О метризации абелевых групп

В. К. Бельнов (Москва)

Abstract. The main results of the paper are the following theorems:

THEOREM 4. *Let G be an abelian group of the cardinality $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Then there are $2^{\mathfrak{m}}$ linearly ordered sets $M_s = \{\mu_s^a,\ a \in (0,1)\}$, $s \in S$, $|S| = 2^{\mathfrak{m}}$ of the metrizable topologies on G compatible with its group structure and such that:*

1) $\mu_s^{a_1} < \mu_s^{a_2}$, *if* $0 < a_1 < a_2 < 1$, $s \in S$;
2) *for every* $a_1, a_2 \in (0,1)$ *topologies* $\mu_{s_1}^{a_1}$ *and* $\mu_{s_2}^{a_2}$ *are noncompareable, if* $s_1 \neq s_2$;
3) $\dim(G, \mu_s^a) = 0$ *for every* $a \in (0,1)$ *and* $s \in S$.

THEOREM 5. *Let G be an abelian group, $|G| \geqslant \mathfrak{c}$ and let n be a non-negative integer. Then there is a family $\{\mu_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2^{\mathfrak{c}}$ of the metrizable topologies on G compatible with its group structure such that:*

1) *for every* $s \in S$ *the group* (G, μ_s) *is locally separable;*
2) *for every* $s \in S$, $\dim(G, \mu_s) = n$;
3) *for every* $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ *the groups* (G, μ_{s_1}) *and* (G, μ_{s_2}) *are non-gomeomorphic.*

THEOREM 6. *Let G be an abelian group, $|G| \geqslant \mathfrak{c}$. Then there is a family $\{\mu_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2^{\mathfrak{c}}$ of the metrizable topologies on G compatible with its group structure such that:*

1) *for every* $s \in S$ *the group* (G, μ_s) *is locally separable;*
2) *for every* $s \in S$ *the group* (G, μ_s) *is locally linearly connected;*
3) *for every* $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ *the groups* (G, μ_{s_1}) *and* (G, μ_{s_2}) *are non-gomeomorphic.*

Введение. Пусть G — абелева группа, которую можно представить в виде $G = \sum_{a \in A} Z_q^{(a)}$, где $Z_q^{(a)} = Z_q$ — копия циклической группы Z_q для любого $a \in A$ и $q \geqslant 2$ — фиксированное целое число. Пусть далее, x_a — некоторая образующая группы $Z_q^{(a)}$, $a \in A$ и $X = \{0\} \cup \bigcup_{a \in A} \{x_a\}$. Будем называть X *базой группы* G, а группу G будем называть *абелевой группой со слоем Z_q и базой X*. Если G — свободная абелева группа с базой X [2], то будем аналогично называть G *абелевой группой со слоем Z и базой X*.

Настоящая работа состоит из трех частей. В первой части работы доказывается ряд теорем об абелевых группах со слоем Z или Z_q. Результаты этой части работы носят в основном технический характер и далее используются для доказательства теорем третьей части работы. Самостоятельный интерес представляет следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X — метризуемое пространство и точка $x_0 \in X$. Рассмотрим абелеву группу G с базой X и слоем Z_n, $n \geqslant 2$, нулевым элементом* *которой является точка $x_0 \in X$. Тогда на группе G существует такая метризуемая топология ν, совместимая с групповой структурой G, что:*

1) *топология ν индуцирует на множестве X его первоначальную топологию;*

2) *множество X является замкнутым подмножеством метризуемой группы (G, ν).*

Во второй части работы строятся метризуемые топологии на произвольных бесконечных абелевых группах. Здесь доказывается следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть G — абелева группа мощности $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Тогда существует $2^{\mathfrak{m}}$ линейно упорядоченных множеств*

$$M_s = \{\mu_s^a,\ a \in (0,1)\}, \quad s \in S,\ |S| = 2^{\mathfrak{m}},$$

метризуемых топологий на группе G, совместимых с ее групповой структурой и таких, что:

1) $\mu_s^{a_1} < \mu_s^{a_2}$, *если* $0 < a_1 < a_2 < 1$, $s \in S$;

2) *каковы бы ни были $a_1, a_2 \in (0,1)$, топологии $\mu_{s_1}^{a_1}$ и $\mu_{s_2}^{a_2}$ несравнимы, если $s_1 \neq s_2$;*

3) $\dim(G, \mu_s^a) = 0$ *для любых* $a \in (0,1)$ *и* $s \in S$.

Основные результаты работы изложены в третьей части. Здесь рассматриваются абелевы группы мощности $\geqslant \mathfrak{c}$. На этот класс абелевых групп переносится ряд результатов работы [3] и первой части настоящей работы.

Теорема 5. *Пусть G — абелева группа, $|G| \geqslant \mathfrak{c}$, и пусть n — неотрицательное целое число. Тогда существует такое семейство $\{\mu_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2^{\mathfrak{c}}$, метризуемых топологий на группе G, совместимых с ее групповой структурой, что:*

1) *для любого $s \in S$ группа (G, μ_s) локально сепарабельна;*

2) *для любого $s \in S$, $\dim(G, \mu_s) = n$;*

3) *для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, группы (G, μ_{s_1}) и (G, μ_{s_2}) не гомеоморфны.*

Теорема 6. *Пусть G — абелева группа и пусть $|G| \geqslant \mathfrak{c}$. Тогда существует такое семейство $\{\mu_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2^{\mathfrak{c}}$, метризуемых топологий на группе G, совместимых с ее групповой структурой, что:*

1) *для любого $s \in S$ группа (G, μ_s) локально сепарабельна;*

2) *для любого $s \in S$ группа (G, μ_s) локально линейно связна;*

3) *для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, группы (G, μ_{s_1}) и (G, μ_{s_2}) не гомеоморфны.*

Интересно было бы выяснить, можно ли объединить теоремы 5 и 6, то есть построить на произвольной абелевой группе G с $|G| \geqslant \mathfrak{c}$ такую метризуемую топологию ν, совместимую с групповой структурой G, что группа (G, ν) локально линейно связна и $\dim G = n$, где $n > 0$ — заданное натуральное число.

I

Теорема 1. *Пусть X — метризуемое пространство и точка $x_0 \in X$. Рассмотрим абелеву группу G с базой X и слоем Z_n, $n \geqslant 2$, нулевым элементом которой является точка $x_0 \in X$. Тогда на группе G существует такая метризуемая топология ν, совместимая с групповой структурой G, что:*

1) *топология ν индуцирует на множестве X его первоначальную топологию;*

2) *множество X является замкнутым подмножеством метризуемой группы (G, ν).*

Доказательство. Пусть ϱ — некоторая метрика пространства X, совместимая с его топологией. Рассмотрим свободную абелеву группу G_0, базой которой является множество X и нуль которой совпадает с точкой $x_0 \in X$. Для каждого натурального числа m определим подмножество V_m группы G_0 следующим образом:

$$V_m = \left\{x - y \mid x, y \in X,\ \varrho(x,y) < \frac{1}{2^m}\right\}. \tag{1}$$

Пусть для произвольного набора $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ натуральных чисел множество $V_{(m_1, m_2, \ldots, m_s)} = V_{m_1} + V_{m_2} + \ldots + V_{m_s}$, где знак „+“ обозначает групповую операцию в группе G_0. Определим, наконец, для каждого натурального числа m множество

$$W_m = \bigcup_{\frac{1}{2^{m_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m_s}} < \frac{1}{2^m}} V_{(m_1, \ldots, m_s)}. \tag{2}$$

В этом определении объединение берется по всем конечным наборам $(m_1, \ldots, m_s)$ натуральных чисел, для которых

$$\frac{1}{2^{m_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m_s}} < \frac{1}{2^m}.$$

Из доказательства теоремы 1 работы [3] следует, что множества W_m, $m = 1, 2, \ldots$, образуют базис фильтра окрестностей нуля некоторой метризуемой топологии ν_0 группы G_0, совместимой с групповой структурой группы G_0, и такой, что:

1°) топология ν_0 индуцирует на множестве X топологию пространства (X, ϱ);

2°) множество X является замкнутым подмножеством метризуемой группы (G_0, ν_0).

Рассмотрим теперь подгруппу $G_0^{(n)}$ группы G_0, порожденную всеми элементами вида ng, $g \in G_0$. Покажем, что подгруппа $G_0^{(n)}$ является замкнутой подгруппой группы (G_0, ν_0). Допустим противное, тогда существует последовательность точек $\{ng_i\}$, $g_i \in G$, $i = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к точке

$g \in G_0 \setminus G_0^{(n)}$. Пусть $g = n_1x_1 + \ldots + n_kx_k$ и $g_i = m_1^{(i)}y_1^{(i)} + \ldots + m_{k_i}^{(i)}y_{k_i}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$ — однозначная запись элементов g и g_i через элементы множества $X \setminus x_0$. Выберем такое натуральное число e, что:

$$\frac{1}{2^e} < \min\Big(\min_{\substack{p \neq q \\ 1 \leqslant p, q \leqslant k}} \varrho(x_p, x_q), \min_{1 \leqslant p \leqslant k} \varrho(x_p, x_0)\Big). \tag{3}$$

Так как последовательность точек $\{ng_i\}$ сходится к точке g, существует такое натуральное число i_0, что при $i > i_0$, $g - ng_i \in W_e$. Последнее включение означает, что элемент $g - ng_i$ можно представить в виде

$$g - ng_i = \sum_{j=1}^{s} (\bar{x}_j - \bar{y}_j), \tag{4}$$

где элементы $\bar{x}_j, \bar{y}_j \in X$, $1 \leqslant j \leqslant s$, и

$$\sum_{j=1}^{s} \varrho(\bar{x}_j, \bar{y}_j) < \frac{1}{2^e}. \tag{5}$$

Далее, в силу того, что $g \notin G_0^{(n)}$, мы можем без ограничения общности считать, что $n_1 \not\equiv 0 \bmod n$. Рассмотрим множество $A_g = \{\bar{x}_j, \bar{y}_j;\ 1 \leqslant j \leqslant s\}$. Нетрудно показать, что элемент $x_1 \in A_g$. Действительно, в противном случае из равенства

$$\sum_{p=1}^{k} n_p x_p - n \sum_{q=1}^{k_i} m_q^{(i)} y_q^{(i)} = \sum_{j=1}^{s} (\bar{x}_j - \bar{y}_j) \tag{6}$$

следовало бы, что $n_1x_1 - nm_{q_0}^{(i)}y_{q_0}^{(i)} = 0$, где индекс q_0 выбран так, что $y_{q_0}^{(i)} = x_1$. Из этого равенства вытекает, что $n_1 = n \cdot m_{q_0}^{(i)}$, что противоречит соотношению $n_1 \not\equiv 0 \bmod n$. Полученное противоречие доказывает, что $x_1 \in A_g$.

Пусть $A(x_1)$ — минимальное подмножество множества A_g, обладающее следующими свойствами:

α) $x_1 \in A(x_1)$;

β) если элемент, $\bar{x}_j \in A(x_1)$, $1 \leqslant j \leqslant s$, то и элемент $\bar{y}_j \in A(x_1)$;

γ) если элемент $\bar{y}_j \in A(x_1)$, $1 \leqslant j \leqslant s$, то и элемент $\bar{x}_j \in A(x_1)$.

Покажем, что

$$n_1x_1 - n \sum_{q'} m_{q'}^{(i)} y_{q'}^{(i)} = \sum_{j'} (\bar{x}_{j'} - \bar{y}_{j'}), \tag{7}$$

где в первой и во второй сумме суммирование ведется по всем таким индексам q' и j', что $y_{q'}^{(i)}$ и $\bar{x}_{j'} \in A(x_1)$. Действительно, пусть

$$\sum_r m_r z_r = n \sum_{q'} m_{q'}^{(i)} y_{q'}^{(i)} + \sum_{j'} (\bar{x}_{j'} - \bar{y}_{j'})$$

однозначная запись выражения

$$n \sum_{q'} m_{q'}^{(i)} y_{q'}^{(i)} + \sum_{j'} (\bar{x}_{j'} - \bar{y}_{j'})$$

через элементы множества $X \setminus x_0$. Если для некоторого r элемент $z_r \neq x_1$, то так как $z_r \in A(x_1) \subseteq A_g$, из равенства (6) и определения множества $A(x_1)$ следует, что $z_r = x_p$ для некоторого p, $2 \leqslant p \leqslant k$. Покажем, что это равенство ведет к противоречию. В самом деле, так как элемент $z_r \in A(x_1)$, то из определения множества $A(x_1)$ вытекает, что существует такая цепочка $y_1, y_2, \ldots, y_t$ элементов множества A_g, что $y_1 = x_1$, $y_t = x_p$ и любая пара (y_i, y_{i+1}) соседних элементов этой цепочки совпадает либо с некоторой парой $(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$, $1 \leqslant j \leqslant s$, либо с парой $(\bar{y}_j, \bar{x}_j)$, $1 \leqslant j \leqslant s$, причем каждая пара $(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$ или $(\bar{y}_j, \bar{x}_j)$, $1 \leqslant j \leqslant s$ встречается в этой цепочке не более одного раза, и обе пары $(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$ и $(\bar{y}_j, \bar{x}_j)$ для каждого фиксированного j, $1 \leqslant j \leqslant s$, не могут одновременно входить в эту цепочку. Из этих условий и неравенств (3) и (5) следует, что

$$\varrho(x_1, z_r) \leqslant \sum_{i=1}^{t} \varrho(y_i, y_{i+1}) \leqslant \sum_{j=1}^{s} \varrho(\bar{x}_j, \bar{y}_j) < \frac{1}{2^e} < \varrho(x_1, x_p),$$

что, очевидно, противоречит равенству $z_r = x_p$. Итак, мы показали, что выражение

$$n \sum_{q'} m_{q'}^{(i)} y_{q'}^{(i)} + \sum_{j'} (\bar{x}_{j'} - \bar{y}_{j'})$$

из доказываемого равенства (7) можно привести к виду mx_1, где m — некоторое целое число. Из равенства (6) легко следует, что $m = n_1$. Таким образом, равенство (7) доказано.

Попутно мы показали, что ни для какого p, $2 \leqslant p \leqslant k$, элемент $x_p \notin A(x_1)$. Используя неравенство $\frac{1}{2^e} < \varrho(x_1, x_0)$, которое вытекает из неравенства (3), можно, дословно повторяя приведенные выше рассуждения, показать, что и элемент $x_0 \notin A(x_1)$.

Запишем теперь равенство (7) в виде

$$n_1x_1 = n \sum_{q'} m_{q'}^{(i)} y_{q'}^{(i)} + \sum_{r'} m_{r'} z_{r'},$$

где $\sum_{r'} m_{r'} z_{r'}$ — однозначная запись суммы $\sum_{j'} (\bar{x}_{j'} - \bar{y}_{j'})$ через элементы множества $X \setminus x_0$. Так как элемент $x_0 \notin A(x_1)$, то ясно, что $\sum_{r'} m_{r'} = 0$, поэтому из равенства (8) вытекает, что $n_1 = n \sum_{q'} m_{q'}^{(i)}$, то есть $n_1 \equiv 0 \bmod n$, что противоречит соотношению $n_1 \not\equiv 0 \bmod n$. Из полученного противоречия следует, что наше исходное допущение было неверно, то есть, что подгруппа $G_0^{(n)}$ является замкнутой подгруппой группы (G_0, ν_0).

Определим теперь гомоморфизм φ: $G_0 \to G$ следующим образом. Представим группы G_0 и G в виде:

$$G_0 = \sum_{x \in X \setminus x_0} Z^{(x)} \quad \text{и} \quad G = \sum_{x \in X \setminus x_0} Z_n^{(x)},$$

где $Z^{(x)}$ и $Z_n^{(x)}$ — копии групп Z и Z_n, в которых образующим элементом является $x \in X \setminus x_0$ (по условиям, X является базой в обеих группах G_0 и G). Пусть для любой точки $x \in X \subset G_0$, $\varphi(x) = x \in X \subset G$. Отображение φ, заданное на базе группы G_0, единственным образом продолжается до гомоморфизма всей группы G_0 на группу G. Этот гомоморфизм, который тоже будем обозначать через φ, и будет исходным. Нетрудно показать, что ядром гомоморфизма φ является подгруппа $G_0^{(n)}$, то есть имеет место изоморфизм: $G_0/G_0^{(n)} \approx G$. Далее, так как подгруппа $G_0^{(n)}$ является замкнутой подгруппой группы (G_0, ν_0), метризуемая топология ν_0 группы G_0 индуцирует на фактор-группе $G = G_0/G_0^{(n)}$ некоторую метризуемую топологию ν [7]. Покажем, что топология ν удовлетворяет условиям 1, 2 доказываемой теоремы.

1) Покажем, что топология ν индуцирует на множестве X топологию пространства (X, ϱ). Из условия 1^0 для топологии ν_0 группы G_0 и из определения гомоморфизма φ следует, что $\nu|_X \leqslant \mu$, где μ — топология пространства (X, ϱ). Поэтому для доказательства равенства $\nu|_X = \mu$ достаточно показать, что $\mu \leqslant \nu|_X$. Пусть точка $x \in X$ и O_x — любая окрестность этой точки в топологии μ. Существует такое натуральное число e_0, что окрестность

$$O_{e_0}(x) = \left\{y \in X\colon\ \varrho(x, y) < \frac{1}{2^{e_0}}\right\}$$

точки x в пространстве (X, ϱ) содержится в окрестности O_x. Рассмотрим два случая:

1') Пусть точка $x \neq x_0$. Выберем такое натуральное число e, что

$$\frac{1}{2^e} < \min\left(\varrho(x, x_0), \frac{1}{2^{e_0}}\right),$$

и покажем, что $\varphi(x+W_e) \cap X \subseteq O_{e_0}(x)$. Допустим противное; тогда существует такая точка $y \in X$, что $x-y \in \varphi(W_e)$ и $y \notin O_{e_0}(x)$. Из включения $x-y \in \varphi(W_e)$ следует, что элемент $x-y \in G_0$ можно представить в виде:

$$x-y = \sum_{j=1}^{s}(x_j-y_j)+n\sum_{i=1}^{k}m_i\bar{x}_i,$$

где элементы $x_j, y_j, \bar{x}_i \in X \subset G_0$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и

$$\sum_{j=1}^{s}\varrho(x_j, y_j) < \frac{1}{2^e}.$$

Далее, применяя схему доказательства замкнутости подгруппы $G_0^{(n)}$ в группе (G_0, ν_0), в которой нужно заменить элемент x_1 на элемент x, мы получим противоречие, из которого вытекает, что $\varphi(x+W_e) \cap X \subseteq O_{e_0}(x) \subseteq O_x$. Так как отображение φ открыто [4], множество $\varphi(x+W_e)$ является окрестностью точки x в группе (G, ν), то есть, в силу произвольности выбора точки $x \in X \subset G$, $x \neq x_0$, неравенство $\mu|_{X\setminus x_0} \leqslant \nu|_{X\setminus x_0}$ доказано.

1'') Пусть точка $x = x_0$. Покажем, что в этом случае, $\varphi(W_{e_0}) \cap X \subseteq O_{e_0}(x_0)$. Допустим противное; тогда существует такая точка $y \in X$, что $y \in \varphi(W_{e_0})$ и $y \notin O_{e_0}(x_0)$. Из включения $y \in \varphi(W_{e_0})$ следует, что элемент $y \in X \subset G_0$ можно представить в виде:

$$y = \sum_{j=1}^{s}(x_j-y_j)+n\sum_{i=1}^{k}m_i\bar{x}_i,$$

где элементы $x_j, y_j, \bar{x}_i \in X \subset G_0$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и

$$\sum_{j=1}^{s}\varrho(x_j, y_j) < \frac{1}{2^{e_0}}.$$

Далее, применяя с небольшими изменениями схему доказательства замкнутости подгруппы $G_0^{(n)}$ в группе (G_0, ν_0), в которой нужно заменить элемент x_1 на элемент y, мы получим противоречие, из которого вытекает, что $\varphi(W_{e_0}) \cap X \subseteq O_{e_0}(x_0) \subseteq O_{x_0}$. Таким образом, равенство $\mu = \nu|_X$ доказано.

2) Покажем, что множество X является замкнутым подмножеством группы (G, ν). Допустим противное; тогда существует последовательность точек $\{x_i\}$, $x_i \in X \subset G$, $i = 1, 2, \ldots$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, сходящаяся в пространстве (G, ν) к некоторому элементу $g \in G \setminus X$. Пусть $g = n_1y_1+\ldots+n_ky_k$, где $0 < n_p < n$ при $1 \leqslant p \leqslant k$, однозначная запись элемента g через элементы множества $X \setminus x_0$ в группе G. Выберем такое натуральное число e, что

$$\frac{1}{2^e} < \min\left(\min_{2\leqslant p\leqslant k}\varrho(y_1, y_p),\ \inf_{\substack{x_i\neq y_1,\\ 1\leqslant i<\infty}}\varrho(y_1, x_i),\ \varrho(y_1, x_0)\right).$$

По нашему допущению существует такое натуральное число i_0, что при $i > i_0$, $x_i \neq y_1$ и $g-x_i \in \varphi(W_e)$. Пусть $g_0 = n_1y_1+\ldots+n_ky_k \in G_0$; тогда, очевидно, $\varphi(g_0-x_i) = g-x_i$, и из включения $g-x_i \in \varphi(W_e)$ следует, что $g_0-x_i \in \varphi^{-1}(\varphi(W_e))$, то есть элемент g_0-x_i можно представить в виде:

$$g_0-x_i = \sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_j-\bar{y}_j)+n\sum_{q=1}^{t}m_qz_q,$$

где элементы $\bar{x}_j, \bar{y}_j, z_q \in X \subset G_0$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $1 \leqslant q \leqslant t$ и

$$\sum_{j=1}^{s}\varrho(\bar{x}_j, \bar{y}_j) < \frac{1}{2^e}.$$

Далее, применяя с небольшими изменениями схему доказательства замкнутости подгруппы $G_0^{(n)}$ в группе (G_0, ν_0), в которой нужно заменить элемент x_1 на элемент y_1, мы получим противоречие, из которого вытекает, что наше допущение неверно, то есть, что множество X является замкнутым подмножеством группы (G, ν).

Теорема доказана.

В работе [1], R. D. Anderson и J. E. Keisler доказывают следующее утверждение:

В n-мерном евклидовом пространстве E^n существует такое подмножество K, что $\dim K = \dim K^\omega = n-1$ (здесь K^ω — произведение счетного числа экземпляров пространства K).

Используя это утверждение, докажем, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ и любого целого неотрицательного числа m существует такая абелева группа G со слоем Z_n, что $\dim G = m$.

Теорема 2. *Пусть K — такое метризуемое сепарабельное пространство, что $\dim K = \dim K^\omega = m$, и $n \geqslant 2$ — любое натуральное число. Рассмотрим абелеву группу G с базой K и слоем Z_n, нулем которой является некоторая фиксированная точка $x_0 \in K$. Тогда на группе G существует такая метризуемая топология ν, совместимая с групповой структурой G, что:*

1) *топология ν индуцирует на множестве K его первоначальную топологию,*

2) *множество K является замкнутым подмножеством группы (G, ν);*

3) $\dim(G, \nu) = m$.

Доказательство. Пусть F — произвольный компакт, содержащий пространство K. По теореме 1 существует абелева метризуемая группа G_0 со слоем Z_n, базой которой является компакт F, и нуль этой группы совпадает с точкой $x_0 \in K \subset F$. Рассмотрим подгруппу G группы G_0, порожденную множеством $K \subseteq F \subset G_0$. Нетрудно видеть, что группа G в топологии, индуцированной топологией группы G_0, удовлетворяет условиям 1, 2 доказываемой теоремы. Покажем, что $\dim G = m$.

Зафиксируем натуральное число s и рассмотрим компакт $F_s = \underbrace{F \times \ldots \times F}_{s\ \text{раз}}$.

Определим отображение $f_s\colon F_s \to G_0$ формулой $f_s(x_1, \ldots, x_s) = x_1 + \ldots + x_s$ для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_s) \in F_s$. Из непрерывности групповых операций в группе G_0 следует, что отображение f_s непрерывно. Далее, нам понадобится следующее предложение, доказанное в работе [3]:

Предложение 1. *Пусть X — сепарабельное метризуемое пространство, s — натуральное число и $X_s = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{s\ \text{раз}}$. Тогда существует такое подмножество A_s пространства X_s, что:*

А) *если точка $x = (x_1, \ldots, x_s) \in X_s$, то найдется такая подстановка индексов $\sigma = \binom{1, \ldots, s}{i_1, \ldots, i_s}$, что точка $x_\sigma = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) \in A_s$;*

Б) *если точка $x = (x_1, \ldots, x_s) \in A_s$, то для любой подстановки индексов $\sigma = \binom{1, \ldots, s}{i_1, \ldots, i_s}$, при которой существуют такие индексы k и $\sigma(k) = i_k$, что $x_k \neq x_{i_k}$, точка $x_\sigma = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) \notin A_s$;*

В) *A_s является подмножеством типа F_σ в пространстве X_s.*

Пусть A_s — подмножество произведения $F_s = \underbrace{F \times \ldots \times F}_{s\ \text{раз}}$, удовлетворяющее условиям А, Б и В предложения 1. Рассмотрим подмножество $\widetilde{A}_s$ компакта F_s, состоящее из всех точек $x = (x_1, \ldots, x_s) \in F_s$, для которых существуют такие различные индексы $i_1, i_2, \ldots, i_p$, где $p \geqslant n$, что $x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_p}$. Легко видеть, что множество $\widetilde{A}_s$ является замкнутым подмножеством компакта F_s. Пусть $B_s = A_s \setminus \widetilde{A}_s$. Ясно, что множество B_s является подмножеством типа F_σ компакта F_s, поэтому $B_s = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i^{(s)}$, где $K_i^{(s)}$ — компакт при любом $i = 1, 2, \ldots$ Из свойства Б множества A_s и определения множества $\widetilde{A}_s$ вытекает, что отображение $\varphi_s = f_s|_{B_s}\colon B_s \to G_0$ является уплотнением, поэтому для любого натурального числа i отображение $\varphi_i^{(s)} = \varphi_s|_{K_i^{(s)}}\colon K_i^{(s)} \to G_0$ является гомеоморфизмом. Рассмотрим теперь пространство $K_s = \underbrace{K \times \ldots \times K}_{s\ \text{раз}}$ и пусть

$$\widetilde{B}_s = K_s \cap B_s, \quad \widetilde{K}_i^{(s)} = K_s \cap K_i^{(s)},$$
$$\widetilde{\varphi}_s = \varphi_s|_{\widetilde{B}_s}\colon \widetilde{B}_s \to G, \quad \widetilde{\varphi}_i^{(s)} = \varphi_i^{(s)}|_{\widetilde{K}_i^{(s)}}\colon \widetilde{K}_i^{(s)} \to G,$$

где $i = 1, 2, \ldots$ Из свойств пространства K легко следует, что $\dim K_s = m$. Далее, так как $\widetilde{\varphi}_i^{(s)}(\widetilde{K}_i^{(s)}) = \varphi_i^{(s)}(K_i^{(s)}) \cap G$ и отображение $\varphi_i^{(s)}$ является гомеоморфизмом для любого $i = 1, 2, \ldots$, то отображение $\widetilde{\varphi}_i^{(s)}$ тоже является гомеоморфизмом и множество $\widetilde{\varphi}_i^{(s)}(\widetilde{K}_i^{(s)})$ замкнуто в группе G. Отсюда вытекает, что множество $\widetilde{\varphi}_s(\widetilde{B}_s)$ является подмножеством типа F_σ в группе G, и по теореме суммы [6],

$$\dim \widetilde{\varphi}_s(\widetilde{B}_s) = \dim\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{\varphi}_i^{(s)}(\widetilde{K}_i^{(s)})\Big) \leqslant m.$$

Нетрудно показать, что $G = K \cup \bigcup\limits_{s=2}^{\infty} \widetilde{\varphi}_s(\widetilde{B}_s)$. Поэтому, в силу того, что все слагаемые правой части последней формулы есть подмножества типа F_σ группы G, имеем по теореме суммы:

$$\dim G = \max\Big(\dim K,\ \dim\Big(\bigcup_{s=2}^{\infty} \widetilde{\varphi}_s(\widetilde{B}_s)\Big)\Big) = m\,.$$

Теорема доказана.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, напомним некоторые определения, которые можно найти, например, в книге [11].

Определение 1. Пусть X — топологическое пространство, I — отрезок $[0, 1]$. Непрерывное отображение $\alpha\colon I \to X$ называется *путем α в пространстве X*. Точка $x_0 = \alpha(0)$ называется *началом пути* α, точка $x_1 = \alpha(1)$ — его *концом*. Говорят, что *путь α соединяет точку x_0 с точкой x_1*.

Определение 2. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если каждые две его точки можно соединить путем. Пространство X называется *локально линейно связным*, если для каждой окрестности U произвольной точки $x \in X$ существует такая окрестность $V \subseteq U$ точки x, что точку x можно связать с любой точкой $y \in V$ путем, проходящим в U.

Теорема 3. *Пусть X — локально линейно связное метризуемое пространство и точка $x_0 \in X$. Рассмотрим абелеву группу G с базой X и слоем Z или Z_n, где $n \geqslant 2$, нулевым элементом которой является точка $x_0 \in X$. Тогда на группе G существует такая метризуемая топология ν, совместимая с групповой структурой G, что:*

1) *топология ν индуцирует на множестве X его первоначальную топологию;*

2) *множество X является замкнутым подмножеством метризуемой группы (G, ν);*

3) *группа (G, ν) локально линейно связна.*

Доказательство. Докажем вначале теорему 3 для случая, когда G — свободная абелева группа с базой X, нулевым элементом которой является точка $x_0 \in X$.

Пусть ϱ — некоторая метрика пространства X, совместимая с его топологией. Так как пространство X локально линейно связно, существует такая последовательность открытых покрытий $\sigma_n = \{U_{n,\mu}\}$, $\mu \in \Omega_n$, $n = 1, 2, \ldots$, пространства X, что:

$\bar{1}$) покрытие σ_{n+1} вписано в покрытие σ_n, $n = 1, 2, \ldots$;

$\bar{2}$) для любого $n = 1, 2, \ldots$ и любого $\mu \in \Omega_n$ множество $U_{n,\mu}$ линейно связно;

$\bar{3}$) для любого $\mu \in \Omega_n$, $\operatorname{diam}_\varrho U_{n,\mu} < \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Далее, пусть точки x и $y \in X$. Будем писать $(x, y) \in \sigma_n$, если существует такое $\mu \in \Omega_n$, что $x, y \in U_{n,\mu}$. Определим теперь для каждого натурального числа m подмножество V_m группы G следующим образом:

$$V_m = \{x - y \mid x, y \in X\colon (x, y) \in \sigma_m\}. \tag{1}$$

Пусть для произвольного набора $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ натуральных чисел множество $V_{(m_1, m_2, \ldots, m_s)} = V_{m_1} + V_{m_2} + \ldots + V_{m_s}$, где знак „+“ обозначает групповую операцию в группе G. Определим далее для каждого натурального числа m множество

$$W_m = \bigcup_{\frac{1}{2^{m_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m_s}} < \frac{1}{2^m}} V_{(m_1, \ldots, m_s)}. \tag{2}$$

В этом определении объединение берется по всем конечным наборам $(m_1, \ldots, m_s)$ натуральных чисел, для которых

$$\frac{1}{2^{m_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m_s}} < \frac{1}{2^m}.$$

Аналогично, положим для каждого натурального числа m:

$$V_m^{(0)} = \left\{x - y \mid x, y \in X\colon \varrho(x, y) < \frac{1}{2^m}\right\}, \tag{3}$$

и пусть для произвольного набора $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ натуральных чисел множество $V^{(0)}_{m_1, m_2, \ldots, m_s)} = V^{(0)}_{m_1} + V^{(0)}_{m_2} + \ldots + V^{(0)}_{m_s}$. Далее, аналогично определим для каждого натурального числа m множество

$$W_m^{(0)} = \bigcup_{\frac{1}{2^{m_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m_s}} < \frac{1}{2^m}} V^{(0)}_{(m_1, \ldots, m_s)}. \tag{4}$$

Из доказательства теоремы 1 работы [2] следует, что множества $W_m^{(0)}$, $m = 1, 2, \ldots$, образуют базис фильтра окрестностей нуля некоторой метризуемой топологии $\nu^{(0)}$ группы G, совместимой с групповой структурой группы G и такой, что:

1^0) топология $\nu^{(0)}$ индуцирует на множестве X топологию пространства (X, ϱ);

2^0) множество X является замкнутым подмножеством метризуемой группы $(G, \nu^{(0)})$.

Покажем, что множества W_m, $m = 1, 2, \ldots$, образуют базис фильтра окрестностей нуля метризуемой топологии ν группы G, совместимой с групповой структурой группы G и удовлетворяющей условиям 1-3 теоремы 3. Из формул (1) и (2) непосредственно вытекает, что для каждого натурального числа m, $O \in W_m$, $W_m = -W_m$ и $W_{m+1} + W_{m+1} \subseteq W_m$, то есть множества W_m образуют базис фильтра окрестностей нуля некоторой топологии ν группы G, совместимой с ее групповой структурой. Далее, из формул (1)-(4) и условия $\bar{3}$ следует, что $W_m \subseteq W_m^{(0)}$, $m = 1, 2, \ldots$, поэтому $\nu \geqslant \nu^{(0)}$. Из этого неравенства, в частности, вытекает, что топология ν отделима и в силу существования счетной базы окрестностей нуля, метризуема. Докажем, что топология ν удовлетворяет условиям 1-3 теоремы 3.

1) Пусть μ — топология пространства (X, ϱ). Покажем, что $\nu|_X = \mu$. Из формул (1) и (2) непосредственно вытекает, что $\nu|_X \leqslant \mu$. Далее, из неравенства $\nu \geqslant \nu^{(0)}$ и условия 1^0 имеем $\mu = \nu^{(0)}|_X \leqslant \nu|_X$. Поэтому равенство $\nu|_X = \mu$ доказано.

2) Из неравенства $\nu \geqslant \nu^{(0)}$ и условия 2^0 следует, что множество X является замкнутым подмножеством метризуемой группы (G, ν).

3) Покажем, что для любого натурального числа m и любого элемента $x \in W_m$, элемент O можно соединить с точкой x путем, лежащим в окрестности W_m. Этим очевидно, локально линейная связность группы (G, ν) будет доказана.

Из включения $x \in W_m$ следует, что элемент x можно представить в виде:

$$x = \sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j), \tag{5}$$

где $(x_j, y_j) \in \sigma_{m_j}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, и

(6) $$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{m_j}} < \frac{1}{2^m}.$$

Определим для любого натурального числа i, $1 \leqslant i \leqslant k$, элемент

$$x(i) = \sum_{j=1}^{i} (x_j - y_j).$$

Нетрудно видеть, что $x(i+1) - x(i) = x_{i+1} - y_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Зафиксируем индекс i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и выберем такое $\mu_i \in \Omega_{m_i}$, что $x_i, y_i \in U_{m_i,\mu_i}$. Так как по $\overline{2}$ множество U_{m_i,μ_i} линейно связно, существует такой путь a_i, лежащий во множестве U_{m_i,μ_i}, что $a_i(0) = x_i$, $a_i(1) = y_i$. Далее, обозначим для любого элемента $g \in G$ через φ_g сдвиг группы G на элемент g: φ_g: $G \to G + g$. Тогда для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, отображение $\widetilde{a}_i(t) = \varphi_{x(i-1)+x_i} - a_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где $x(0) = O$, является путем, соединяющим элемент $x(i-1)$ с элементом $x(i)$, и лежащим во множестве $x(i-1) + W_{m_i}$. Так как $x(0) = O$ и $x(k) = x$, то путь $a = \widetilde{a}_1 \cdot \widetilde{a}_2 \ldots \cdot \widetilde{a}_k$, где $\widetilde{a}_1 \cdot \widetilde{a}_2 \cdot \ldots \cdot \widetilde{a}_k$ — произведение путей $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \ldots, \widetilde{a}_k$ [6], соединяет элемент O с элементом x и лежит во множестве $W_{m_1} + W_{m_2} + \ldots + W_{m_k} \subseteq W_m$.

Таким образом, в рассматриваемом случае теорема 3 полностью доказана.

Пусть теперь G — абелева группа с базой X и слоем Z_n, $n \geqslant 2$, нулевым элементом которой является точка $x_0 \in X$. Рассмотрим свободную абелеву группу G_0, базой которой является множество X и нуль которой совпадает с точкой $x_0 \in X$. Далее, как и в разобранном выше случае, построим для группы G_0 две метризуемые топологии $\nu^{(0)}$ и ν. Пусть $G_0^{(n)}$ — подгруппа группы G_0, порожденная всеми элементами вида ng, $g \in G_0$. Тогда, как это следует из доказательства теоремы 1, подгруппа $G_0^{(n)}$ является замкнутой подгруппой группы $(G_0, \nu^{(0)})$. Из неравенства $\nu \geqslant \nu^{(0)}$ вытекает, что подгруппа $G_0^{(n)}$ замкнута и в группе (G_0, ν). Определим теперь, как и при доказательстве теоремы 1, естественный гомоморфизм φ: $G_0 \to G$, ядром которого является подгруппа $G_0^{(n)}$. Пусть далее $\widetilde{\nu}^{(0)}$ и $\widetilde{\nu}$ — метризуемые топологии группы G, которые индуцированы топологиями $\nu^{(0)}$ и ν группы G_0 при гомоморфизме φ. Проверим, что топология $\widetilde{\nu}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3 для группы G.

1. Покажем, что $\widetilde{\nu}|_X = \mu$, где μ — топология пространства (X, ϱ). Так как $\nu|_X = \mu$, то $\widetilde{\nu}|_X \leqslant \mu$. С другой стороны $\widetilde{\nu}|_X \geqslant \widetilde{\nu}^{(0)}|_X$, и из доказательства теоремы 1 следует, что $\widetilde{\nu}^{(0)}|_X = \mu$, то есть $\widetilde{\nu}|_X \geqslant \mu$. Поэтому равенство $\widetilde{\nu}|_X = \mu$ доказано.

2. Из неравенства $\widetilde{\nu} \geqslant \widetilde{\nu}^{(0)}$ и доказательства теоремы 1 следует, что множество X является замкнутым подмножеством группы $(G, \widetilde{\nu})$.

3. По доказанному выше, группа (G_0, ν) локально линейно связна. Так как гомоморфизм φ: $(G_0, \nu) \to (G, \widetilde{\nu})$ является открытым отображением, то группа $(G, \widetilde{\nu})$ тоже локально линейно связна.

Теорема доказана.

II

Перейдем к построению метризуемых топологий на произвольных бесконечных абелевых группах.

Теорема 4. *Пусть G — абелева группа мощности $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Тогда существует $2^{\mathfrak{m}}$ линейно упорядоченных множеств $M_s = \{\mu_s^a,\ a \in (0, 1)\}$, $s \in S$, $|S| = 2^{\mathfrak{m}}$ метризуемых топологий на группе G, совместимых с ее групповой структурой и таких, что:*

1) *$\mu_s^{a_1} < \mu_s^{a_2}$, если $0 < a_1 < a_2 < 1$, $s \in S$;*

2) *каковы бы ни были $a_1, a_2 \in (0, 1)$, топологии $\mu_{s_1}^{a_1}$ и $\mu_{s_2}^{a_2}$ несравнимы, если $s_1 \neq s_2$;*

3) *$\dim(G, \mu_s^a) = 0$ для любого $a \in (0, 1)$ и любого $s \in S$.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда $\mathfrak{m} = \aleph_0$, то есть группа G счетна. Покажем, что для группы G выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

А) группа G содержит бесконечную циклическую подгруппу;

Б) группа G периодическая, и существует такая последовательность $\{x_i\}$, $x_i \in G$, $i = 1, 2, \ldots$, что порядки элементов этой последовательности неограниченно возрастают;

В) группу G можно представить в виде: $G = \sum_{i=1}^{\infty} G_i$, где G_i — ненулевая подгруппа группы G для любого $i = 1, 2, \ldots$

Допустим, что группа G не удовлетворяет условиям пунктов А и Б, тогда эта группа периодическая, и порядки всех элементов группы G ограничены в совокупности. Пусть $G = \sum_j G_j$ — разложение группы G на примарные компоненты [10]. Тогда каждая примарная подгруппа G_j группы G по первой теореме Прюфера [10] разлагается в прямую сумму циклических групп, и, следовательно, вся группа G тоже разлагается в прямую сумму циклических групп. Таким образом, в этом случае группа G удовлетворяет условиям пункта В.

Перейдем теперь к рассмотрению каждого из случаев А, Б и В.

А) Докажем вначале теорему 4 для группы N целых чисел. Рассмотрим последовательность $\{n_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, натуральных чисел, удовлетворяющую следующему условию:

(1) $$n_{i+1} > \sum_{j=1}^{i} 2^j n_j, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Пусть далее $\{n_i'\}$, $i=1,2,\ldots$ — некоторая подпоследовательность последовательности $\{n_i\}$, то есть для любого $i=1,2,\ldots$ существует такой индекс $k(i)$, что $n_i'=n_{k(i)}$, причем, если $i_1>i_2$, то $k(i_1)>k(i_2)$, для любых $1\leqslant i_1, i_2<+\infty$. Ясно, что последовательность $\{n_i'\}$, $i=1,2,\ldots$, тоже удовлетворяет условию (1). Определим для каждого натурального числа m подмножество V_m' группы N следующим образом:

(2) $$V_m'=\bigcup_{\frac{1}{2^{i_1}}+\ldots+\frac{1}{2^{i_k}}<\frac{1}{2^m}}(\pm n_{i_1}'\pm n_{i_2}'\pm\ldots\pm n_{i_k}'),$$

где под знаком объединения в выражении „$\pm n_{i_1}'\pm n_{i_2}'\pm\ldots\pm n_{i_k}'$“ берутся всевозможные комбинации знаков „+“ и „−“, и объединение ведется по всем таким наборам индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, что

$$\frac{1}{2^{i_1}}+\frac{1}{2^{i_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{i_k}}<\frac{1}{2^m}$$

(среди индексов набора $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ могут быть одинаковые индексы). Покажем, что множества V_m', $m=1,2,\ldots$, образуют базис фильтра окрестностей нуля некоторой отделимой топологии μ' группы N, совместимой с ее групповой структурой. Ясно, что $0\in V_m'$ для любого $m=1,2,\ldots$, поэтому достаточно проверить, что выполняются следующие свойства [4]:

1⁰) $V_m'=-V_m'$, $m=1,2,\ldots$,

2⁰) $V_{m+1}'+V_{m+1}'\subseteq V_m'$, $m=1,2,\ldots$,

3⁰) $\bigcap_{m=1}^{\infty}V_m'=\{0\}$.

Свойства 1⁰-2⁰ очевидным образом вытекают из определения множеств V_m'. Проверим свойство отделимости 3⁰. Пусть $n\neq 0$ — любое целое число. Существует такое натуральное число e, что $|n|<2^e$. Покажем, что $n\notin V_e'$. Допустим противное, тогда из равенства (2) следует, что n можно представить в виде:

(3) $$n=\sum_{p=1}^{k}j_{i_p}n_{i_p}',\qquad i_1<i_2<\ldots<i_k,$$

где j_{i_p} — целое число для любого $p=1,2,\ldots,k$ и

(4) $$\sum_{p=1}^{k}\frac{|j_{i_p}|}{2^{i_p}}<\frac{1}{2^e}.$$

Из последнего неравенства следует, что $e<i_1<i_2<\ldots<i_k$ и $|j_{i_p}|<2^{i_p}$, $1\leqslant p\leqslant k$. Далее, применяя неравенство (1), имеем:

$$\Big|\sum_{p=1}^{k}j_{i_p}n_{i_p}'\Big|\geqslant|j_{i_k}|n_{i_k}'-\sum_{p=1}^{i_k-1}|j_{i_p}|n_{i_p}'>n_{i_k}'-\sum_{j=i_1}^{i_k-1}2^jn_j'>\sum_{j=1}^{i_1-1}2^jn_j'>2^e>|n|,$$

так как $i_1-1\geqslant e$.

Полученное неравенство, очевидно, противоречит равенству (3). Таким образом, свойство отделимости 3⁰ доказано. Из существования счетной базы окрустностей нуля в топологии μ' следует, что топологическая группа (N, μ') метризуема [8].

Покажем, что окрестность V_1' нуля группы (N, μ') обладает следующим свойством:

4⁰) пусть целое число $n\in\{n_i\}$ и $n\notin\{n_i'\}$, тогда $n\notin V_1'$.

Действительно, пусть $n=n_{i_0}$ и $n\notin\{n_i'\}$. Допустим, что $n_{i_0}\in V_1'$; тогда из равенства (2) следует, что n_{i_0} можно представить в виде:

(5) $$n_{i_0}=\sum_{p=1}^{k}j_{i_p}n_{i_p}',\qquad i_1<i_2<\ldots<i_k,$$

где $j_{i_p}\neq 0$ — целое число для любого $p=1,2,\ldots,k$ и

(6) $$\sum_{p=1}^{k}\frac{|j_{i_p}|}{2^{i_p}}<\frac{1}{2}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что $1<i_1<i_2<\ldots<i_k$ и $|j_{i_p}|<2^{i_p}$, $1\leqslant p\leqslant k$. Пусть $i=\max(i_0, k(i_1), \ldots, k(i_p))$, где $k(i_p)$ — такое натуральное число, что $n_{i_p}'=n_{k(i_p)}$, $p=1,2,\ldots,k$. Тогда из неравенства (1) и соотношения $n_{i_0}\notin\{n_i'\}$ следует, что

$$\Big|n_{i_0}-\sum_{p=1}^{k}j_{i_p}n_{i_p}'\Big|>n_i-\sum_{j=1}^{i-1}2^jn_j>0.$$

Полученное неравенство, очевидно, противоречит равенству (5). Свойство 4⁰, таким образом, доказано.

Далее нам понадобится следующее утверждение, доказанное в книге [5]:

Пусть A — счетное множество; тогда существует такое семейство $\{A_s\}$, $s\in S$, $|S|=\mathfrak{c}$ бесконечных подмножеств множества A, что для любых $s_1, s_2\in S$, $s_1\neq s_2$,

$$|A_{s_1}\cap A_{s_2}|<\aleph_0.$$

Согласно этому утверждению, существует такое семейство $\{n_i^{(s)}\}$, $i=1,2,\ldots$, $s\in S$, $|S|=\mathfrak{c}$ подпоследовательностей последовательности $\{n_i\}$, что

(7) $$|\{n_i^{(s_1)}\}\cap\{n_i^{(s_2)}\}|<\aleph^0$$

для любых $s_1, s_2\in S$, $s_1\neq s_2$.

Зафиксируем некоторый индекс $s\in S$ и рассмотрим последовательность $\{n_i^{(s)}\}$, $i=1,2,\ldots$ Построим для любого двоично-рационального числа $r\in[0,1]$ подпоследовательность $\{n_i^{(s,r)}\}$, $i=1,2,\ldots$, последовательности $\{n_i^{(s)}\}$ так, что будет выполняться следующее условие:

(*) Для любых $0\leqslant r_1<r_2\leqslant 1$ последовательность $\{n_i^{(s,r_2)}\}$, $i=1,2,\ldots$, является подпоследовательностью последовательности $\{n_i^{(s,r_1)}\}$, $i=$

$=1, 2, \ldots$, причём существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots$, что для любого k, $n_{i_k}^{(s,r_1)} \notin \{n_i^{(s,r_2)}\}$.

Построение будем вести по индукции. Пусть $n_i^{(s,0)} = n_i^{(s)}$, $i = 1, 2, \ldots$, и $n_i^{(s,1)} = n_{2i}^{(s)}$, $i = 1, 2, \ldots$ Далее, допустим, что для всех двоично-рациональных чисел вида $r = p/2^e$, где $0 \leqslant p \leqslant 2^e$, мы уже построили последовательности $\{n_i^{(s,r)}\}$, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие условию $(*)$. Пусть $r = p/2^{e+1}$, где $p = 2q+1$, $0 \leqslant q \leqslant 2^e - 1$. Тогда, по предположению индукции, для двоично-рациональных чисел $r_1 = q/2^e$ и $r_2 = (q+1)/2^e$ уже построены последовательности $\{n_i^{(s,r_1)}\}$ и $\{n_i^{(s,r_2)}\}$, причем последовательность $\{n_i^{(s,r_2)}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{n_i^{(s,r_1)}\}$, и существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots$, что для любого k, $n_{i_k}^{(s,r_1)} \notin \{n_i^{(s,r_2)}\}$. Пусть $\{a_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, — последовательность натуральных чисел, получающаяся из последовательности $\{i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, выбрасыванием всех элементов i_{2k-1}, $k = 1, 2, \ldots$ Положим $n_i^{(s,r)} = n_{a_i}^{(s,r_1)}$, $i = 1, 2, \ldots$ Ясно, что множество всех последовательностей $\{n_i^{(s,r)}\}$, построенных таким образом для всех двоично-рациональных чисел вида $p/2^{e+1}$, где $0 \leqslant p \leqslant 2^{e+1}$, тоже удовлетворяет условию $(*)$.

Каждая последовательность $\{n_i^{(s,r)}\}$, $r \in R$, где R — множество всех двоично-рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, является по построению подпоследовательностью последовательности $\{n_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, поэтому применяя конструкцию, изложенную выше для последовательности $\{n_i'\}$, к последовательности $\{n_i^{(s,r)}\}$, мы можем построить некоторую метризуемую топологию μ_s^r, $r \in R$, группы N, совместимую с ее групповой структурой. Из построения топологий μ_s^r, $r \in R$, условий 4^0 и $(*)$ непосредственно следует, что для любых двоично-рациональных чисел $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant 1$ имеет место строгое неравенство $\mu_s^{r_1} < \mu_s^{r_2}$. Таким же образом, используя неравенство (7), можно показать, что для любых $r_1, r_2 \in R$ и $s_1, s_2 \in S$, топологии $\mu_{s_1}^{r_1}$ и $\mu_{s_2}^{r_2}$ несравнимы, если $s_1 \neq s_2$.

Далее, для любого $s \in S$ и любого $\alpha \in (0, 1)$ положим

$$\nu_s^\alpha = \bigcup_{\substack{r \in R \\ r < \alpha}} \mu_s^r . \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что для любого $s \in S$ и любого $\alpha \in (0, 1)$, ν_s^α является метризуемой топологией группы N, совместимой с ее групповой структурой. Покажем, что семейство топологий ν_s^α $\alpha \in (0, 1)$, $s \in S$, группы N удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы 4.

1) Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ и $s \in S$. Существуют такие двоично-рациональные числа r_1 и $r_2 \in R$, что $0 < \alpha_1 < r_1 < r_2 < \alpha_2 < 1$. Из свойств топологий μ_s^r, $r \in R$, и равенства (8) вытекает, что

$$\nu_s^{\alpha_1} \leqslant \mu_s^{r_1} < \mu_s^{r_2} \leqslant \nu_s^{\alpha_2} .$$

2) Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$, $s_1, s_2 \in S$ и $s_1 \neq s_2$. Допустим, что топологии $\nu_{s_1}^{\alpha_1}$ и $\nu_{s_2}^{\alpha_2}$ сравнимы, и пусть, например, $\nu_{s_1}^{\alpha_1} \leqslant \nu_{s_2}^{\alpha_2}$. Возьмем такие двоично-рациональные числа r_1 и $r_2 \in R$, что $r_1 < \alpha_1$ и $r_2 > \alpha_2$. Тогда имеем, что

$$\mu_{s_1}^{r_1} \leqslant \nu_{s_1}^{\alpha_1} \leqslant \nu_{s_2}^{\alpha_2} \leqslant \mu_{s_2}^{r_2}, \quad \text{то есть} \quad \mu_{s_1}^{r_1} \leqslant \mu_{s_2}^{r_2} .$$

Это неравенство противоречит тому, что топологии $\mu_{s_1}^{r_1}$ и $\mu_{s_2}^{r_2}$ несравнимы, если $s_1 \neq s_2$.

Так как группа N счетна, все утверждения теоремы 4 для этой группы доказаны.

Рассмотрим теперь произвольную счетную группу G, содержащую бесконечную циклическую подгруппу G_0. В силу того, что группа G_0 изоморфна группе N целых чисел, для которой теорема 4 была доказана выше, существует семейство ν_s^α, $\alpha \in (0, 1)$, $s \in S$, метризуемых топологий группы G_0, совместимых с ее групповой структурой и удовлетворяющих всем условиям теоремы 4. Нетрудно показать, что для любого $\alpha \in (0, 1)$ и любого $s \in S$ существует единственная топология μ_s^α группы G, совместимая с ее групповой структурой и удовлетворяющая следующим условиям:

$$\mu_s^\alpha|_{G_0} = \nu_s^\alpha , \tag{9}$$

(10) подгруппа G_0 является открытой подгруппой группы (G, μ_s^α).

Ясно, что топологии μ_s^α, $\alpha \in (0, 1)$, $s \in S$, группы G метризуемы, и из условий (9) и (10) вытекает, что семейство этих топологий удовлетворяет всем условиям теоремы 4. Таким образом, теорема 4 в случае А доказана.

Б) Пусть группа G периодическая и существует такая последовательность $\{x_i\}$, $x_i \in G$, $i = 1, 2, \ldots$, что порядки элементов этой последовательности неограниченно возрастают. Обозначим для любого элемента $x \in G$ через $p(x)$ порядок элемента x. Тогда без ограничения общности мы можем считать, что элементы последовательности $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют следующим неравенствам:

$$p(x_{i+1}) \geqslant 2^i \prod_{j=1}^{i} p(x_j) , \quad i = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Пусть далее $\{x_i'\}$, $i = 1, 2, \ldots$, некоторая подпоследовательность последовательности $\{x_i\}$. Ясно, что последовательность $\{x_i'\}$, $i = 1, 2, \ldots$, тоже удовлетворяет условию (11). Определим для каждого натурального числа m подмножество W_m' группы G следующим образом:

$$W_m' = \bigcup_{\frac{1}{2^{i_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_k}} < \frac{1}{2^m}} (\pm x_{i_1}' \pm x_{i_2}' \pm \ldots \pm x_{i_k}') , \tag{12}$$

где под знаком объединения в выражении „$\pm x'_{i_1} \pm x'_{i_2} \pm \ldots \pm x'_{i_k}$“ берутся всевозможные комбинации знаков „+“ и „−“, и объединение ведется по всем таким наборам индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, что

$$\frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_k}} < \frac{1}{2^m}$$

(среди индексов набора $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ могут быть одинаковые индексы).

Как и в пункте A, проверим, что множества W'_m, $m = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют следующим условиям:

1^1) $W'_m = -W'_m$, $m = 1, 2, \ldots$,
2^1) $W'_{m+1} + W'_{m+1} \subseteq W'_m$, $m = 1, 2, \ldots$,
3^1) $\bigcap_{m=1}^{\infty} W'_m = \{O\}$.

Свойства 1^1-2^1 очевидным образом вытекают из определения множеств W'_m. Проверим свойство отделимости 3^1. Пусть x — любой элемент группы G, отличный от нуля. Если элемент x не принадлежит подгруппе группы G, порожденной элементами последовательности $\{x'_i\}$, то, очевидно, $x \notin W'_m$ для любого $m = 1, 2, \ldots$ Пусть $x = n_1 x'_{i_1} + \ldots + n_k x'_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, где $n_1, \ldots, n_k$ — целые числа, отличные от 0. Покажем, что $x \notin W_{i_k}$. Допустим противное, тогда из равенства (12) следует, что:

$$(13) \qquad n_1 x'_{i_1} + \ldots + n_k x'_{i_k} = m_1 x'_{j_1} + \ldots + m_e x'_{j_e}, \qquad j_1 < j_2 < \ldots < j_e,$$

где $m_1, \ldots, m_e$ целые числа, отличные от 0, и

$$(14) \qquad \frac{|m_1|}{2^{j_1}} + \ldots + \frac{|m_e|}{2^{j_e}} < \frac{1}{2^{i_k}}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что $i_k < j_1 < j_2 < \ldots < j_e$ и $|m_p| < 2^{j_p - 1}$, $1 \leqslant p \leqslant e$. Поэтому, умножив обе части равенства (13) на $\prod_{j=1}^{j_e-1} p(x'_j)$, получим:

$$0 = m_e \left(\prod_{j=1}^{j_e-1} p(x'_j) \right) x'_{j_e}.$$

Так как $|m_e| < 2^{j_e-1}$, это равенство, очевидно, противоречит неравенству (11). Таким образом, мы показали, что множества W'_m, $m = 1, 2, \ldots$, образуют базис фильтра окрестностей нуля некоторой метризуемой топологии μ' группы G, совместимой с ее групповой структурой. Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что окрестность W'_1 нуля группы (G, μ') обладает следующим свойством:

4^1) пусть элемент $x \in \{x_i\}$ и $x \notin \{x'_i\}$, тогда $x \notin W'_1$.

Далее дословно проходят рассуждения доказательства теоремы 4 для группы N целых чисел, в которых последовательность $\{n_i\}$ нужно заменить на последовательность $\{x_i\}$. Таким образом, в этом случае теорема 4 тоже доказана.

B) Пусть группу G можно представить в виде: $G = \sum_{i=1}^{\infty} G_i$, где G_i — ненулевая подгруппа группы G для любого $i = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим произвольную подпоследовательность $\{n_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, последовательности $\{n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, всех натуральных чисел, и определим для каждого натурального числа m подгруппу W'_m группы G следующим образом:

$$(15) \qquad W'_m = \sum_{i \geqslant m} G_{n_i}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Так как $\bigcap_{m=1}^{\infty} W'_m = \{O\}$, то подгруппы W'_m, $m = 1, 2, \ldots$, образуют базис фильтра окрестностей нуля некоторой метризуемой топологии μ' группы G, совместимой с ее групповой структурой. Далее, очевидно, что окрестность W'_1 нуля группы (G, μ') обладает следующим свойством:

4^2) пусть элемент $g \in G_n$, где $n \notin \{n_i\}$, тогда $g \notin W'_1$.

Теперь опять дословно проходят рассуждения доказательства теоремы 4 для группы N целых чисел, в которых последовательность $\{n_i\}$ нужно заменить на последовательность всех натуральных чисел.

Итак, теорема 4 в случае, когда группа G счетна, полностью доказана.

Пусть теперь $|G| = \mathfrak{m} > \aleph_0$. Рассмотрим два случая:

I. Пусть существует такая подгруппа G_0 группы G, что $|G_0| = \mathfrak{m}$ и подгруппа G_0 является абелевой группой со слоем Z или Z_q, где $q \geqslant 2$ — некоторое целое число. Рассмотрим некоторую базу X группы G_0. Ясно, что $|X| = \mathfrak{m}$. Далее, используя равенство $\mathfrak{m}^2 \cdot \aleph_0 = \mathfrak{m}$, представим множество X в виде:

$$X = \bigcup_{a \in A} \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i^{(a)},$$

где $|A| = \mathfrak{m}$, $|X_i^{(a)}| = \mathfrak{m}$ для любых $a \in A$ и $1 \leqslant i < \infty$, и $X_{i_1}^{(a_1)} \cap X_{i_2}^{(a_2)} = \emptyset$, если $a_1 \neq a_2$ или $i_1 \neq i_2$. Так как $|A| = \mathfrak{m}$, то существует такое семейство $\{A_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2^{\mathfrak{m}}$, подмножеств множества A, что для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, всегда $A_{s_1} \setminus A_{s_2} \neq \emptyset$ [9]. Пусть для любого $s \in S$ и любого $i = 1, 2, \ldots$, $Y_i^{(s)} = \bigcup_{a \in A_s} X_i^{(a)}$. Из этого определения следует, что для любого натурального числа i и любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, $Y_i^{(s_1)} \setminus Y_i^{(s_2)} \neq \emptyset$, и для любых натуральных чисел $i_1, i_2, i_1 \neq i_2$, $Y_{i_1}^{(s_1)} \cap Y_{i_2}^{(s_2)} = \emptyset$, каковы бы ни были $s_1, s_2 \in S$. Зафиксируем индекс $s \in S$ и для каждого $i = 1, 2, \ldots$ рассмотрим подгруппу $G_i^{(s)}$ группы G_0, базой которой является множество

$Y_i^{(s)} \cup \{O\}$. Пусть $G_s = \sum_{i=1}^{\infty} G_i^{(s)}$. Ясно, что группу G_s можно отождествить с подгруппой группы G_0, базой которой является множество $\{O\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i^{(s)}$. Далее, так как группа G_s представляется в виде прямой суммы своих ненулевых подгрупп $G_i^{(s)}$, $i = 1, 2, \ldots$, мы можем, повторяя рассуждения пункта B, построить по последовательности подгрупп $\{G_i^{(s)}\}$, $i = 1, 2, \ldots$, линейно упорядоченное множество $\{\nu_s^{\alpha},\ \alpha \in (0, 1)\}$ метризуемых топологий группы G_s, совместимых с ее групповой структурой, и таких, что $\nu_s^{\alpha_1} < \nu_s^{\alpha_2}$, если $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Также, как и в пункте A можно показать, что для любого $\alpha \in (0, 1)$ существует единственная топология μ_s^{α} группы G, совместимая с ее групповой структурой и удовлетворяющая следующим условиям:

(16) $$\mu_s^{\alpha}|_{G_s} = \nu_s^{\alpha},$$

(17) группа G_s является открытой подгруппой группы (G, μ_s^{α}).

Ясно, что топологии μ_s^{α}, $\alpha \in (0, 1)$, группы G метризуемы, и из условий (16) и (17) и линейной упорядоченности множества $\{\nu_s^{\alpha},\ \alpha \in (0, 1)\}$ вытекает, что семейство всех топологий μ_s^{α}, $\alpha \in (0, 1)$, $s \in S$, удовлетворяет условию 1 теоремы 4. Проверим для этого семейства выполнение остальных условий теоремы.

Покажем, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ топологии $\mu_{s_1}^{\alpha_1}$ и $\mu_{s_2}^{\alpha_2}$ несравнимы, если $s_1 \neq s_2$. Пусть топология $\nu_{s_1}^{\alpha_1}$ группы G_{s_1} и топология $\nu_{s_2}^{\alpha_2}$ группы G_{s_2} определяются последовательностями подгрупп $\{G_{n_i}^{(s_1)}\}$, $i = 1, 2, \ldots$, и $\{G_{m_i}^{(s_2)}\}$, $i = 1, 2, \ldots$, соответственно, где $\{n_i\}$ и $\{m_i\}$ — соответствующие этим топологиям возрастающие подпоследовательности последовательности $\{n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, всех натуральных чисел. Выберем для каждого натурального числа i произвольно точку $x_i \in Y_{n_i}^{(s_1)} \setminus Y_{n_i}^{(s_2)}$ и точку $y_i \in Y_{m_i}^{(s_2)} \setminus Y_{m_i}^{(s_1)}$. Нетрудно видеть, что

$$0 \in [\{x_i\}]_{(G, \mu_{s_1}^{\alpha_1})}, \quad 0 \notin [\{x_i\}]_{(G, \mu_{s_2}^{\alpha_2})}$$

и

$$0 \notin [\{y_i\}]_{(G, \mu_{s_1}^{\alpha_1})}, \quad 0 \in [\{y_i\}]_{(G, \mu_{s_2}^{\alpha_2})}.$$

Из этих соотношений следует, что топологии $\mu_{s_1}^{\alpha_1}$ и $\mu_{s_2}^{\alpha_2}$ несравнимы. Последнее условие теоремы 4 непосредственно следует из того, что базу окрестностей нуля в каждой топологии μ_s^{α}, $\alpha \in (0, 1)$, $s \in S$ образуют подгруппы группы G.

Таким образом, в этом случае теорема 4 тоже доказана.

II. Пусть в группе G не существует такой подгруппы G_0, что $|G_0| = \mathfrak{m}$ и G_0 является абелевой группой со слоем Z или Z_q, где $q \geqslant 2$ — некоторое целое число. Воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого можно найти в книге [10].

Всякая абелева группа является объединением счетной возрастающей последовательности прямых сумм циклических групп.

Из этого утверждения непосредственно вытекает, что в рассматриваемом случае $\mathfrak{m}$ является счетно-конфинальным кардинальным числом, то есть $\mathfrak{m} = \sum_{p=1}^{\infty} \mathfrak{m}_p$, где $\aleph_0 < \mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \ldots < \mathfrak{m}_p < \ldots$. Далее, пользуясь этим утверждением, нетрудно по индукции построить такую последовательность $\{G_p\}$, $p = 1, 2, \ldots$ подгрупп группы G, что:

α) $|G_p| > \mathfrak{m}_p$, $p = 1, 2, \ldots$,

β) $G_{p_1} \cap G_{p_2} = \{O\}$ при $p_1 \neq p_2$, $1 \leqslant p_1, p_2 < \infty$,

γ) каждая группа G_p является абелевой группой со слоем Z или Z_{q_p}, где $q_p \geqslant 2$ — некоторое целое число.

Пусть X_p — некоторая база группы G_p, $p = 1, 2, \ldots$ и $G_0 = \sum_{p=1}^{\infty} G_p$. Из условия β следует, что группы G_0 можно естественным образом отождествить с подгруппой группы G, порожденной множеством $X = \bigcup_{p=1}^{\infty} X_p$. Из условия α вытекает, что $|X| = |G_0| = \mathfrak{m}$. Далее, повторяя рассуждения разобранного выше случая I, мы можем построить такое семейство $\{Y_i^{(s)}\}$, $s \in S$, $i = 1, 2, \ldots$ подмножеств множества X, что $|S| = 2^{\mathfrak{m}}$; $Y_i^{(s_1)} \setminus Y_i^{(s_2)} \neq \emptyset$ для любого $i = 1, 2, \ldots$ и любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$; $Y_{i_1}^{(s_1)} \cap Y_{i_2}^{(s_2)} = \emptyset$ для любых $i_1 \neq i_2$ и любых $s_1, s_2 \in S$. Пусть $Y_{i,p}^{(s)} = \{O\} \cup (Y_i^{(s)} \cap X_p)$, $s \in S$, $i, p = 1, 2, \ldots$, и $G_{i,p}^{(s)}$ — абелева группа с базой $Y_{i,p}^{(s)}$, являющаяся подгруппой группы G_p. Положим для любого $s \in S$ и любого $i = 1, 2, \ldots$, $G_i^{(s)} = \sum_{p=1}^{\infty} G_{i,p}^{(s)}$ и пусть $G_s = \sum_{i=1}^{\infty} G_i^{(s)}$. Далее, без изменений проходит доказательство случая I.

Теорема доказана.

III

В этой части работы рассматриваются абелевы группы мощности $\geqslant \mathfrak{c}$. На этот класс абелевых групп переносится ряд результатов работы [3] и первой части настоящей работы, доказанных для абелевых групп со слоями Z или Z_q, $q \geqslant 2$.

Теорема 5. *Пусть G — абелева группа, $|G| \geqslant \mathfrak{c}$, и пусть n — неотрицательное целое число. Тогда существует такое семейство $\{\mu_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2^{\mathfrak{c}}$ метризуемых топологий на группе G, совместимых с ее групповой структурой, что:*

1) *для любого $s \in S$ группа (G, μ_s) локально сепарабельна,*

2) *для любого $s \in S$, $\dim(G, \mu_s) = n$,*

3) *для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, группы (G, μ_{s_1}) и (G, μ_{s_2}) не гомеоморфны.*

Доказательство. В силу того, что любая абелева группа является объединением счетной возрастающей последовательности прямых сумм циклических групп [10], и $|G| \geqslant \mathfrak{c}$, существует такая подгруппа $G_0 \subseteq G$, что $|G_0| = \mathfrak{c}$ и G_0 является абелевой группой со слоем Z или Z_q, где $q \geqslant 2$ — некоторое целое число. Пусть X — произвольная база группы G_0. В работе [1] R. D. Anderson и J. E. Keisler строят для данного неотрицательного числа n такое сепарабельное метризуемое пространство K_n, что $\dim K_n = \dim K_n^\omega = n$. Если $n > 0$, то из конструкции построения следует, что пространство K_n связно.

Пусть теперь $\{A_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2^\mathfrak{c}$ — такое семейство метризуемых сепарабельных нульмерных пространств, что для каждого $s \in S$, $|A_s| = \mathfrak{c}$, и для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ пространства A_{s_1} и A_{s_2} не гомеоморфны [9]. Далее, если $n > 0$, рассмотрим для любого $s \in S$ пространство X_s, являющееся дизъюнктным объединением пространств K_n и A_s. Если же $n = 0$, положим $X_s = A_s$ для любого $s \in S$. Из этого определения следует, что семейство метризуемых сепарабельных пространств $\{X_s\}$, $s \in S$, удовлетворяет следующим условиям:

1^0) для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, пространства X_{s_1} и X_{s_2} не гомеоморфны;

2^0) для любого $s \in S$, $\dim X_s = \dim X_s^\omega = n$.

Условие 1^0 вытекает непосредственно из определения пространств X_s, $s \in S$. Условие 2^0 доказывается следующим образом. Легко проверяется, что $\dim X_s = \dim X_s^m = n$ для любого целого числа $m \geqslant 1$. Поэтому из леммы 4 работы [1] следует, что $\dim X_s = \dim X_s^\omega = n$.

Так как для любого $s \in S$, $|X_s| = \mathfrak{c}$, то для каждого $s \in S$ существует такая метризуемая топология ν_s на множестве X, что пространство (X, ν_s) гомеоморфно пространству X_s. Далее, из доказательства теоремы 4 работы [3] и теоремы 2 настоящей работы следует, что для каждого $s \in S$ существует такая метризуемая топология $\mu_s^{(0)}$ группы G_0, совместимая с ее групповой структурой, что:

1^1) $\mu_s^{(0)}|_X = \nu_s$,

2^1) множество X является замкнутым подмножеством группы $(G_0, \mu_s^{(0)})$,

3^1) $\dim(G_0, \mu_s^{(0)}) = n$.

Пусть теперь μ_s, $s \in S$ — такая метризуемая топология группы G, совместимая с ее групповой структурой, что

(1) $$\mu_s|_{G_0} = \mu_s^{(0)}$$

и

(2) группа G_0 является открытой подгруппой группы (G, μ_s).

Из свойств 1^1, 3^1 и формул (1), (2) непосредственно вытекает, что семейство топологий $\{\mu_s\}$, $s \in S$ удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы 5

Пусть для некоторых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, группы (G, μ_{s_1}) и (G, μ_{s_2}) гомеоморфны, и $\varphi\colon (G, \mu_{s_1}) \to (G, \mu_{s_2})$ — соответствующий гомеоморфизм. Рассмотрим множество $\varphi(X) \subset (G, \mu_{s_2})$. Из условия 2^1 следует, что это множество замкнуто в группе (G, μ_{s_2}). Далее, так как группу (G, μ_{s_2}) можно представить в виде дизъюнктного объединения экземпляров подгруппы $(G_0, \mu_{s_2}^{(0)})$, и множество $\varphi(X)$ является сепарабельным подпространством группы (G, μ_{s_2}), это множество содержится в качестве замкнутого подмножества в дизъюнктном объединении счетного числа экземпляров подгруппы $(G_0, \mu_{s_2}^{(0)})$. Обозначим для любого $s \in S$ через B_s пространство, являющееся дизъюнктным объединением счетного числа экземпляров группы $(G_0, \mu_s^{(0)})$. Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, группа (G, μ_{s_1}) может быть гомеоморфна группе (G, μ_{s_2}) только в том случае, если пространство B_{s_2} содержит в качестве замкнутого подмножества топологический образ пространства X_{s_1}.

Пусть теперь для каждого $s_0 \in S$, $P_{s_0} \subseteq S$ — множество всех таких $s \in S$, что пространство B_{s_0} содержит в качестве замкнутого подмножества топологический образ пространства X_s. Из условия 2^1 следует, что

(3) $$s \in P_s \quad \text{для любого} \quad s \in S,$$

а из сепарабельности пространства B_s, $s \in S$, вытекает в силу 1^0, что

(4) $$|P_s| \leqslant \mathfrak{c}.$$

Далее, так как $S = \bigcup_{s \in S} P_s$ по (3) и $|S| = 2^\mathfrak{c} > \mathfrak{c}$, то используя неравенство (4) и пользуясь леммой Цорна, нетрудно показать, что существует такое подмножество $S_0 \subseteq S$, что $|S_0| = 2^\mathfrak{c}$ и для любых $s_1, s_2 \in S_0$, $s_1 \neq s_2$, $P_{s_1} \cap P_{s_2} = \emptyset$. Из соотношения (3) следует, что для любого $s \in S_0$, $S_0 \cap P_s = \{s\}$. Но это, в силу определения множеств P_s, $s \in S$, означает, что для любых индексов $s_1, s_2 \in S_0$, $s_1 \neq s_2$, пространство B_{s_2} не содержит в качестве своего замкнутого подмножества никакого топологического образа пространства X_{s_1}, и поэтому в силу ранее сказанного, группы (G, μ_{s_1}) и (G, μ_{s_2}) не гомеоморфны. Таким образом, семейство метризуемых топологий $\{\mu_s\}$, $s \in S_0$ группы G удовлетворяет всем условиям теоремы 5.

Теорема доказана.

Далее нам понадобится следующая лемма

Лемма. *На плоскости R^2 существует такое семейство $\{X_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2^\mathfrak{c}$ линейно связных, локально линейно связных подмножеств, что для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, пространства X_{s_1} и X_{s_2} не гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть $\{A_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2^\mathfrak{c}$ — такое семейство нульмерных подмножеств отрезка $[0,1]$, что для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ пространства A_{s_1} и A_{s_2} не гомеоморфны [9]. Положим:

$$X_s = \{(x, y) \in R^2\colon x \in A_s \subset [0,1],\ y = 0\} \cup \{(x, y) \in R^2\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 < y \leqslant 1\}, \quad s \in S.$$

Нетрудно видеть, что для любого $s \in S$ пространство X_s линейно связно и локально линейно связно, и для любых $s_1, s_2 \in S$ пространство X_{s_1} гомеоморфно пространству X_{s_2} в том и только том случае, если пространство A_{s_1} гомеоморфно пространству A_{s_2}, то есть, если $s_1 = s_2$. Таким образом, семейство $\{X_s\}$, $s \in S$ удовлетворяет всем условиям леммы.

Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть G — абелева группа и пусть $|G| \geqslant \mathfrak{c}$. Тогда существует такое семейство $\{\mu_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2^{\mathfrak{c}}$ метризуемых топологий на группе G, совместимых с ее групповой структурой, что:*

1) *для любого $s \in S$ группа (G, μ_s) локально сепарабельна;*

2) *для любого $s \in S$ группа (G, μ_s) локально линейно связна;*

3) *для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, группы (G, μ_{s_1}) и (G, μ_{s_2}) не гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть, как и в доказательстве теоремы 5, $G_0 \subseteq G$ — такая подгруппа группы G, что $|G_0| = \mathfrak{c}$ и G_0 является абелевой группой со слоем Z или Z_q, где $q \geqslant 2$ — некоторое целое число. Пусть X — произвольная база группы G_0. Рассмотрим семейство $\{X_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2^{\mathfrak{c}}$ линейно связных локально линейно связных подмножеств плоскости R^2, построенных в доказательстве леммы. Так как для любого $s \in S$, $|X_s| = \mathfrak{c}$, то для каждого $s \in S$ существует такая метризуемая топология ν_s на множестве X, что пространство (X, ν_s) гомеоморфно пространству X_s. Далее, в силу теоремы 3, для каждого $s \in S$ существует такая метризуемая топология $\mu_s^{(0)}$ группы G_0, совместимая с ее групповой структурой, что:

1^0) $\mu_s^{(0)}|_X = \nu_s$,

2^0) множество X является замкнутым подмножеством группы $(G_0, \mu_s^{(0)})$,

3^0) группа $(G_0, \mu_s^{(0)})$ локально линейно связна.

Пусть теперь μ_s, $s \in S$ — такая метризуемая топология группы G, совместимая с ее групповой структурой, что:

$$\mu_s|_{G_0} = \mu_s^{(0)} \tag{1}$$

и

(2) группа G_0 является открытой подгруппой группы (G, μ_s).

Из свойств 1^0, 3^0 и формул (1), (2) непосредственно вытекает, что семейство топологий $\{\mu_s\}$, $s \in S$ удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы 6. Далее дословно проходят рассуждения последней части доказательства теоремы 5.

Теорема доказана.

Литература

[1] R. D. Anderson and J. E. Keisler, *An example in dimension theory*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), стр. 709–713.

[2] В. К. Бельнов, *О свободных абелевых метризуемых группах*, ДАН СССР 202 (4) 1972.

[3] — *Некоторые теоремы о свободных абелевых метризуемых группах*, Сибирский математический журнал 12 (6) (1972), стр. 1213–1228.

[4] Н. Бурбаки, *Общая топология. Топологические группы, числа и связанные с ними пространства*, 1969.

[5] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, New York 1960.

[6] В. Гуревич, Г. Волмэн, *Теория размерности*, 1948.

[7] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Berlin 1963.

[8] S. Kakutani, *Über die metrisation der topologischen Gruppen*, Proc. Acad. Japan 12 (1936), стр. 82–84.

[9] К. Куратовский, *Топология I*, 1966.

[10] А. Г. Курош, *Теория групп*, 1967.

[11] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Москва 1954.

Reçu par la Rédaction le 25. 9. 1972