = \{t(K) \setminus G_{1n}: t(K) \in \gamma_2\}.$$

Семейство γ_{2n} дискретно, поэтому $|\gamma_{2n}| \leqslant d(X)$, а так как $\bigcup_n \gamma_{2n} = \gamma_2$, то $|\gamma_2| \leqslant d(X)$. Продолжая по индукции, получим: $|\gamma_r| \leqslant d(X)$ для каждого r, следовательно, $|\gamma_0| \leqslant d(X)$. С другой стороны, $t(K) \to \{H_\alpha: \alpha \in K\}$ — конечнократное отображение γ_0 на γ, что легко проверяется. Следовательно,

$$|\gamma_0| = |\gamma|, \quad |\gamma| \leqslant d(X).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если γ — точечно конечное покрытие совершенно нормального финально компактного пространства, то $|\gamma| \leqslant \aleph_0$.*

Пространство X называется *$\aleph_1$-компактным*, если всякое несчетное множество имеет в X предельную точку.

Следствие 1 обобщается следующим образом:

Следствие 2. *Если γ — точечно конечное покрытие совершенного $\aleph_1$-компактного пространства, то $|\gamma| \leqslant \aleph_0$.*

В частности:

Следствие 3. *Совершенное слабо паракомпактное $\aleph_1$-компактное пространство финально компактно.*

Аналогично следствию 6 теоремы 1 доказывается

Следствие 4. *Всякое слабо паракомпактное совершенное локально $\aleph_1$-компактное пространство распадается в дискретную сумму финально компактных пространств.*

В частности:

Следствие 5. *Регулярное слабо паракомпактное совершенное локально $\aleph_1$-компактное пространство сильно паракомпактно.*

Следствия 3-5 вытекают также из результата Б. Шапировского [10], а для локально бикомпактных пространств доказаны в только что вышедшей работе [3].

Пространство X называется *бэровским*, если всякое открытое множество в X имеет вторую категорию.

Пусть γ — семейство множеств. Обозначим через $\mathfrak{L}(\gamma)$ множество точек локальной конечности

Имеет место

Теорема 4. *Бэровские пространства характеризуются следующим свойством*

(B) *Если γ — точечно конечное покрытие X, то $\mathfrak{L}(\gamma)$ плотно (и открыто) в X.*

Если в пространстве X существует открытое множество P такое, что $P=\bigcup\limits_n F_n$, множества F_n замкнуты и нигде не плотны в P, то положив $S_0=X$, $S_n=P\setminus\bigcup\limits_{i\leqslant n}F_i$, получим точечно конечное открытое покрытие $\gamma=\{S_i\}$ пространства X, для которого $\mathfrak{L}(\gamma)\cap P=\emptyset$.

Доказательство обратного утверждения опускается, так как будет доказано более общее утверждение. Для его формулировки требуются некоторые новые понятия.

Семейство γ называется *дискретным относительно множества* $A\subseteq X$, если всякая точка $x\in A$ имеет окрестность в X, пересекающуюся не более чем с одним элементом γ. Покрытие γ (не обязательно открытое) пространства X назовем *замкнутым слабо σ-дискретным*, если $\gamma=\bigcup\limits_n\gamma_n$ и γ_n замкнуто и дискретно относительно множества $X\setminus\bigcup\limits_{i<n}\gamma_i$.

Согласно этому определению семейство γ_1 замкнуто и дискретно в X. Положим $\gamma^0=\{\langle P\rangle\colon P\in\gamma\}$.

Предложение 2. *Пусть γ — замкнутое слабо σ-дискретное покрытие бэровского пространства X. Тогда γ^0 плотно в X.*

Доказательство. Пусть $\gamma=\bigcup\limits_n\gamma_n$, где γ_n замкнуто и дискретно относительно множества $X\setminus\bigcup\limits_{i<n}\gamma_i$. Положим

$$T_n=\bigcup_{i\leqslant n}\tilde{\gamma}_i\,.$$

Множество T_n замкнуто в X и $X=\bigcup\limits_n T_n$. Предположим от противного, что $H=X\setminus[\tilde{\gamma}^0]\neq\emptyset$. Так как $H=\bigcup\limits_n(T_n\cap H)$ и H имеет вторую категорию, то найдется первое r такое, что $\langle T_r\cap H\rangle=\Gamma\neq\emptyset$. Так как $M=\Gamma\setminus(T_{r-1}\cap H)\neq\emptyset$, то найдется $P\in\gamma_r$ такое, что $\langle P\rangle\neq\emptyset$ — достаточно взять любое множество P из γ_r, пересекающееся с M. Это означает, что $M\cap\tilde{\gamma}^0\neq\emptyset$. Противоречие.

Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть γ — точечно конечное семейство в бэровском пространстве X. Тогда $\mathfrak{L}(\gamma)$ плотно в $\tilde{\gamma}$.*

Доказательство. Положим $Y=\tilde{\gamma}$. Тогда Y — бэровское пространство, а $\gamma=\{H_\alpha\colon\alpha\in K\}$ — открытое покрытие Y. Определяем γ_r как при доказательстве теоремы 3. Тогда $\eta=\bigcup\limits_r\gamma_r$ — замкнутое слабо σ-дискретное покрытие Y, что легко проверяется. По предложению 2 множество $\tilde{\eta}^0$ плотно в Y. Пусть $x\in\tilde{\eta}^0$. Тогда $x\in\langle t(K)\rangle$ для некоторого $t(K)\in\eta$ (см. доказательство теоремы 3). Положим $Ox=\langle t(K)\rangle$. Ясно, что $Ox\cap H_\alpha=\emptyset$ при $\alpha\notin K$. Таким образом, γ локально конечно в точках множества $\tilde{\eta}^0$.

Предложение доказано.

Семейство γ называется *почти покрытием* пространства X, если $X=[\tilde{\gamma}]$.

Предложение 4. *Пусть γ-точечно конечное покрытие бэровского пространства X. Тогда в γ можно вписать σ-дискретное в себе почти покрытие X.*

Предложение 4 можно вывести из предложения 3.

Построенная техника позволяет доказать следующую теорему 5, которая (как и ее следствия) несколько уточняет результаты работы [10].

Теорема 5. *Если γ — σ-точечно конечное покрытие бэровского пространства X, то $|\gamma|\leqslant c(X)$.*

Доказательство. Пусть $\gamma=\bigcup\limits_n\gamma_n$, γ_n точечно конечно. Из предложения 3 можно вывести, что $\bigcup\limits_n\mathfrak{L}(\gamma_n)=N$ плотно и открыто в X. Следовательно, $c(N)\leqslant c(X)$. Положим

$$\gamma'=\{H\cap N\colon H\in\gamma\}\,.$$

По теореме 1 $|\gamma'|\leqslant c(N)$. Но $|\gamma'|=|\gamma|$, следовательно, $|\gamma|\leqslant c(X)$. Теорема доказана.

Следствие *Слабо паракомпактное бэровское пространство, удовлетворяющее услоі Суслина, финально компактно.*

Более общие утверждения:

Следствие 2. *Слабо паракомпактное бэровское пространство $(\infty, c(X)^+)$-компактно.*

Следствие 3. *Слабо паракомпактное бэровское пространство X, локально удовлетворяющее условию Суслина, является дискретной суммой финально компактных пространств, и если X регулярно, то оно сильно паракомпактно.*

Теорема 5 будет неверной, если X не предполагать бэровским пространством.

Действительно, пусть $X=\sigma\prod\limits_{\alpha\in M}R_\alpha$ — σ-произведение несчетного семейства числовых прямых R_α, т. е., подпространство тихоновского произведения $\prod\{R_\alpha\colon \alpha\in M\}$, состоящее из точек, ненулевые координаты которых образуют конечное или пустое множество. Такое пространство удовлетворяет условию Суслина. Положим

$$P_\alpha = \big((1,2)\times\prod\{R_\beta\colon \beta\neq\alpha\}\big)\cap X, \quad \alpha\in M,$$

где $(1,2)$ — числовой интервал. Семейство $\{P_\alpha\colon \alpha\in M\}$ точечно конечно, но несчетно.

Из предложений 2-4 вытекает и другая группа результатов.

Регулярное пространство, обладающее σ-локально конечной сетью, называется *σ-пространством* [6]. Такое пространство обладает σ-дискретной сетью [7].

Теорема 6. *Бэровское σ-пространство обладает плотным метризуемым подпространством.*

Доказательство. Пусть $\gamma=\bigcup_n\gamma_n$ — σ-дискретная замкнутая сеть. Положим $P_n = X\setminus\tilde{\gamma}_n$ и $G_n = P_n\cup\tilde{\gamma}_n^0$. Тогда G_n открыто и плотно в X. Положим $M=\bigcap_n G_n$. Так как X — бэровское пространство, то M плотно в X. Положим $\sigma_n=\{P_n\}\cup\gamma_n^0$. Семество σ_n локально конечно в X и покрывает M. Докажем, что $\sigma=\bigcup_n\sigma_n$ — (внешняя) база M. Пусть $x\in M$, Ox — произвольная окрестность точки x в X. Найдется $F\in\gamma_n$ такое, что $x\in F\subseteq Ox$. Тогда $x\notin P_n$. Следовательно, $x\in\langle F\rangle$, так как $x\in\sigma_n$ и $x\notin F'\in\gamma_n$ при $F'\neq F$. Пространство M метризуемо как обладающее σ-локально конечной базой.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Регулярное бэровское пространство с измельчающейся последовательностью покрытий обладает плотным метризуемым подпространством.*

Такое пространство обладает σ-дискретной сетью (см., например, [1]). В частности:

Следствие 2. *Регулярное бэровское пространство с равномерной базой обладает плотным метризуемым подпространством.*

Используя предложение 4, можно вывести следующее утверждение:

Теорема 7. *Регулярное бэровское пространство с σ-точечно конечной базой обладает плотным метризуемым подпространством.*

Доказывается аналогично теореме 6.

3. Мощность системы минимальных конечных покрытий элементами точечно конечного семейства. Напомним следующую фундаментальную теорему, принадлежащую А. Мищенко [4]:

Если γ — точечно счетное покрытие пространства X, то семейство всех конечных минимальных покрытий X элементами γ счетно.

Покрытие *минимально* тогда и только тогда, когда оно не содержит собственного подпокрытия.

Теорему Мищенко можно уточнить, если рассматривать точечно конечные покрытия бикомпактных пространств.

Введем некоторые вспомогательные понятия.

Пусть γ — точечно конечное покрытие пространства X. Для каждой точки $x\in X$ определяем множество

$$Vx=\bigcap\{H\colon H\in\gamma,\ H\ni x\}.$$

Положим

$$v(\gamma)=\{Vx\colon x\in X\}.$$

Кратность семейства γ в точке x будем называть также кратностью Vx, запись $krVx$. Семейство $\gamma'\subseteq\gamma$ будем называть *характером* γ (в X), если всякое конечное минимальное покрытие $\omega\subseteq\gamma$ пространства X содержится в γ'.

Ясно, что γ является характером самого себя.

Теорема 8. *Пусть γ — точечно конечное покрытие бикомпактного пространства X. Тогда множество всех конечных минимальных покрытий X элементами γ конечно (или, что эквивалентно, γ обладает конечным характером в X).*

Теорема 8 вытекает из нижеследующего утверждения.

Теорема 9. *Пусть γ — точечно конечное покрытие пространства X. Если покрытие $v(\gamma)$ содержит конечное подпокрытие X, то γ обладает конечным характером в X.*

Доказательство. Пусть γ_r определено также как при доказательстве теоремы 3. Заметим, что $Vx\cap\tilde{\gamma}_1=\emptyset$, если $krVx>1$. Если $krVx=1$, то $Vx\cap\tilde{\gamma}_1=t(K)$, $K=\{\alpha_0\}$ и $Vx=H_{\alpha_0}$. Так как X покрывается конечным числом элементов $v(\gamma)$, то γ_1 конечно. Положим

$$\sigma_1=\{H\colon H\in\gamma,\ H\cap\tilde{\gamma}_1\neq\emptyset\}.$$

Ясно, что:

1) $\tilde{\sigma}_1=\bigcup\{Vx\colon krVx=1\}$.

2) σ_1 — единственное конечное покрытие $\tilde{\gamma}_1$.

Положим $P_1=\tilde{\sigma}_1$.

Переходим к γ_2.

Положим

$$\gamma_2'=\{t(K)\setminus P_1\colon t(K)\setminus P_1\neq\emptyset,\ |K|=2\}.$$

Из свойства (1) семейства σ_1 и определения P_1 вытекает, что множество $\tilde{\gamma}_2'$ может пересекаться с элементами Vx кратности 2, и только такими. Тогда из посылок теоремы и определения $t(K)$ вытекает, что γ_2' конечно.

Положим
$$\sigma_2 = \{H\colon\ H \in \gamma,\ H \cap \tilde{\gamma}_2' \neq \emptyset\}\,.$$
Ясно, что
$$\sigma_2 = \{H_\alpha\colon\ \alpha \in K,\ (t(K)\setminus P_1) \in \gamma_2'\}\,,$$
следовательно, σ_2 конечно. Положим $T_2 = \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$. Пусть $\gamma' \subseteq \gamma$ — конечное покрытие T_2. Выбросим из него все элементы, не принадлежащие $\sigma_1 \cup \sigma_2$. Оставшиеся элементы снова будут покрывать T_2, что вытекает из свойства 2) семейства σ_1 и определения γ_2' и σ_2. Таким образом, $\sigma_1 \cup \sigma_2$ — характер γ относительно множества T_2. Пусть Ω_m, $m = 1, 2, \ldots, k$, есть совокупность всех конечных минимальных покрытий T_2 элементами γ. Положим $P_2 = \bigcap_m \tilde{\Omega}_m$. Тогда P_2 — окрестность множества T_2. Отметим, что
$$P_1 \cup P_2 = P_2 = \bigcup \{Vx\colon\ krVx \leqslant 2\}\,.$$
Действительно, если $krVx \leqslant 2$, то $x \in T_2$. Рассмотрим произвольное Ω_m. Найдется $H \in \Omega_m$, $H \in x$. Тогда $H \supseteq Vx$, следовательно, $\bigcup \{Vx\colon\ krVx \leqslant 2\} \subseteq P_2$.

Обратное включение (не принципиальное здесь) легко проверяется.

Теперь видно, что по индукции можно построить семейства
$$\gamma_n' = \{t(K)\setminus \bigcup_{i<n} P_i\colon\ |K| = n,\ t(K)\setminus \bigcup_{i<n} P_i \neq \emptyset\}\,,$$
$$\sigma_n = \{H\colon\ H \in \gamma,\ H \cap \tilde{\gamma}_n' \neq \emptyset\}\,,$$
и открытые множества P_n:
$$P_n \supseteq T_n = \bigcup_{i\leqslant n} \tilde{\gamma}_i$$
так, чтобы выполнялись условия:

a) σ_i конечно для любого i,

b) $\bigcup_{i\leqslant n} \sigma_i$ — характер γ относительно T_n,

c) $P_n = \bigcup_{i\leqslant n} P_i = \bigcup \{Vx\colon\ krVx \leqslant n\}$,

d) $P_n = \bigcap \tilde{\Omega}_m^n$, где $\{\Omega_m^n\}$ — совокупность всех конечных минимальных покрытий множества T_n элементами γ.

Построение должно завершиться на некотором m. По другому, найдется m такое, что $X \equiv P_m$. Действительно, пусть $\{V(x_1), \ldots, V(X_k)\}$ — конечное покрытие X элементами $v(\gamma)$. Пусть
$$m = \max krV(x_j)\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k\,.$$
Если σ_m определено, то по c):
$$P_m = \bigcup \{Vx\colon\ krVx \leqslant m\}\,,$$
в частности,
$$P_m \supseteq \bigcup_{j\leqslant k} V(x_j) = X\,.$$

Положим $\gamma_0 = \bigcup_{i\leqslant m} \sigma_i$. Тогда γ_0 — конечный (по условию a) характер γ в X. Действительно, пусть $\omega \subseteq \gamma$ — произвольное конечное минимальное покрытие X. Тогда ω — покрытие T_m. Следовательно, ω содержит конечное минимальное покрытие ω' множества T_m. Тогда $\omega' \subseteq \gamma_0$ по условию b. Так как $\tilde{\omega}' \supseteq P_m$ по условию d, $P_m = X$, то ω' — покрытие X. Следовательно, $\omega' = \omega$.

Теорема доказана.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное дискретное пространство. Положим
$$P_n = \{x_n\}\,, \quad S_n = X\setminus \bigcup \{x_1, \ldots, x_n\}\,.$$
Тогда $\gamma = \{P_n, S_n\}$ — открытое точечно конечное покрытие X, характер которого бесконечен.

Рассмотрим теперь точечно счетные покрытия.

Скажем, что покрытие γ *принадлежит классу* S, если оно счетно на множестве точек счетной кратности γ.

Имеет место

Теорема 10. *Пространство X наследственно сепарабельно тогда и только тогда, когда всякое открытое покрытие X принадлежит классу S.*

Доказательство. Легко проверить, что если X наследственно сепарабельно, то всякое покрытие X (открытое) принадлежит классу S.

Пусть обратно, всякое открытое покрытие X принадлежит классу S. Докажем, что X наследственно сепарабельно. Достаточно показать, что X сепарабельно.

Положим $H_1 = X$ и выберем счетное множество $S_1 \subseteq H_1$. Пусть $\alpha < \omega_1$ и для каждого $\beta < \alpha$ построено непустое открытое множество H_β и счетное множество S_β такие, что:

1) $S_\beta \subseteq H_\beta$.

2) $H_\beta = X\setminus[\bigcup \{S_\gamma\colon\ \gamma < \beta\}]$.

Если $X\setminus[\bigcup \{S_\beta\colon\ \beta < \alpha\}] \neq \emptyset$, то положим $H_\alpha = X\setminus[\bigcup\{S_\beta\colon\ \beta < \alpha\}]$ и за S_α примем любое счетное подмножество H_α. Этот процесс должен завершиться на некотором $\alpha < \omega_1$. Действительно, в противном случае мы бы имели покрытие $\{H_\alpha\colon\ \alpha < \omega_1\}$ пространства X, точечно счетное на множестве $S = \bigcup \{[S_\alpha]\colon\ \alpha < \omega_1\}$, однако несчетное на этом множестве, что вытекает из 1 и 2.

Теорема доказана.

Отметим, что из условия

(C) *всякое точечно счетное открытое покрытие X счетно* не вытекает, что X сепарабельно. Действительно, условие (C) эквивалентно тому, что пара $(\aleph_0, \aleph_0)$ является калибром X в смысле работы [5]. Следовательно, любое произведение сепарабельных пространств обладает свойством (C). В некоторых моделях теории множеств свойство (C) эквивалентно условию Суслина.

Однако заметим, что справедливо следующее

Предложение 5. *Пусть X удовлетворяет первой аксиоме счетности и $s(X) \leqslant \aleph_1$. Тогда X сепарабельно тогда и только тогда, когда оно обладает свойством* (C).

Доказательство несложно.

Литература

[1] А. В. Архангельский, *Отображения и пространства*, УМН 21 (4) (1966), стр. 133–184.

[2] — *О мощности бикомпактов с первой аксиомой счетности*, ДАН СССР 187 (5) (1969), стр. 967–970.

[3] — *Свойство паракомпактности в классе совершенно нормальных локально бикомпактных пространств*, ДАН СССР 203 (6) (1972), стр. 1231–1234.

[4] А. С. Мищенко, *О пространствах с точечно счетной базой*, ДАН СССР 144 (5) (1962), стр. 985–988.

[5] — *Несколько теорем о произведении топологических пространств*, Fund. Math. 58 (1966), стр. 259–284.

[6] A. Okuyama, *Some generalizations of metric spaces, their metrization theorem and product spaces*, Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku A9 (1968), стр. 236–254.

[7] F. Siwiec and J. Nagata, *A note on nets and metrization*, Proc. Jap. Acad. 44 (1968), стр. 623–626.

[8] Ю. М. Смирнов, *О сильно паракомпактных пространствах*, ИАН СССР, сер. матем. 20 (1956), стр. 253–274.

[9] R. Heath and E. Michael, *A property of Sorgenfrey line*, Composito Math. 23 (1971), стр. 185–188.

[10] Б. Шапировский, *О дискретных подпространствах топологических пространств. Вес, теснота и число Суслина*, ДАН СССР 202 (4) (1972), стр. 779–782.

Reçu par la Rédaction le 20. 6. 1972

A universal separable metric locally finite-dimensional space

by

B. R. Wenner (Kansas City, Missouri)

Abstract. The author has previously defined a topological space to be *locally finite-dimensional* if every point has a neighborhood of finite covering dimension [cf. Pacific J. Math. 42 (1972), pp. 267–276]. In this communication we introduce a locally finite-dimensional subset of the Hilbert Cube in which every separable metric locally finite-dimensional space can be topologically embedded. From this it follows readily that every separable metric locally finite-dimensional space has a locally finite-dimensional complete extension.

By a space *universal in the class* $\mathcal{C}$ we shall understand a member of $\mathcal{C}$ in which every member of $\mathcal{C}$ can be topologically embedded (X is said to be *topologically embedded in* Y iff there exists a homeomorphism from X onto a subspace of Y). Well-known universal spaces have been obtained in the classes of separable metric n-dimensional spaces (by K. Menger [2] and G. Nöbeling [6]), separable metric countable-dimensional spaces (by J. Nagata [4]), and separable metric strongly countable-dimensional spaces (by J. Nagata [4] and Ju. M. Smirnov [7]), respectively. In this communication we shall describe a space universal in the class of separable metric locally finite-dimensional spaces.

The dimension of a space X will be denoted by $\dim X$, and will be interpreted as the covering dimension of Lebesgue [cf. 5]. A space X is said to be *locally finite-dimensional* iff every point of X has a finite-dimensional neighborhood. We denote the Hilbert Cube by I^∞, and for each $n = 1, 2, \ldots$ we define a subset

$$J_n = \{(x_i) \in I^\infty\colon\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1/n \text{ for } i = 1, \ldots, n, \text{ and } x_i = 0 \text{ for } i > n\},$$

and

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n .$$

Let q denote the origin of I^∞, and define $J^* = J - \{q\}$. The author has shown in an earlier work [8, Lemma 3] that J^* is locally finite-dimensional, and J^* is a separable metric space since it is a subset of I^∞. In order to