$\aleph_0$-kategorische zyklenbeschränkte Graphen (1)

von

Bernd Dahn (Berlin) (2)

Abstract. In this paper we construct the class of all at most countable girth-restricted graphs with $\aleph_0$-categorical elementary theories. Moreover the class of all at most countable trees with $\aleph_0$-categorical elementary theories is constructed. It is proved that for every tree $\mathfrak{A}$ $Th(\mathfrak{A})$ is $\aleph_0$-categorical iff $F_2(Th(\mathfrak{A}))$ is finite. If there is a natural number n such that the length of each branch of the tree $\mathfrak{A}$ is less than n the finiteness of $F_1(Th(\mathfrak{A}))$ is sufficient for the $\aleph_0$-categoricity of $Th(\mathfrak{A})$.

In Abschnitt II (III) dieser Arbeit wird die Klasse aller der höchstens abzählbaren zyklenbeschränkten Graphen (Bäume) konstruiert, deren Theorie $\aleph_0$-kategorisch ist. Dabei heißt ein Graph zyklenbeschränkt, wenn er nur Kreise universell beschränkter Länge enthält.

Ferner wird in Abschnitt III gezeigt, daß die Endlichkeit von $F_2(Th(\mathfrak{A}))$ für die $\aleph_0$-Kategorizität von $Th(\mathfrak{A})$ hinreichend ist, falls $\mathfrak{A}$ ein Baum ist.

Abschnitt I enthält vorbereitende Sätze über $\aleph_0$-kategorische Theorien.

Ist T eine elementare Theorie, so sei $\mathfrak{F}_n(T)$ die Menge aller Formeln der Sprache von T, die höchstens die Variablen $x_0, \ldots, x_{n-1}$ frei enthalten. Für beliebige Ausdrücke $H_0, H_1 \in \mathfrak{F}_n(T)$ wird definiert: $H_0 \equiv H_1 \bmod T \underset{\mathrm{df}}{=} T \vdash H_0 \Leftrightarrow H_1$

$$[H_0] \underset{\mathrm{df}}{=} \{H\colon\ H \in \mathfrak{F}_n(T) \text{ und } H \equiv H_0 \bmod T\}\,.$$

Ist T vollständig und widerspruchsfrei so bildet die Menge dieser Klassen modulo T bekanntlich eine Boolesche Algebra $F_n(T)$, wenn man die Booleschen Operationen repräsentantenweise durch die entsprechenden aussagenlogischen Funktoren definiert.

---

(1) Eine Kurzfassung dieser Arbeit erschien unter dem gleichen Titel in Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 21 (1973), s. 293–298.

(2) Der Verfasser ist Herrn Dr. Hauschild für zahlreiche Anregungen sowie für die Durchsicht des Manuskripts zu besonderem Dank verpflichtet. Für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse sei auch Herrn Dr. Rautenberg, Herrn Dr. Herre sowie Fräulein Fuchs gedankt.

Ist $\mathfrak{A}$ eine algebraische Struktur, so versteht man unter $Th(\mathfrak{A})$ die Menge der in $\mathfrak{A}$ gültigen Aussagen der durch die Signatur von $\mathfrak{A}$ festgelegten elementaren Sprache. Wie in [4] heißt $\mathfrak{A}$ $\aleph_0$-kategorisch, wenn $Th(\mathfrak{A})$ $\aleph_0$-kategorisch ist, d.h. wenn alle abzählbaren zu $\mathfrak{A}$ elementaräquivalenten Strukturen isomorph sind. $|\mathfrak{A}|$ bezeichne die Trägermenge von $\mathfrak{A}$. Sind $a_0, \ldots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$, so ist $(\mathfrak{A}, a_0, \ldots, a_{n-1})$ die aus $\mathfrak{A}$ durch Adjunktion von Konstanten für $a_0, \ldots, a_{n-1}$ entstehende Struktur (für eine genaue Definition siehe [1], S. 68).

Ryll-Nardzewski charakterisierte die $\aleph_0$-kategorischen Theorien höchstens abzählbarer Signatur in [5] durch das folgende

THEOREM. *T sei eine vollständige und widerspruchsfreie Theorie. Dann ist T genau dann $\aleph_0$-kategorisch, wenn $F_n(T)$ für jedes $n = 1, 2, \ldots$ endlich ist.*

Im folgenden seien alle auftretenden Signaturen höchstens abzählbar.

1. $\aleph_0$-kategorische Modelle.

LEMMA 1.1. *Sind $a_0, \ldots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ und ist $\mathfrak{A}$ $\aleph_0$-kategorisch, so ist auch $(\mathfrak{A}, a_0, \ldots, a_{n-1})$ $\aleph_0$-kategorisch.*

Man beweist Lemma 1.1 indem man zeigt, daß die Endlichkeit von $F_{m+n}(Th(\mathfrak{A}))$ die Endlichkeit von $F_m(Th(\mathfrak{A}, a_0, \ldots, a_{n-1}))$ impliziert.

Statt $(\mathfrak{A}, a_0, \ldots, a_{n-1}) \equiv (\mathfrak{A}, a'_0, \ldots, a'_{n-1})$ — hier steht das Zeichen $\equiv$ für elementare Äquivalenz — werden wir auch

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \sim (a'_0, \ldots, a'_{n-1}) \bmod \mathfrak{A} \text{ schreiben.}$$

Man zeigt leicht

LEMMA 1.2. *$F_n(Th(\mathfrak{A}))$ ist genau dann endlich, wenn $\sim \bmod \mathfrak{A}$ in $|\mathfrak{A}|^n$ nur endlich viele Äquivalenzklassen erzeugt.*

$\mathfrak{A}$ heißt in $\mathfrak{A}'$ *definierbar* genau dann, wenn $|\mathfrak{A}|$ eine in $\mathfrak{A}'$ definierbare Teilmenge von $|\mathfrak{A}'|$ ist und wenn die Funktionen und Prädikate von $\mathfrak{A}$ Einschränkungen von in $\mathfrak{A}'$ definierbaren Funktionen bzw. Prädikaten auf $|\mathfrak{A}|$ sind.

LEMMA 1.3. *Ist $\mathfrak{A}$ definierbar in $\mathfrak{A}'$ und ist $\mathfrak{A}'$ $\aleph_0$-kategorisch, so ist auch $\mathfrak{A}$ $\aleph_0$-kategorisch.*

Um Lemma 1.3 zu beweisen, zeigt man, daß $F_n(Th(\mathfrak{A}))$ endlich ist, falls $F_n(Th(\mathfrak{A}'))$ endlich ist.

$\{\mathfrak{A}_i\colon i \in I\}$ sei eine Familie von Relationalstrukturen gleicher Signatur (d.h. die gemeinsame Signatur aller $\mathfrak{A}_i$ enthält keine Funktionssymbole). Es sei $\mathfrak{A}_i = (|\mathfrak{A}_i|, r_i^\nu)_{\nu<\alpha}$ für eine gewisse Ordinalzahl $\alpha \leqslant \omega$. Ist $C = \bigcup_{\substack{i,j \in I\\ i \neq j}} (|\mathfrak{A}_i| \cap |\mathfrak{A}_j|)$, so definieren wir

$$\bigcup_{i\in I}^{C} \mathfrak{A}_i \underset{\mathrm{df}}{=} \Big(\bigcup_{i\in I} |\mathfrak{A}_i|, \bigcup_{i\in I} r_i^\nu\Big)_{\nu<\alpha}.$$

Ist die Menge C durch den Kontext eindeutig bestimmt, so wird mitunter $\bigcup_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ an Stelle von $\bigcup_{i\in I}^{C} \mathfrak{A}_i$ geschrieben. $\bigcup_{i\in I}^{C} A_i$ wird als *C-Komposition* von $\{\mathfrak{A}_i\colon i \in I\}$ bezeichnet.

$\langle\mathfrak{A}\rangle$ bezeichne den Isomorphietyp der Struktur $\mathfrak{A}$.

THEOREM 1. (Kompositionstheorem). *$\{\mathfrak{A}_i\colon i \in I\}$ sei eine Familie von höchstens abzählbaren $\aleph_0$-kategorischen Relationalstrukturen, so daß $\{\langle\mathfrak{A}_i\rangle\colon i \in I\}$ endlich ist. Ferner sei $C = \bigcup_{\substack{i,j\in I\\ i\neq j}} (|\mathfrak{A}_i| \cap |\mathfrak{A}_j|)$ eine endliche Menge. Dann ist $\bigcup_{i\in I}^{C} \mathfrak{A}_i$ $\aleph_0$-kategorisch.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{A} = \bigcup_{i\in I}^{C} \mathfrak{A}_i$, $C = \{c_\lambda\colon \lambda < m\}$. $a_0, \ldots, a_{n-1}, a'_0, \ldots, a'_{n-1}$ seien Elemente aus $|\mathfrak{A}|$. Wir definieren: $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \mathrel{\hat{=}} (a'_0, \ldots, a'_{n-1})$ genau dann, wenn

i) Für alle $\mu, \nu < n$ gilt: Es gibt genau dann ein $i \in I$, so daß $a_\mu, a_\nu \in |\mathfrak{A}_i|$, wenn es ein $j \in I$ mit $a'_\mu, a'_\nu \in |\mathfrak{A}_j|$ gibt

ii) Sind $a_{\mu_0}, \ldots, a_{\mu_\nu} \in |\mathfrak{A}_i|$, so existiert ein $j \in I$, so daß $a'_{\mu_0}, \ldots, a'_{\mu_\nu} \in |\mathfrak{A}_j|$, $|\mathfrak{A}_i| \cap C = |\mathfrak{A}_j| \cap C = \{c_\lambda\colon \lambda \in L\}$ für eine gewisse Menge L und $(\mathfrak{A}_i, c_\lambda, a_{\mu_0}, \ldots, a_{\mu_\nu})_{\lambda\in L} \equiv (\mathfrak{A}_j, c_\lambda, a'_{\mu_0}, \ldots, a'_{\mu_\nu})_{\lambda\in L}$. Wie man leicht nachprüft, ist $\hat{=}$ eine Äquivalenzrelation. Man bemerkt, daß aus $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \mathrel{\hat{=}} (a'_0, \ldots, a'_{n-1})$ im Fall $a_\mu \in C$ $a_\mu = a'_\mu$ folgt. Beachtet man dann noch, daß aus $a_\mu \notin C$ folgt, daß es genau ein $i \in I$ mit $a_\mu \in |\mathfrak{A}_i|$ und genau ein $j \in I$ mit $a'_\mu \in |\mathfrak{A}_j|$ gibt, so bedarf es nur noch kombinatorischer Überlegungen um sich davon zu überzeugen, daß $\hat{=}$ in $|\mathfrak{A}|^n$ nur endlich viele Äquivalenzklassen erzeugt.

Nun wird gezeigt, daß $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \mathrel{\hat{=}} (a'_0, \ldots, a'_{n-1})$ die Existenz eines Automorphismus φ von $\mathfrak{A}$ mit $\varphi(a_\mu) = a'_\mu$ $(\mu < n)$ und $\varphi(c) = c$ $(c \in C)$ zur Folge hat. Ferner gibt es zu jedem $i \in I$ genau ein $j \in I$, so daß φ $|\mathfrak{A}_i|$ auf $|\mathfrak{A}_j|$ abbildet. Der Beweis erfolgt induktiv über n.

1) $(a_0) \mathrel{\hat{=}} (a'_0)$.

Es sei $a_0 \in |\mathfrak{A}_i|$, $a'_0 \in |\mathfrak{A}_j|$, $|\mathfrak{A}_i| \cap C = |\mathfrak{A}_j| \cap C = \{c_\lambda\colon \lambda \in L\}$ und

$$(\mathfrak{A}_i, c_\lambda, a_0)_{\lambda\in L} \equiv (\mathfrak{A}_j, c_\lambda, a'_0)_{\lambda\in L}.$$

Nach Lemma 1.1 ist $(\mathfrak{A}_i, c_\lambda, a_0)_{\lambda\in L}$ $\aleph_0$-kategorisch. Folglich gibt es einen Isomorphismus ψ von $\mathfrak{A}_i$ auf $\mathfrak{A}_j$ mit $\psi(a_0) = a'_0$ und $\psi(c_\lambda) = c_\lambda$ $(\lambda \in L)$. Durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{wenn } x \in |\mathfrak{A}_i|, \\ \psi^{-1}(x) & \text{wenn } x \in |\mathfrak{A}_j| - |\mathfrak{A}_i|, \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

wird ein Automorphismus φ von $\mathfrak{A}$ mit $\varphi(a_0) = a'_0$, $\varphi(c) = c$ $(c \in C)$ definiert.

2) $(a_0, \dots, a_n) \mathrel{\hat{=}} (a'_0, \dots, a'_n)$ $(n > 0)$.

Offenbar gilt dann auch $(a_0, \dots, a_{n-1}) \mathrel{\hat{=}} (a'_0, \dots, a'_{n-1})$. Ist $a_n \in C$, so ist $a_n = a'_n$ und der nach Induktionsvoraussetzung existierende Automorphismus von $\mathfrak{A}$ leistet das Verlangte. Man kann also annehmen, daß es ein eindeutig bestimmtes $i \in I$ mit $a_n \in |\mathfrak{A}_i|$ gibt.

Es sei $\{\mu_0, \dots, \mu_\nu\} = \{\mu\colon \mu \leqslant n \text{ und } a_\mu \in |\mathfrak{A}_i|\}$.

Wegen $(a_0, \dots, a_n) \mathrel{\hat{=}} (a'_0, \dots, a'_n)$ existiert ein $j \in I$ und eine Menge $L \subseteq \{\mu\colon \mu < m\}$, so daß $a'_{\mu_0}, \dots, a'_{\mu_\nu} \in |\mathfrak{A}_j|$, $|\mathfrak{A}_i| \cap C = |\mathfrak{A}_j| \cap C = \{c_\lambda\colon \lambda \in L\}$ und $(\mathfrak{A}_i, c_\lambda, a_{\mu_0}, \dots, a_{\mu_\nu})_{\lambda \in L} \equiv (\mathfrak{A}_j, c_\lambda, a'_{\mu_0}, \dots, a'_{\mu_\nu})_{\lambda \in L}$. Da $(\mathfrak{A}_i, c_\lambda, a_{\mu_0}, \dots, a_{\mu_\nu})_{\lambda \in L}$ nach Lemma 1.1 $\aleph_0$-kategorisch ist, existiert ein Isomorphismus ψ von $\mathfrak{A}_i$ auf $\mathfrak{A}_j$ mit $\psi(c_\lambda) = c_\lambda$ $(\lambda \in L)$, $\psi(a_{\mu_0}) = a'_{\mu_0}, \dots, \psi(a_{\mu_\nu}) = a'_{\mu_\nu}$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Automorphismus φ' von $\mathfrak{A}$ mit $\varphi'(c) = c$ $(c \in C)$ und $\varphi'(a_\mu) = a'_\mu$ $(\mu < n)$. Ferner gibt es eindeutig bestimmte Elemente $k, l \in I$, so daß φ' $|\mathfrak{A}_i|$ auf $|\mathfrak{A}_k|$ und $|\mathfrak{A}_l|$ auf $|\mathfrak{A}_j|$ abbildet (s. Fig. 1).

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_i \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dd, "\varphi'"'] & & \mathfrak{A}_j \\
& \circlearrowright & \\
\mathfrak{A}_k & & \mathfrak{A}_l \arrow[ll, "\varphi"] \arrow[uu, "\varphi'"']
\end{tikzcd}$$

Fig. 1

Zur Konstruktion von φ setzt man zunächst $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in |\mathfrak{A}_i|$. Da die Eigenschaft von φ' für $\mu < n$ a_μ in a'_μ zu überführen und C identisch auf sich abzubilden auf φ übertragen werden soll, ist es zweckmäßig, so oft wie möglich $\varphi(x) = \varphi'(x)$ zu definieren. Das geht jedoch nicht für $x \in |\mathfrak{A}_l|$, da sonst φ^{-1} nicht immer eindeutig wäre. Andererseits wurde noch nicht festgelegt, welche Elemente durch φ in die Elemente von $|\mathfrak{A}_k|$ überführt werden sollen. Es ist also naheliegend, $|\mathfrak{A}_l|$ durch $\varphi' \circ \psi^{-1} \circ \varphi'$ auf $|\mathfrak{A}_k|$ abzubilden. Man definiert:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{wenn } x \in |\mathfrak{A}_i|\,, \\ \varphi'\big(\psi^{-1}(\varphi'(x))\big) & \text{wenn } x \in |\mathfrak{A}_l| - |\mathfrak{A}_i|\,, \\ \varphi'(x) & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

φ^{-1} ist auch im Fall $j = k$ eindeutig. Dann bildet φ' nämlich sowohl $|\mathfrak{A}_i|$ als auch $|\mathfrak{A}_l|$ auf $|\mathfrak{A}_j|$ ab, woraus nach Induktionsvoraussetzung $l = i$ folgt. $|\mathfrak{A}_l| - |\mathfrak{A}_i|$ wäre also leer.

Offensichtlich ist $\varphi(c) = c$ für alle $c \in C$. Es sei $\mu \leqslant n$. Ist $a_\mu \in |\mathfrak{A}_i|$, so ist nach Definition von ψ $\varphi(a_\mu) = a'_\mu$. Wenn $a_\mu \in |\mathfrak{A}_l|$, so ist $\varphi'(a_\mu) = a'_\mu \in |\mathfrak{A}_j|$. Wegen $a'_n \in |\mathfrak{A}_j|$ gibt es auf Grund der Definition von $\hat{=}$ ein $h \in I$, so daß $a_\mu, a_n \in |\mathfrak{A}_h|$. Da $a_n \notin C$, ist h eindeutig bestimmt und somit $h = i$. Der Fall $a_\mu \in |\mathfrak{A}_i|$ wurde jedoch schon diskutiert. Ist nun a_μ weder aus $|\mathfrak{A}_i|$ noch aus $|\mathfrak{A}_l|$, so ist $\varphi(a_\mu) = \varphi'(a_\mu) = a'_\mu$. Damit ist die Induktionsbehauptung vollständig bewiesen.

Es wurde also gezeigt, daß aus $(a_0, \dots, a_{n-1}) \mathrel{\hat{=}} (a'_0, \dots, a'_{n-1})$ folgt, daß es einen Automorphismus φ von $\mathfrak{A}$ gibt mit $\varphi(a_\mu) = a'_\mu$ $(\mu \leqslant n)$. Folglich sind $(\mathfrak{A}, a_0, \dots, a_{n-1})$ und $(\mathfrak{A}, a'_0, \dots, a'_{n-1})$ isomorph und es ist $(a_0, \dots, a_{n-1}) \sim (a'_0, \dots, a'_{n-1}) \bmod \mathfrak{A}$. Da $\hat{=}$ in $|\mathfrak{A}|^n$ nur endlich viele Äquivalenzklassen erzeugt, erzeugt auch $\sim$ in $|\mathfrak{A}|^n$ nur endlich viele Klassen für jedes $n \geqslant 1$. Mit Hilfe von Lemma 1.2 und dem Theorem von Ryll-Nardzewski ergibt sich die Behauptung des Kompositionstheorems.

2. $\aleph_0$-kategorische zyklenbeschränkte Graphen. Im folgenden werden höchstens abzählbare ungerichtete einfache *Graphen* — d.h. Strukturen (A, r) wobei r eine irreflexiv-symmetrische Relation ist — untersucht. Doppelpunktfreie Kantenzüge werden *Wege* genannt. Unter der *Länge* $l(\mathfrak{W})$ des Weges $\mathfrak{W}$ versteht man die Anzahl seiner Kanten. Wege werden auch als Graphen betrachtet und mitunter wird — wie in Abschnitt 1 für beliebige Relationalstrukturen — der Graph $\mathfrak{W}_0 \cup \mathfrak{W}_1$ für Wege $\mathfrak{W}_0$ und $\mathfrak{W}_1$ betrachtet.

Ist $\mathfrak{W}$ ein Weg und sind a und b Elemente aus $|\mathfrak{W}|$, so sei $\mathfrak{W}(a, b)$ der a und b verbindende Teilweg von $\mathfrak{W}$. Man zeigt leicht

LEMMA 2.1. *$\mathfrak{A}$ sei ein zusammenhängender Graph und enthalte nur Wege, deren Länge $\leqslant n$ ist. $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ seien Wege der Länge n in $\mathfrak{A}$. Dann ist $|\mathfrak{W}| \cap |\mathfrak{W}'| \neq \emptyset$.*

LEMMA 2.2. *Ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Graph und ist $\boldsymbol{F}_2\big(Th(\mathfrak{A})\big)$ endlich, so existiert eine natürliche Zahl m derart, daß für beliebige $a, b \in |\mathfrak{A}|$ gilt: Wenn es einen a und b enthaltenden Weg in $\mathfrak{A}$ gibt* (d.h. wenn a und b in derselben Komponente von $\mathfrak{A}$ liegen), *so existiert in $\mathfrak{A}$ ein a und b enthaltender Weg, dessen Länge $\leqslant m$ ist.*

Beweis. $H_\mu(x_0, x_1)$ sei die in der Sprache von $\mathfrak{A}$ formulierte Aussage, daß es einen Weg der Länge μ gibt, der x_0 und x_1 enthält. Dann genügt es, ein m so anzugeben, daß für jedes k gilt:

$$\mathfrak{A} \models \forall x_0 \forall x_1 \big(H_k(x_0, x_1) \to \bigvee_{\mu \leqslant m} H_\mu(x_0, x_1)\big)\,.$$

Man nehme an, daß das Gegenteil der Fall sei. Dann existiert zu jeder natürlichen Zahl m eine natürliche Zahl k_m und ein Paar $(a_m, b_m) \in |\mathfrak{A}|^2$ derart, daß $(\mathfrak{A}, a_m, b_m) \models H_{k_m}(a_m, b_m) \wedge \bigwedge_{\mu \leqslant m} \neg H_\mu(a_m, b_m)$.

Ist $m' > k_m$, so gilt $(\mathfrak{A}, a_{m'}, b_{m'}) \models \neg H_{k_m}(a_{m'}, b_{m'})$, also sind $(\mathfrak{A}, a_m, b_m)$ und $(\mathfrak{A}, a_{m'}, b_{m'})$ nicht elementaräquivalent. Folglich gibt es im Widerspruch zu Lemma 1.2 unter den Paaren (a_m, b_m) unendlich viele, die bezüglich $\sim$ modulo $\mathfrak{A}$ paarweise nicht äquivalent sind. Q.E.D.

Mit Hilfe von Lemma 2.2 beweist man leicht

LEMMA 2.3. *Ist $\mathfrak{A}$ zyklenbeschränkt* (d.h. es gibt eine Zahl n, so daß alle Kreise von $\mathfrak{A}$ eine Länge $\leqslant n$ haben) *und ist $F_2(Th(\mathfrak{A}))$ endlich, so existiert eine natürliche Zahl m, so daß alle Wege von $\mathfrak{A}$ eine Länge $\leqslant m$ haben.*

Es sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Graph und $W \subseteq |\mathfrak{A}|$. Die Komponenten von $\mathfrak{A} \downarrow (|\mathfrak{A}| - W)$ heißen *Vorfaktoren* von $\mathfrak{A}$ bezüglich W (s. Fig. 2). Nun füge

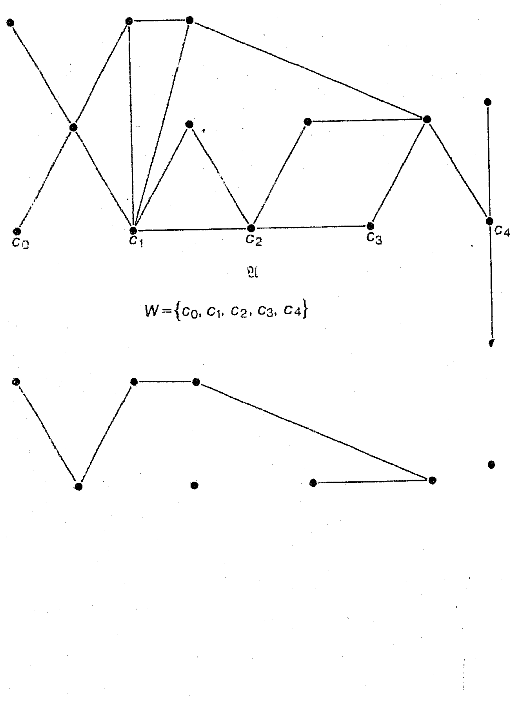

Fig. 2

man zu jedem Vorfaktor von $\mathfrak{A}$ bezüglich W alle die Elemente von W hinzu, die mit einem Knotenpunkt des Vorfaktors durch eine Kante verbunden sind. Die Menge der Kanten des Vorfaktors erweitere man durch

Hinzufügung aller Kanten von $\mathfrak{A}$, die Knoten des Vorfaktors mit Elementen von W verbinden. Die entstehenden Graphen nennt man *Faktoren* von $\mathfrak{A}$ bezüglich W (s. Fig. 3).

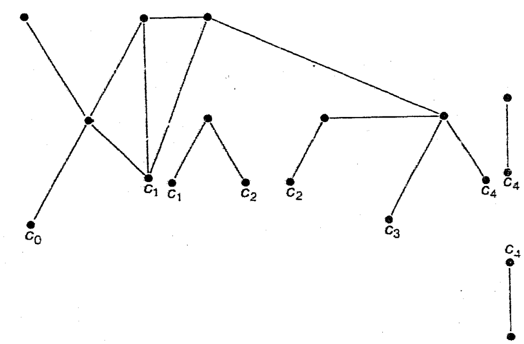

Fig. 3

Ist $\{\mathfrak{F}_i\colon i \in I\}$ die Menge aller Faktoren von $\mathfrak{A}$ bezüglich W und ist $\mathfrak{W} = A \downarrow W$, so ist offenbar $\mathfrak{A} = \mathfrak{W} \cup^W \bigcup^W_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Die Faktoren von $\mathfrak{A}$ bezüglich $\emptyset$ sind gerade die Komponenten von $\mathfrak{A}$. Es gilt

LEMMA 2.4. *$\mathfrak{A}$ sei ein höchstens abzählbarer $\aleph_0$-kategorischer zyklenbeschränkter Graph. W sei eine endliche* (möglicherweise leere) *Teilmenge von $|\mathfrak{A}|$. Dann sind die Faktoren von $\mathfrak{A}$ bezüglich W $\aleph_0$-kategorisch und die Menge der Isomorphietypen der Faktoren von $\mathfrak{A}$ bezüglich W ist endlich.*

Beweis. Es sei $W = \{c_\mu\colon \mu < n\}$. Der Ausdruck $U'(x_0, \ldots, x_{n+1})$ treffe genau dann zu, wenn es einen Weg gibt, der zwar x_0 und x_1, jedoch nicht $x_2, \ldots, x_{n+1}$ enthält und dessen Länge $\leqslant m$ ist, wobei m wie in Lemma 2.3 gewählt ist. Ist $a \in |\mathfrak{A}| - W$, so definiert $U'(x_0, a, c_0, \ldots, c_{n-1})$ gerade den Vorfaktor von $\mathfrak{A}$ bezüglich W, der a enthält. Wie man leicht sieht, definieren die Ausdrücke $U(x_0, a, c_0, \ldots, c_{n-1})$ und $r'(x_0, x_1, a, c_0, \ldots, c_{n-1})$ mit

$$U(x_0, \ldots, x_{n+1}) = U'(x_0, \ldots, x_{n+1}) \vee \exists x_{n+2}\big(r(x_0, x_{n+2}) \wedge U'(x_{n+2}, x_1, \ldots, x_{n+1})\big)$$

und

$$r'(x_0, \ldots, x_{n+2}) = r(x_0, x_1) \wedge \big(U'(x_0, x_2, \ldots, x_{n+2}) \vee U'(x_1, \ldots, x_{n+2})\big)$$

den a enthaltenden Faktor von $\mathfrak{A}$ bezüglich W. Wegen Lemma 1.1 und Lemma 1.3 ergibt sich nun die $\aleph_0$-Kategorizität der Faktoren von $\mathfrak{A}$ bezüglich W. Nun seien $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ beliebige Faktoren von $\mathfrak{A}$ bezüglich W, so daß für gewisse $a \in |\mathfrak{F}|$ und $a' \in |\mathfrak{F}'|$ mit $a, a' \notin W$ $a \sim a' \bmod (\mathfrak{A}, c_0, \ldots, c_{n-1})$

gilt. Auf Grund von Lemma 1.1 gibt es einen Automorphismus φ von $\mathfrak{A}$ mit $\varphi(a) = a'$, $\varphi(c) = c$ $(c \in W)$. Offenbar gilt

$$(\mathfrak{A}, b, a, c_0, \ldots, c_{n-1}) \models U(b, a, c_0, \ldots, c_{n-1})$$

genau dann, wenn

$$\big(\mathfrak{A}, \varphi(b), a', c_0, \ldots, c_{n-1}\big) \models U\big(\varphi(b), a_0', c_0, \ldots, c_{n-1}\big)$$

gilt. Folglich bildet φ $\mathfrak{F}$ isomorph auf $\mathfrak{F}'$ ab. Da $\sim$ modulo $\mathfrak{A}$ nach Lemma 1.2 in $|\mathfrak{A}|$ nur endlich viele Äquivalenzklassen erzeugt, ist die Menge der Isomorphietypen der Faktoren von $\mathfrak{A}$ bezüglich W endlich. Q.E.D.

Ein Graph $\mathfrak{A}$ heißt *zweifach zusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten aus $|\mathfrak{A}|$ einen Kreis in $\mathfrak{A}$ gibt, der diese Punkte enhält. Hauschild, Herre und Rautenberg zeigen in [3].

Lemma 2.5. *$\mathfrak{A}$ sei ein zyklenbeschränkter zweifach zusammenhängender Graph und $\mathfrak{K}$ sei ein Kreis maximaler Länge in $\mathfrak{A}$. Dann ist jeder Kreis von $\mathfrak{A}$, der ganz in einem Faktor von $\mathfrak{A}$ bezüglich $|\mathfrak{K}|$ liegt, kürzer als $\mathfrak{K}$.*

Damit wird Lemma 2.6 gezeigt.

Lemma 2.6. *$\mathfrak{A}$ sei ein zusammenhängender Graph, der nur Wege enthält, deren Länge $\leqslant n$ ist. $\mathfrak{W}$ sei ein Weg der Länge n in $\mathfrak{A}$. Ferner enthalte $\mathfrak{A}$ keinen Kreis der Länge $n+1$. Dann ist jeder Weg, der ganz in einem Faktor von $\mathfrak{A}$ bezüglich $|\mathfrak{W}|$ liegt, kürzer als $\mathfrak{W}$.*

Beweis (³). Es wird angenommen, daß es einen Faktor $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{A}$ bezüglich $|\mathfrak{W}|$ gibt, der einen Weg $\mathfrak{W}'$ der Länge n enthält. Für beliebige $a_0, a_1 \in |\mathfrak{W}'|$ gibt es einen a_0 und a_1 verbindenden Weg $\mathfrak{W}_{a_0a_1}$, der mit $\mathfrak{W}$ höchstens a_0 und a_1 gemeinsam hat. e_0' und e_1' seien die Endpunkte von $\mathfrak{W}'$. Für beliebige $a_1 \in |\mathfrak{W}'|$ sei $V(a_1) = |\mathfrak{W}'| - \{a_1, e_0', e_1'\}$. $\mathfrak{Z}$ sei der Graph, der aus $\mathfrak{W} \cup \mathfrak{W}' \cup \bigcup\limits_{a_1 \in |\mathfrak{W}'|} \bigcup\limits_{a_0 \in V(a_1)} \mathfrak{W}_{a_0a_1}$ entsteht, wenn die vier Endpunkte von $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ identifiziert werden (eventuell auftretende Doppelkanten werden dabei in einfache Kanten überführt). $\mathfrak{Z}$ ist zweifach zusammenhängend. Bei der Konstruktion von $\mathfrak{Z}$ gehen $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ in Kreise $\overline{\mathfrak{W}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{W}}'$ der Länge n über. Würde $\mathfrak{Z}$ einen Kreis enthalten, dessen Länge $>n$ ist, so würde diesem in $\mathfrak{A}$ ein Weg entsprechen, der einen der Endpunkte von $\mathfrak{W}$ oder $\mathfrak{W}'$ enthält und dessen Länge $>n$ ist. Folglich sind $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ Kreise maximaler Länge in $\mathfrak{Z}$. Sei $a \in |\mathfrak{W}'| - |\mathfrak{W}|$ und $b \in |\mathfrak{W}'| - \{a\}$. $\mathfrak{Z}$ enthält dann einen Weg $\overline{\mathfrak{W}}_{ab}$, der a und b verbindet und mit $\overline{\mathfrak{W}}$ höchstens b gemeinsam hat. Folglich liegen alle $b \in |\mathfrak{W}'|$ in demselben Faktor von $\mathfrak{Z}$ bezüglich $|\overline{\mathfrak{W}}|$. Da dieser Faktor aber nach Lemma 2.5 keinen Kreis der Länge n enthalten darf, muß es ein $b \in |\mathfrak{W}| \cap |\mathfrak{W}'|$ geben, so daß $(\mathfrak{W}', b, e_0', e_1') \models r(b, e_0') \vee r(b, e_1')$. Es gelte etwa $(\mathfrak{W}', b, e_0') \models r(b, e_0')$.

(³) Der Beweis dieses Lemmas geht auf Herrn Dr. Hauschild zurück.

$\mathfrak{W}'$ enthält keine Kante, die zwei Punkte von $\mathfrak{W}$ miteinander verbindet. Folglich ist $e_0' \notin |\mathfrak{W}|$. OBdA können wir $n > 2$ voraussetzen. Es gibt also ein $c \in |\mathfrak{W}| \cap |\mathfrak{W}'|$ mit $c \neq b$. c sei so gewählt, daß $\mathfrak{W}(b, c)$ mit $\mathfrak{W}'$ nur b und c gemeinsam hat.

Wäre $l\big(\mathfrak{W}(b, c)\big) > 2$, so würde es ein $d \in |\mathfrak{W}(b, c)| - \{b, c\}$ mit $l\big(\mathfrak{W}(d, b)\big) = 2$ geben und $\mathfrak{W}(d, b) \cup \mathfrak{W}'(b, e_1')$ wäre ein Weg der Länge $n+1$ in $\mathfrak{A}$. Da das unmöglich ist, muß $l\big(\mathfrak{W}(b, c)\big) \leqslant 2$ sein. Wegen $e_0' \in |\mathfrak{F}| - |\mathfrak{W}|$ ist $e_0' \neq c$. c' sei in $\mathfrak{W}'$ zu c benachbart, d.h. es gelte $(\mathfrak{W}', c, c') \models r(c, c')$. Da $\mathfrak{F}$ als Faktor von $\mathfrak{A}$ bezüglich $|\mathfrak{W}|$ keine Kanten enthält, die Punkte von $\mathfrak{W}$ verbinden, ist $c' \notin |\mathfrak{W}|$. Wegen $c' \in |\mathfrak{F}|$ gibt es einen zu $|\mathfrak{W}|$ disjunkten Weg $\mathfrak{W}''$, der von e_0' nach c' führt (s. Fig. 4).

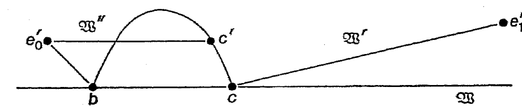

Fig. 4

Man betrachte nun den Weg, der aus $\mathfrak{W}$ entsteht, wenn $\mathfrak{W}(b, c)$ durch $\mathfrak{W}'(b, e_0') \cup \mathfrak{W}'' \cup \mathfrak{W}'(c', c)$ ersetzt wird. Die Länge dieses Weges ist wegen $l(\mathfrak{W}) = n$, $l\big(\mathfrak{W}(b, c)\big) \leqslant 2$ und $l\big(\mathfrak{W}'(b, e_0') \cup \mathfrak{W}'' \cup \mathfrak{W}'(c', c)\big) > 2$ größer als n. Das widerspricht den Voraussetzungen über n. Q.E.D.

Man überlegt sich leicht

Lemma 2.7. *Der zusammenhängende Graph $\mathfrak{A}$ enthalte nur Wege, deren Länge $\leqslant n$ ist. Enthält $\mathfrak{A}$ einen Kreis $\mathfrak{K}$ der Länge $n+1$, so ist $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{K}|$.*

Im folgenden sei $\mathfrak{G}_0 = (\{0\}, \emptyset)$ und $\mathfrak{G}_1 = \big(\{0, 1\}, \{(0, 1), (1, 0)\}\big)$ (s. Fig. 5).

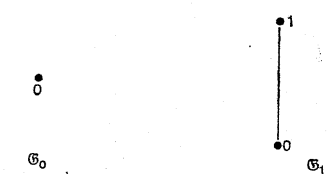

Fig. 5

Die Klasse $\underline{\mathfrak{G}}_z$ ist definiert als die kleinste Klasse von Graphen mit folgenden Eigenschaften.

1) $\mathfrak{G}_0 \in \underline{\mathfrak{G}}_z$ *und* $\mathfrak{G}_1 \in \underline{\mathfrak{G}}_z$.

2) *Ist* $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_z$ *und* $\mathfrak{B} \in \langle\mathfrak{A}\rangle$, *so ist* $\mathfrak{B} \in \underline{\mathfrak{G}}_z$.

3) *Ist* $\{\mathfrak{A}_i\colon i \in I\}$ *ein höchstens abzählbares System von Graphen* $\mathfrak{A}_i \in \underline{\mathfrak{G}}_z$ *und ist* $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{i \in I}^{C} \mathfrak{A}_i$ *für eine endliche Menge* C, *so ist* $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_z$, *falls* $\{\langle\mathfrak{A}_i\rangle\colon i \in I\}$ *endlich ist.*

Es gilt offenbar

LEMMA 2.8. *Ist $\mathfrak{A}$ ein endlicher Graph, so ist $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_z$.*

LEMMA 2.10. *Ist $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_z$, so enthält $\mathfrak{A}$ nur Wege universell beschränkter Länge.*

Man beweist Lemma 2.10 leicht durch Induktion über den Aufbau von $\mathfrak{A}$.

THEOREM 2. *$\underline{\mathfrak{G}}_z$ ist die Klasse aller höchstens abzählbaren zyklenbeschränkten Graphen, deren elementare Theorie $\aleph_0$-kategorisch ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_z$, so ist $\mathfrak{A}$ wegen Lemma 2.10 zyklenbeschränkt. Die $\aleph_0$-Kategorizität von $\mathfrak{A}$ beweist man induktiv über den Aufbau von $\mathfrak{A}$. Dazu benutzt man Theorem 1.

Ist $\mathfrak{A}$ ein $\aleph_0$-kategorischer zyklenbeschränkter Graph, so gibt es wegen Ryll-Nardzewskis Theorem und Lemma 2.3 eine Zahl n, so daß alle Wege von $\mathfrak{A}$ eine Länge $\leqslant n$ haben. $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_z$ wird nun mittels Induktion über n gezeigt. Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial. Ist $\mathfrak{A}$ zusammenhängend und $\mathfrak{W}$ ein Weg der Länge n in $\mathfrak{A}$, so kann man $\mathfrak{A}$ als $|\mathfrak{W}|$-Komposition von $\mathfrak{W}$ und den Faktoren von $\mathfrak{A}$ bezüglich $|\mathfrak{W}|$ darstellen. Enthält $\mathfrak{A}$ einen Kreis der Länge $n+1$, so ist $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_z$ wegen Lemma 2.7 und Lemma 2.8. $\mathfrak{W} \in \underline{\mathfrak{G}}_z$ wegen Lemma 2.8. Die Faktoren von $\mathfrak{A}$ bezüglich $|\mathfrak{W}|$ gehören wegen Lemma 2.6 und Lemma 2.4 sowie auf Grund der Induktionsvoraussetzung zu $\mathfrak{G}_z$ und wegen Lemma 2.4 ist die Menge der Isomorphietypen der Faktoren endlich. Es folgt $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_z$.

Ist $\mathfrak{A}$ nicht zusammenhängend, so zerlegt man $\mathfrak{A}$ in Komponenten. Da die Komponenten gerade die Faktoren bezüglich $\emptyset$ sind, sind sie nach Lemma 2.4 $\aleph_0$-kategorisch und die Menge der Isomorphietypen der Komponenten ist endlich. Da die Komponenten zusammenhängend und zyklenbeschränkt sind, haben wir bereits bewiesen, daß sie zu $\underline{\mathfrak{G}}_z$ gehören. $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_z$ folgt nun unmittelbar aus 3. Q.E.D.

Ein zweifach zusammenhängender Teilgraph $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$ heißt *Zykloid* von $\mathfrak{A}$, wenn jeder Kreis von $\mathfrak{A}$, der mit $\mathfrak{Z}$ wenigstens zwei Punkte gemeinsam hat, ganz zu $\mathfrak{Z}$ gehört.

KOROLLAR 2.1. *Jedes Zykloid des höchstens abzählbaren Graphen $\mathfrak{A}$ sei zyklenbeschränkt. Dann gilt: $\mathfrak{A}$ ist $\aleph_0$-kategorisch genau dann, wenn $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_z$.*

Beweis. $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ seien Zykloide von $\mathfrak{A}$. Ferner sei $a, b \in |\mathfrak{Z}|$, $a', b' \in |\mathfrak{Z}'|$, $a \neq b$, $a' \neq b'$ und $(a, b) \sim (a', b') \bmod \mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ sei $\aleph_0$-kategorisch. Dann gibt es nach Lemma 1.1 einen Automorphismus φ von $\mathfrak{A}$ mit $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. n sei so gewählt, daß jeder Kreis, der ganz in $\mathfrak{Z}$ oder ganz in $\mathfrak{Z}'$ verläuft, eine Länge $\leqslant n$ hat. $U(x_0, x_1, x_2)$ werde genau dann erfüllt, wenn es einen x_0, x_1 und x_2 enthaltenden Kreis gibt, dessen Länge $\leqslant n$ ist. Wie man leicht sieht, definiert $U(x_0, a, b)$ $\mathfrak{Z}$ und $U(x_0, a', b')$ definiert $\mathfrak{Z}'$. Da $(\mathfrak{A}, a, b, c) \models U(c, a, b)$ genau dann gilt, wenn $(\mathfrak{A}, a', b', \varphi(c)) \models U(\varphi(c), a', b')$, bildet φ $\mathfrak{Z}$ isomorph auf $\mathfrak{Z}'$ ab. Daraus folgt, daß es in $\mathfrak{A}$ nur endlich viele Isomorphietypen von Zykloiden gibt, denn $\sim$ modulo $\mathfrak{A}$ erzeugt in $|\mathfrak{A}|^2$ nach Lemma 1.2 nur endlich viele Äquivalenzklassen. Folglich ist $\mathfrak{A}$ zyklenbeschränkt und Korollar 2.1 folgt aus Theorem 2. Q.E.D.

Es sei $\vec{\mathfrak{G}}_0 = (\{0\}, \emptyset)$, $\vec{\mathfrak{G}}_1 = (\{0\}, \{(0,0)\})$ und $\vec{\mathfrak{G}}_2 = (\{0,1\}, \{(0,1)\})$ (s. Fig. 6).

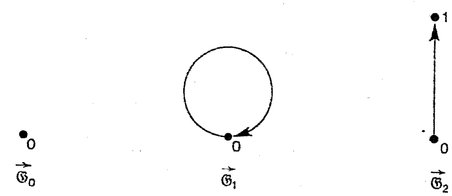

Fig. 6

$\vec{\mathfrak{G}}_z$ sei die kleinste Klasse von Strukturen, so daß

1) *$\vec{\mathfrak{G}}_0, \vec{\mathfrak{G}}_1, \vec{\mathfrak{G}}_2 \in \vec{\mathfrak{G}}_z$.*

2) *Wenn $\mathfrak{A} \in \vec{\mathfrak{G}}_z$ und $\mathfrak{B} \in \langle\mathfrak{A}\rangle$, so $\mathfrak{B} \in \vec{\mathfrak{G}}_z$.*

3) *Ist $\{\mathfrak{A}_i \colon i \in I\}$ ein höchstens abzählbares System von Strukturen $\mathfrak{A}_i \in \vec{\mathfrak{G}}_z$, und ist $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in I}^{C} \mathfrak{A}_i$ für eine endliche Menge C, so ist $\mathfrak{A} \in \vec{\mathfrak{G}}_z$, falls $\{\langle\mathfrak{A}_i\rangle \colon i \in I\}$ endlich ist.*

Analog zu Theorem 2 und Korollar 2.1 zeigt man

KOROLLAR 2.2. *r sei eine zweistellige Relation über der höchstens abzählbaren Menge M. $r'(x_0, x_1)$ sei die durch*

$$\big(r(x_0, x_1) \vee r(x_1, x_0)\big) \wedge \neg x_0 = x_1$$

definierte Relation über M. Dann gilt $(M, r) \in \vec{\mathfrak{G}}_z$ genau dann, wenn (M, r) $\aleph_0$-kategorisch ist und jedes Zykloid des Graphen (M, r') zyklenbeschränkt ist.

3. $\aleph_0$-kategorische Bäume. Graphen, die keine Kreise enthalten, heißen *Bäume*. Ist $\mathfrak{A}$ ein Baum und sind a und b Punkte von $\mathfrak{A}$, so enthält $\mathfrak{A}$ höchstens einen Weg, der a und b verbindet. Falls dieser Weg existiert, wird er mit $[a, b]$ bezeichnet. Man zeigt leicht

LEMMA 3.1. *Der zusammenhängende Baum $\mathfrak{A}$ enthalte nur Wege universell beschränkter Länge. $[e_0, e_1]$ sei ein Weg maximaler Länge in $\mathfrak{A}$. $a \in |[e_0, e_1]|$ sei so gewählt, daß*

$$|l([e_0, a]) - l([a, e_1])| \leqslant 1 .$$

Dann ist a in jedem Weg von $\mathfrak{A}$, dessen Länge maximal ist, enthalten.

Im folgenden seien alle auftretenden Graphen Bäume. Sind $b_0, \ldots, b_n \in |\mathfrak{A}|$ paarweise verschieden und gilt für alle $i < n$ $(\mathfrak{A}, b_i, b_{i+1}) \models r(b_i, b_{i+1})$, so wird $[b_0, b_n]$ auch durch $[b_0, \ldots, b_n]$ bezeichnet. Die Wege $[b_0, \ldots, b_n]$ und $[b'_0, \ldots, b'_{n'}]$ heißen *punktweise äquivalent* modulo $\mathfrak{A}([b_0, \ldots, b_n]$ $\underset{p}{\sim} [b'_0, \ldots, b'_{n'}] \bmod \mathfrak{A})$ wenn $n = n'$ ist und $b_i \sim b'_i \bmod \mathfrak{A}$ für alle $i \leqslant n$.

Für beliebige $a_0, \ldots, a_{n-1}, a'_0, \ldots, a'_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ wird definiert:

$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \hat{=} (a'_0, \ldots, a'_{n-1}) \bmod \mathfrak{A} \underset{\mathrm{df}}{=}$ *Für alle* $\mu, \nu < n$ *existiert* $[a_\mu, a_\nu]$ *genau dann, wenn* $[a'_\mu, a'_\nu]$ *existiert und es gilt*

$$[a_\mu, a_\nu] \underset{p}{\sim} [a'_\mu, a'_\nu] \bmod \mathfrak{A} .$$

Lemma 3.2. *Wenn* $\{\mu_0, \ldots, \mu_\nu\} \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$ *und*

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \hat{=} (a'_0, \ldots, a'_{n-1}) \bmod \mathfrak{A} ,$$

so

$$(a_{\mu_0}, \ldots, a_{\mu_\nu}) \hat{=} (a'_{\mu_0}, \ldots, a'_{\mu_\nu}) \bmod \mathfrak{A} .$$

Ist $M \subseteq |\mathfrak{A}|$, so sei $E(M) = \bigcup_{a,b \in M} |[a, b]|$ mit $|[a, b]| = \emptyset$ falls $[a, b]$ nicht existiert.

Lemma 3.3 (3.3′). *Wenn* $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \hat{=} (a'_0, \ldots, a'_{n-1}) \bmod \mathfrak{A}$, *so gibt es zu jedem* $a_n \in E(\{a_\mu \colon \mu < n\})$ *(zu jedem* $a'_n \in E(\{a'_\mu \colon \mu < n\})$*) ein* $a'_n \in E(\{a'_\mu \colon \mu < n\})$ *(ein* $a_n \in E(\{a_\mu \colon \mu < n\})$*), so daß*

$$(a_0, \ldots, a_n) \hat{=} (a'_0, \ldots, a'_n) \bmod \mathfrak{A} .$$

Der Leser überlegt sich den Beweis von Lemma 3.3 bzw. Lemma 3.3 leicht selbst.

Lemma 3.4. $F_1(Th(\mathfrak{A}))$ *sei endlich. Dann gilt für jedes* $b_1 \in |\mathfrak{A}|$: *Wenn* $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \hat{=} (a'_0, \ldots, a'_{n-1}) \bmod \mathfrak{A}$ *und wenn es ein* $b_0 \in E(\{a_\mu \colon \mu < n\})$ *gibt mit* $(\mathfrak{A}, b_0, b_1) \models r(b_0, b_1)$, *so existiert ein* b'_1, *so daß*

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}, b_1) \hat{=} (a'_0, \ldots, a'_{n-1}, b'_1) \bmod \mathfrak{A} .$$

Beweis. Ist $b_1 \in E(\{a_\mu \colon \mu < n\})$, so wird b'_1 nach Lemma 3.3 bestimmt. Nun wird $b_1 \notin E(\{a_\mu \colon \mu < n\})$ vorausgesetzt. b'_0 sei gemäß Lemma 3.3 so gewählt, daß $(a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0) \hat{=} (a'_0, \ldots, a'_{n-1}, b'_0) \bmod \mathfrak{A}$. Da $F_1(Th(\mathfrak{A}))$ endlich ist, existiert zu jedem $a \in |\mathfrak{A}|$ bis auf Äquivalenz genau ein Ausdruck $D_a \in \mathfrak{F}_1(Th(\mathfrak{A}))$ derart, daß $[D_a]$ Atom in $F_1(Th(\mathfrak{A}))$ ist und $(\mathfrak{A}, a) \models D_a(a)$. Dann gilt $a \sim b \bmod \mathfrak{A}$ genau dann, wenn $(\mathfrak{A}, b) \models D_a(b)$.

In $E(\{a_\mu \colon \mu < n\})$ möge es genau l Elemente c geben, so daß

$$(\mathfrak{A}, b_0, c) \models D_{b_1}(c) \wedge r(b_0, c) .$$

Es wird gezeigt, daß es in $E(\{a'_\mu \colon \mu < n\})$ höchstens l Elemente c' gibt mit $(\mathfrak{A}, b'_0, c') \models D_{b_1}(c') \wedge r(b'_0, c')$. Dazu nimmt man an, daß das nicht der Fall ist. Es seien etwa $c'_0, \ldots, c'_l$ paarweise verschiedene Elemente aus $E(\{a'_\mu \colon \mu < n\})$ mit $(\mathfrak{A}, b'_0, c'_\lambda) \models D_{b_1}(c'_\lambda) \wedge r(b'_0, c'_\lambda)$. Durch sukzessives Anwenden von Lemma 3.3′ wählt man Elemente $c_0, \ldots, c_l \in E(\{a_\mu \colon \mu < n\})$, so daß

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, c_l, \ldots, c_1) \hat{=} (a'_0, \ldots, a'_{n-1}, b'_0, c'_0, \ldots, c'_l) \bmod \mathfrak{A} .$$

Wegen $l([c_\lambda, c_\varkappa]) = l([c'_\lambda, c'_\varkappa])$ sind die c_λ auch paarweise verschieden und aus $[c_\lambda, b_0] \underset{p}{\sim} [c'_\lambda, b'_0] \bmod \mathfrak{A}$ folgt für alle $\lambda \leqslant l$

$$(\mathfrak{A}, b_0, c_\lambda) \models D_{b_1}(c_\lambda) \wedge r(b_0, c_\lambda) .$$

Das steht aber im Widerspruch zu den Voraussetzungen über l. Folglich gibt es höchstens l Elemente $c' \in E(\{a'_\mu \colon \mu < n\})$ mit $(\mathfrak{A}, b'_0, c') \models D_{b_1}(c') \wedge \wedge r(b'_0, c')$. Wegen $(\mathfrak{A}, b_0, b_1) \models D_{b_1}(b_1) \wedge r(b_0, b_1)$ gilt

$$(\mathfrak{A}, b_0) \models \exists_{l+1} x_0 (D_{b_1}(x_0) \wedge r(b_0, x_0)) \ (^4) .$$

Daraus folgt auf Grund von $b_0 \sim b'_0 \bmod \mathfrak{A}$ auch

$$(\mathfrak{A}, b'_0) \models \exists_{l+1} x_0 (D_{b_1}(x_0) \wedge r(b'_0, x_0)) .$$

Dann gibt es aber wenigstens ein $b'_1 \in |\mathfrak{A}| - E(\{a'_\mu \colon \mu < n\})$, so daß

$$(\mathfrak{A}, b'_0, b'_1) \models D_{b_1}(b'_1) \wedge r(b'_0, b'_1) .$$

Dieses b'_1 leistet das Verlangte.

Lemma 3.5. $\mathfrak{A}$ *sei ein beliebiger Baum,* $F_1(Th(\mathfrak{A}))$ *sei endlich und es gelte* $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \hat{=} (a'_0, \ldots, a'_{n-1}) \bmod \mathfrak{A}$. *Dann gibt es zu jedem* $a_n \in |\mathfrak{A}|$ *ein* $a'_n \in |\mathfrak{A}|$, *so daß*

$$(a_0, \ldots, a_n) \hat{=} (a'_0, \ldots, a'_n) \bmod \mathfrak{A} .$$

Beweis. Gibt es kein $\nu < n$, so daß $\mathfrak{A}$ einen a_ν und a_n enthaltenden Weg enthält, so setzt man $a'_n = a_n$. Andernfalls gibt es ein $\nu < n$ und Elemente $b_0, \ldots, b_m \in |\mathfrak{A}|$, so daß $[a_\nu, a_n]$ existiert und $[a_\nu, a_n] = [b_0, \ldots, b_m]$, also insbesondere $a_\nu = b_0$ und $a_n = b_m$. Durch sukzessives Anwenden von Lemma 3.5 findet man Elemente $b'_0, \ldots, b'_m$, so daß für alle $\mu \leqslant m$ $(a_0, \ldots, a_{n-1}, b_\mu) \hat{=} (a'_0, \ldots, a'_{n-1}, b'_\mu) \bmod \mathfrak{A}$. $a'_n = b'_m$ erfüllt dann die Behauptung von Lemma 3.5. Q.E.D.

$\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ seien definiert wie in Abschnitt II (vgl. Fig. 6).

$\underline{\mathfrak{G}}_B$ *sei die kleinste Klasse von Graphen, so daß*

1B) $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1 \in \underline{\mathfrak{G}}_B$.

2B) *Ist* $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_B$ *und* $\mathfrak{B} \in \langle \mathfrak{A} \rangle$, *so ist* $\mathfrak{B} \in \underline{\mathfrak{G}}_B$.

3B) *Ist* $\{\mathfrak{A}_i \colon i \in I\}$ *ein höchstens abzählbares System von Graphen* $\mathfrak{A}_i \in \underline{\mathfrak{G}}_B$ *und ist* $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in I}^{C} \mathfrak{A}_i$, *so ist* $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_B$, *falls* $\{\langle \mathfrak{A}_i \rangle \colon i \in I\}$ *endlich ist und die Menge* C *höchstens ein Element enthält.*

---

(4) "$\exists_{l+1} x_0 \ldots$" steht hier für "es gibt $l+1$ Elemente x_0, so daß ...".

THEOREM 3. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.*

i) $\mathfrak{A}$ *ist ein höchstens abzählbarer Baum, dessen elementare Theorie* $\aleph_0$*-kategorisch ist.*

ii) $\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{G}}_B$.

iii) $\mathfrak{A}$ *ist ein höchstens abzählbarer Baum, der nur Wege universell beschränkter Länge enthält und* $F_1(Th(\mathfrak{A}))$ *ist endlich.*

iv) $\mathfrak{A}$ *ist ein höchstens abzählbarer Baum und* $F_2(Th(\mathfrak{A}))$ *ist endlich.*

Beweis. Wegen Theorem 2 und $\underline{\mathfrak{G}}_B \subseteq \underline{\mathfrak{G}}_z$ folgt i) aus ii). Mit Hilfe des Theorems von Ryll-Nardzewski erhält man, daß i) iv) zur Folge hat und aus iv) folgt iii) wegen Lemma 2.2.

$\mathfrak{A}$ erfülle i). Es wird nun gezeigt, daß dann auch ii) gilt. Da i) iii) impliziert, gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $l(\mathfrak{W}) \leqslant n$ für alle Wege $\mathfrak{W}$, die in $\mathfrak{A}$ enthalten sind. ii) wird mittels vollständiger Induktion über n bewiesen. Dazu zerlegt man $\mathfrak{A}$ zunächst in Komponenten, die nach Lemma 2.4 $\aleph_0$-kategorisch sind. Da es — ebenfalls auf Grund von Lemma 2.4 — nur endlich viele Isomorphietypen von Komponenten von $\mathfrak{A}$ gibt, genügt es wegen 3B) zu zeigen, daß die Komponenten zu $\underline{\mathfrak{G}}_B$ gehören. Nun wählt man in der gegebenen Komponente einen Punkt a wie in Lemma 3.1 und zerlegt die Komponente in Faktoren bezüglich $\{a\}$. Man überlegt sich leicht, daß jeder Weg, der ganz in einem solchen Faktor verläuft, eine Länge $<n$ hat. Wegen Lemma 2.4 und der Induktionsvoraussetzung gehören die Faktoren alle zu $\underline{\mathfrak{G}}_B$. Berücksichtigt man dann noch 3B), so erhält man unmittelbar, daß die gegebene Komponente des Baumes $\mathfrak{A}$ zu $\underline{\mathfrak{G}}_B$ gehört. Das vollendet den Beweis von ii).

Es bleibt zu zeigen, daß iii) i) zur Folge hat. $\mathfrak{A}$ erfülle iii) und $n > 0$ sei beliebig vorgegeben. Ferner sei

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \,\hat{=}\, (a_0', \ldots, a_{n-1}') \operatorname{mod} \mathfrak{A}\,.$$

Mit Hilfe des Ehrenfeucht-Spiels (vgl. [2]) wird

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \sim (a_0', \ldots, a_{n-1}') \operatorname{mod} \mathfrak{A} \text{ gezeigt}\,.$$

Nach k Runden seien die Elemente $a_n, \ldots, a_{n+k-1}, a_n', \ldots, a_{n+k-1}'$ so ausgewält, daß $(a_0, \ldots, a_{n+k-1}) \,\hat{=}\, (a_0', \ldots, a_{n+k-1}') \operatorname{mod} \mathfrak{A}$. Dann findet Spieler II nach Lemma 3.5 zu jedem von Spieler I gewählten a_{n+k} (bzw. zu jedem a_{n+k}') ein a_{n+k}' (bzw. ein a_{n+k}), so daß

$$(a_0, \ldots, a_{n+k}) \,\hat{=}\, (a_0', \ldots, a_{n+k}') \operatorname{mod} \mathfrak{A}\,.$$

Wegen $[a_\mu, a_\nu] \underset{p}{\sim} [a_\mu', a_\nu'] \operatorname{mod} \mathfrak{A}$ $(\mu, \nu \leqslant n+k)$ gilt $a_\mu = a_\nu$ bzw. $(\mathfrak{A}, a_\mu, a_\nu) \models r(a_\mu, a_\nu)$ genau dann, wenn $a_\mu' = a_\nu'$ bzw. $(\mathfrak{A}, a_\mu', a_\nu') \models r(a_\mu', a_\nu')$. So kann Spieler II für jedes k das k-rundige Ehrenfeucht-Spiel gewinnen und es ist $(\mathfrak{A}, a_0, \ldots, a_{n-1}) \equiv (\mathfrak{A}, a_0', \ldots, a_{n-1}')$.

Da $\sim \operatorname{mod} \mathfrak{A}$ nach Lemma 1.2 in $|\mathfrak{A}|$ nur endlich viele Klassen erzeugt und $\mathfrak{A}$ nur Wege universell beschränkter Länge enthält, erzeugt auch $\hat{=} \operatorname{mod} \mathfrak{A}$ in $|\mathfrak{A}|^n$ nur endlich viele Klassen. Weil aber aus $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \,\hat{=}\, (a_0', \ldots, a_{n-1}') \operatorname{mod} \mathfrak{A}$, $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \sim (a_0', \ldots, a_{n-1}') \operatorname{mod} \mathfrak{A}$ folgt, ist $F_n(Th(\mathfrak{A}))$ wegen Lemma 1.2 endlich. Aus dem Theorem von Ryll-Nardzewski ergibt sich nun die $\aleph_0$-Kategorizität von $\mathfrak{A}$. Q.E.D.

Theorem 3 läßt sich in ähnlicher Weise wie Theorem 2 für gerichtete Bäume verallgemeinern.

Literaturverzeichnis

[1] J. L. Bell and A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts*, Amsterdam–London 1969.

[2] A. Ehrenfeucht, *An application of games to the completeness problems for formalized theories*, Fund. Math. 49 (1961), pp. 129–141.

[3] K. Hauschild, H. Herre und W. Rautenberg, *Interpretierbarkeit in der Graphentheorie II*, Zeitschrift für mathematische Logik 18 (1972), s. 457–480.

[4] J. G. Rosenstein, *$\aleph_0$-Categoricity of linear orderings*, Fund. Math. 64 (1969), pp. 1–5.

[5] C. Ryll-Nardzewski, *On the categoricity in power $\leqslant \aleph_0$*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 7 (1959), pp. 545–548.

Reçu par la Rédaction le 22. 2. 1972