Quelques remarques sur la définition de l'aire des surfaces.

Par

Henri Lebesgue (Paris).

(Extrait d'une lettre adressée à M. W. Sierpiński)

Je profite de l'occasion de cette lettre pour faire quelques remarques concernant deux intéressants articles, parus au tome VII des Fundamenta, sur la définition de l'aire des surfaces.

Au début du premier de ces articles, M. Fréchet s'efforce de reconstituer la suite des idées qui m'a conduit à la définition de l'aire que j'ai donnée. Il le fait très exactement, je précise cependant pour insister sur le caractère élémentaire et en quelque sorte pratique des considérations qui m'ont servi.

Dès mes premières études de géométrie je n'avais pas été satisfait de la façon dont on nous présentait les calculs de longueurs et d'aires et ceci à cause du raisonnement (?) suivant que colportaient les élèves de ma génération. Soit un triangle ABC, soient D, E, F les milieux de AB, BC, CA.

On a:

$$AB + AC = BD + DE + EF + FC;$$

recommençons la même opération, G, H, I, J, K, L, étant les milieux de DB, BE, DE, FE, EC, FC, on a:

$$AB + AC = BG + GH + HI + IE + EJ + JK + KL + LC.$$

En continuant ainsi, on voit que $AB + AC$ est égale à la longueur d'une ligne brisée en dents de scie extrêmement voisine de BC. Et, admettant implicitement que la longueur d'une courbe est la limite des longueurs des courbes tendant vers elle, nous concluions:

$$AB + AC = BC.$$

Nous démontrions de même que $\pi = 2$, une demi-circonférence de diamètre BC remplaçant la ligne BAC; et nous avions raison de le faire, car le principe, faux, qui nous servait était celui là même sur lequel on basait le calcul de la surface du cylindre, du cône, de la sphère, voire la longueur de la circonférence.

Sur ce dernier point un progrès a été fait, car dans tous les Cours, on définit maintenant la longueur de la circonférence; mais il arrive encore trop souvent que l'on calcule les aires des corps ronds sans les avoir définies. J'ajoute qu'il ne suffit pas, en géométrie élémentaire, de poser une définition logique, mais qu'il convient aussi d'en faire sentir la valeur pratique pour des applications expérimentales, valeur sans laquelle ces définition n'auraient été ni adoptées, ni même construites. Ce serait l'affaire de quelques mots, les cas considérés en géométrie élémentaire étant simples [1]).

Donc, mécontent des exposés de la Géométrie élémentaire, je lus avec un vif intérêt les travaux de Scheeffer, de Jordan. Je fus satisfait en ce qui concerne la définition de la longueur; mais j'appris en même temps que la définition analogue de l'aire avait été démontrée inacceptable par Schwarz. Et voici la suite de mes réflexions, mises en ordre comme on le fait nécessairement dans un examen rétrospectif.

Comment mesure-t-on, de façon approchée, la longueur d'une courbe? En mesurant la longueur de certains polygones voisins de la courbe, du moins s'il s'agit d'une mesure directe; la seule que je considère ici. C'est ce que fait l'arpenteur qui mesure un chemin, par exemple; s'il tenait à exprimer avec une grande précision ce qu'il prétend faire, l'arpenteur dirait sans doute qu'il se propose de mesurer la ligne médiane ou axe du chemin. Dans tous les cas de la pratique on prétend de même mesurer une courbe géométrique déterminée, toujours avec imprécision, par l'objet matériel que l'on

[1]) J'ai eu l'occasion de montrer les simplifications que l'on peut apporter à la définition générale de l'aire quand on se borne à la considération des corps de la géométrie élémentaire dans un article (Sur la définition de l'aire des surfaces. L'Enseignement mathématique X^e année, 1908) qui contient quelques remarques analogues à celles que je formule ici.

a assimilé à une courbe. Puisqu'il s'agit d'une courbe imprécise on ne saurait affirmer que les polygones que l'on utilise sont inscrits dans cette courbe. D'où une première raison de ne pas baser la définition des longueurs des courbes sur les polygones inscrits: mais il y en a une seconde, ou si l'on veut il y a un second point de vue, qui oblige bien plus impérativement à renoncer aux polygones inscrits. C'est que, quelle que soit la précision des expériences, un point ne peut être distingué de ceux qui en sont suffisamment voisins de sorte que différents expérimentateurs, mesurant le même objet, n'utiliseront certainement pas les mêmes polygones; et puisqu'en fait ils obtiennent à peu près le même nombre, il faut que notre définition nous donne des valeurs approchées voisines quand on l'applique en utilisant les points voisins [1]).

Je renonce donc aux polygons inscrits et je veux utiliser les polygones voisins de la courbe à mesurer. Mais, la démonstration de l'égalité fausse $AB+AC=BC$ le prouve, la longueur d'une courbe n'est pas la limite commune des longueurs des suites convergentes des polygones voisins; ainsi, la difficulté signalée par Schwarz pour les aires des surfaces se rencontre maintenant pour la longueur des courbes. Avoir fait surgir une difficulté là où il n'y en avait pas, peut être avantageux; ici, par exemple; le cas des courbes est, en effet, très simple à traiter et nous n'aurons plus pour le cas des surfaces, qu'à imiter ce qui nous aura ainsi réussi pour les courbes.

Il nous faut donc choisir parmi les suites de polygones voisins d'une courbe; nous avons vu que, pour avoir une valeur approchée d'un segment BC, il convient de ne pas choisir le chemin polygonal $BGHIEJKLC$, en d'autres termes, il faut éviter les chemins inutilement compliqués. Cela est bien d'accord avec la technique expérimentale: un arpenteur qui, pour mesurer une route droite mettrait l'origine de sa chaîne d'arpenteur sur le bord droit de la route et l'extrémité sur le bord gauche, puis l'origine au point atteint du bord gauche et l'extrémité sur le bord droit, etc, n'opérerait pas suivant les règles de son art. Donc il nous faut choisir des po-

[1]) D'une façon générale, un énoncé ne peut servir pratiquement que s'il y s'agit de quantités ou de résultats qui varient très peu pour une très petite variation dans les conditions expérimentales; j'ai eu l'occasion d'insister là dessus dans un article *Sur l'équilibre du corps solide* (Nouv. Ann. de Math. 1909).

lygones simples; de là à dire qu'il faut prendre les polygones les plus simples et d'entendre par là les plus courts, il n'y à qu'un pas. On le franchit d'ailleurs nécessairement dès que l'on a observé ceci: du mode de construction des lignes BAC, $BDEFC$, $BGHIEJKLC$,... du début, il résulte que si un nombre l a été obtenu comme limite des longueurs de polygones tendant vers une courbe C, tout nombre supérieur à l peut être obtenu de la même manière. En d'autres termes, les nombres qui peuvent être obtenus comme de telles limites sont tous égaux ou supérieurs à un certain nombre L; cet ensemble de nombres est donc caractérisé par sa limite inférieure L; L est le seul nombre de l'ensemble qui se distingue des autrés, du moins immédiatement.

C'est ainsi que j'ai été amené à modifier la forme de la définition de la longueur d'une courbe C et à dire: cette longueur est la plus petite des limites des longueurs des suites de polygones tendant uniformément vers C.

J'ai ensuite formulé la définition d'une surface par simple analogie, mais les raisons qui m'ont suggéré la définition de la longueur s'appliquaient identiquement, mutatis mutandis, au cas de l'aire.

Ces définitions sont simples et immédiatement compréhensibles pour des commencants, elle peuvent être utilisés dès la géométrie élémentaire ou les débuts du calcul intégral comme je l'ai fait voir dans l'article indiqué plus haut, et leurs rapports avec la pratique sont assez nets et clairs pour que nul ne s'étonne que ces notions permettent de déterminer le nombre de tombereaux de cailloux nécessaires au rechargement d'une route, le poids d'une rampe d'escalier, la quantité de peinture à employer pour peindre une voûte. Ces définitions ne sont pas les seules à présenter ces avantages.

Celles que donne M. Banach dans le second article qui motive ces remarques sont très intéressants et elles conduisent à établir un très remarquable parallélisme entre les propriétés relatives aux longueurs et celles relatives aux aires. J'avais même espéré, au premier coup d'oeil, qu'elles fourniraient une réponse à des questions sur lesquels Jordan avait appelé mon attention et que je signale.

„Je ne suis pas satisfait par ce que vous avez dit de l'aire des surfaces", m'avait déclaré Jordan lorsque je lui portais ma Thèse. Et, sur ma demande, il me fit des objections, que d'ailleurs je m'étais faites moi-même (voir par exemple le § 70 de ma Thèse),

11*

et que je peut résumer ainsi: „Vous dites que vous édifiez, pour la mesure des aires des surfaces, une théorie entièrement analogue à celle de la mesure des longueurs des courbes mais, pourtant, vous laissez sans réponse des problèmes essentiels alors que ces problèmes sont résolus dans le cas des courbes. Une courbe $x = f(t)$; $y = g(t)$; $z = h(t)$ étant donnée, nous savons quelle suite d'opérations il nous faut effectuer sur f, g, h pour reconnaître si la courbe est rectifiable et pour calculer sa longueur finie ou infinie; vous ne dîtes rien du problème analogue pour les surfaces données par 3 relations $x = f(u, v)$; $y = g(u, v)$; $z = h(u, v)$. De là résulte aussi que, tandis que l'on sait construire les formes les plus générales des fonctions $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ relatives aux courbes rectifiables, vous ne nous apprenez pas à former les fonctions $f(u, v)$, $g(u, v)$. $h(u, v)$ donnant des surfaces quarrables".

Ces objections de Jordan sont à coup sûr fondées, encore qu'il y ait peut être quelque illusion à considérer que reconnaître si $f(t)$ est ou non à variation bornée est une opération que nous savons faire et à admettre que nous savons former toutes les fonctions à variation bornée, mais le cas des courbes fait du moins appel à des opérations que nous savons effectuer dans bien des cas.

Avec les définitions que j'ai données il faudrait, pour le premier problème, soit indiquer comment il faut choisir une suite de polyèdres voisins de la surface à mesurer pour que leurs aires tendent vers la plus petite limite possible (et l'on ne sait que bien peu de choses là dessus malgré les pénétrantes recherches de Zoard de Geöcze) ou que l'on sache exprimer l'aire par une intégrale (ce que l'on ne sait faire que dans des cas presque banaux).

En ce qui concerne la seconde question, toutes les théories sont à peu près au même point. Dans toutes on remarque que la longueur d'un segment et l'aire d'un domaine plan sont les racines carrées des sommes des carrés des longueurs et aires des projections, sur les axes de coordonnés rectangulaires s'il s'agit d'un segment, sur les 3 plans de coordonnés s'il s'agit d'un domaine et de là résulte qu'une courbe est rectifiable si, et seulement si, les 3 courbes telles que $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = 0$ le sont, qu'une surface est quarrable si, et seulement si, les trois surfaces telles que $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = 0$ le sont. Mais tandis que l'on sait former les fonctions $f(t)$ répondant à la question, c'est-à dire les fonctions à variation bornée, on n'a pas, jusqu'ici, réussit à construire les couples

$f(u, v)$, $g(u, v)$ cherchés, c'est-à-dire ceux qui définissent ce que M. Banach appelle une correspondance à variation bornée [1]). Et d'ailleurs une fonction, $f(u, v)$ par exemple, figurant dans 2 couples f, g; f, h, cela ne serait pas encore tout à fait suffisant.

[1]) Cette dénomination se trouve en somme déjà dans la communication faite par M. W. H. Young au congrès de Strasbourg.

Paris, le 2 Octobre 1925.