Sur la notion de voisinage dans un espace discret.

Par

Maurice Fréchet (Université de Strasbourg).

Introduction.

M. Ben Zion Linfield a récemment présenté à l'Université de Strasbourg une thèse intitulée „Espaces discrets paramétriques et non paramétriques" [1]) qui lui a valu le titre de Docteur.

Son travail — rédigé en français — a pour point de départ une thèse en anglais soutenue à l'étranger deux années auparavant. Il s'en distingue, non seulement par une rédaction entièrement nouvelle des résultats anciens, mais aussi par des dévelloppements inédits. De plus, la suite un peu sèche et fatigante, des énoncés et démonstrations qui constituait les différents chapitres, est, ici, précédée d'une Introduction beaucoup plus détaillée. Celle-ci jette quelques clartés sur l'origine et l'enchainement des idées que trop souvent la méthode axiomatique a tendance à laisser cachées.

Cependant, notre but n'est pas ici de passer en revue les résultats obtenus par M. Linfield. Nous voulons uniquement montrer comment l'espace discret imaginé par M. Linfield fournit un exemple très intéressant des espaces que j'ai appelés espaces (V), ceux où les éléments d'accumulation sont définis par l'intermédiaire de familles de "voisinages".

Cet exemple me paraît d'autant plus digne de remarque qu'au moment où M. Linfield l'a imaginé, il ne pensait aucunement à appliquer une théorie antérieurement connue. Il était guidé, au moins à l'origine, par le désir de formuler une conception d'un espace plus proche que l'espace euclidien de l'espace composé de

[1]) Gauthier-Villars, Paris, 1925.

particules familier aux physiciens. Il a donc cru, en construisant son espace discret, s'éloigner entièrement des théories qui sont le fondement actuel de l'Analysis Situs. En se libérant de toute construction antérieure, à lui connue, il a été cependant amené par la force des choses, à formuler des définitions qui cadrent généralement avec celles qu'on obtient en considérant son espace discret comme un espace (V) particulier. Il m'a paru intéressant de noter cette rencontre qui est une preuve de plus de la flexibilité de la notion d'espaces (V).

Nous allons rappeler brièvement un certain nombre de notions concernant la topologie des espaces (V), voir ce qu'elles deviennent dans l'espace (V) particulier constitué par l'espace discret de M. Linfield et enfin les comparer aux définitions correspondantes proposées d'une manière tout à fait indépendante par M. Linfield.

Les espaces (V). Il ne s'agit pas ici de la première signification que j'avais donnée en 1906 à cette expression dans ma Thèse et que j'ai abandonnée depuis. J'appelle maintenant [1]) espace (V), un espace où les points d'accummulation sont définis par l'intermédiaire de „voisinages“. Précisons. On considère des éléments de nature quelconque comme points d'un certain espace et on attache à chaque élément x une famille quelconque d'ensembles V_x de ces éléments. Chaque ensemble V_x est appelé *voisinages* de x.

Pour simplifier, et bien que ce ne soit pas essentiel, on supposera que x appartient à chaque voisinage de x.

Ceci étant, un point x sera considéré comme *point d'accumulation d'un ensemble* F de points de l'espace (V), si chaque voisinage de x contient un point, au moins, de F, distinct de x. L'ensemble des points d'accumulation de F sera *l'ensemble dérivé* F' de F.

L'espace euclidien est un espace (V) obtenu, en considérant comme voisinages d'un point x, les sphères de centre x. Mais il est manifeste que la conception d'espace (V) est bien plus générale.

Dans notre Thèse, nous avions déjà défini des classes (L) qui comprenaient, comme cas particuliers, l'espace euclidien, l'espace de Riemann etc., et d'espaces plus complexes encore de l'Analyse fonctionnelle. La notion de classe (L) supposait cependant l'existence d'une définition de la limite d'une suite infinie de points de l'espace considéré. C'est pour arriver à englober des espaces pratiquement

[1]) *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits*, Bull. Sc. Math., t. 42, 1918.

peu utiles, mais théoriquement intéressants que nous avons été conduits à généraliser encore et à introduire les espaces (V) plus généraux que les classes (L). Le fait que l'espace discret de M. Linfield est un espace (V) sans être un espace (L), est une nouvelle justification de l'introduction des espaces (V).

L'espace discret de M. Linfield. La conception intuitive de l'espace discret de M. Linfield est celle d'un ensemble de particules. Dans cet ensemble, deux éléments *distincts* peuvent être *en contact*, contrairement à ce qui se passe dans l'espace euclidien. Le voisinage, au sens intuitif, d'un élément x est constitué par l'ensemble des éléments en contact avec x.

M. Linfield a généralisé la conception de l'ensemble de particules en définissant ainsi l'espace discret: c'est un ensemble d'éléments de nature quelconque où la relation de contact — qui ne peut plus garder le même sens — est remplacée par une relation plus générale. Cette relation est laissée indéterminée, c'est une relation qui pour deux éléments distincts quelconques a lieu ou non, sans considération de l'ordre de ces deux éléments. Selon qu'elle a lieu ou non, on dira que ces éléments sont *conjugués* ou non.

Par la suite, M. Linfield a jugé utile d'éliminer, à son tour, cette notion pour la remplacer par une relation $P|Q \neq 0$ plus générale, en apparence, puis qu'elle est définie entre deux ensembles P, Q quelconques d'éléments de l'espace discret. Le résultat en est de remplacer des raisonnements d'allure géométrique par des raisonnements d'allure analytique. Mais, comme l'essentiel de la théorie n'en est pas changé, nous nous en tiendrons à sa première conception, plus propice à l'intuition.

Celle-ci nous invite alors à *considérer comme voisinage V_x d'un point x, l'ensemble $V_x^{(0)}$ des points y conjugués de x et du point x lui-même.* On peut aussi, y ajouter des voisinages d'ordre $1, 2, 3,$ — en appelant $V_x^{(n)}$, l'ensemble des points de $V_x^{(n-1)}$ et des points conjugués de l'un des points de $V_x^{(n-1)}$. Rien ne sera, cependant, changé dans les résultats de la définition des points d'accumulation et des ensembles dérivés, si l'on constitue la famille des voisinages de x uniquement de l'ensemble $V_x^{(0)}$ au lieu de la famille des ensembles $V_x^{(0)}, V_x^{(1)}, \ldots, V_x^{(n)}, \ldots$ Nous supposerons donc dans la suite que la famille des voisinages de x est réduite au seul voisinage $V_x^{(0)}$.

On remarquera que *dans cet espace (V) particulier, l'opération* *de dérivation des ensembles est distributive*, c'est-à-dire que quels que soient les ensembles F, G, on aura

$$(F + G)' = F' + G'.$$

En effet, tout élément x, conjugué de l'un des éléments de F ou de G, est conjugué de l'un des éléments de $F + G$ et réciproquement. Ainsi non seulement l'espace discret de M. Linfield est est un espace (V), mais ce n'est pas le plus général.

Par contre, plusieurs propriétés importantes des ensembles linéaires peuvent cesser d'y être applicables: un ensemble constitué par un seul point peut avoir des points d'accumulation; un ensemble dérivé peut ne pas être fermé (c'est à-dire ne pas contenir son propre ensemble dérivé), un point peut ne pas être déterminé par la famille de tous les ensembles dont il est point d'accumulation, etc.

Connexité. M. Linfield définit un *ensemble connexe* comme un ensemble S tel que si on le décompose d'une manière quelconque en deux ensembles disjoints (c'est-à-dire sans éléments communs), non vides, ces deux ensembles soient toujours connexes. (Deux ensembles disjoints sont connexes s'il existe deux points conjugués appartenant respectivement à ces deux ensembles).

Dans la théorie des espaces (V), on appelle *ensemble connexe* un ensemble S tel que si on le décompose en deux ensembles quelconques R et T, on a

$$R' \,.\, T + R \,.\, T' \neq 0.$$

Dans le cas particulier des espaces discrets, cela veut dire qu'il existe au moins un élément de R conjugué d'un élément de T; on retombe sur la définition de M. Linfield.

Continus. D'après M. Linfield, un ensemble connexe R tiré d'un espace discret S est *entier* si, suivant sa notation, $S \mid R \equiv 0$; c'est-à-dire, s'il n'existe aucun élément de S qui est conjugué d'un point de R sans appartenir à R.

D'autre part, nous avons défini, dans les espaces (V), un ensemble *fermé* comme un ensemble à qui appartiennent tous ses points d'accumulation et un *continu* comme un ensemble connexe, fermé et contenant plus d'un point.

Dans le cas particulier d'un espace discret de M. Linfield, un ensemble connexe R est donc fermé si tout élément conjugué de l'un des éléments de R, appartient à R lui-même Il est alors entier au sens de M Linfield et réciproquement. Ainsi *un ensemble de points d'un espace discret, qui est entier au sens de M. Linfield, n'est autre qu'un continu,* quand on considère cet espace discret comme un espace (V) particulier

Ensembles ouverts. Dans un espace (V), un point x est *intérieur* à un ensemble F de points de cet espace, si x appartient à F et n'appartient pas à l'ensemble dérivé du *complémentaire* de F. (Le complémentaire de l'ensemble E est l'ensemble de points de l'espace (V) considéré qui n'appartiennent pas à F). Un ensemble G est *ouvert* si tous ses points lui sont intérieurs

Il est évident que cette définition est équivalente à la suivante: un ensemble ouvert est le complémentaire d'un ensemble fermé (ou vide).

Dans le cas particulier de l'espace discret de M. Linfield, il se trouve que tout ensemble ouvert est fermé et réciproquement. Car, si F est un ensemble fermé et I l'ensemble complémentaire, cet ensemble est aussi fermé, c'est-à-dire que tout point x conjugué d'un point y de I appartient nécessairement à I. Sans quoi, y serait conjugué d'un point x de F; c'est à-dire, que y serait point d'accumulation de F sans appartenir à F: F ne serait pas fermé.

Il semble que cette remarque fasse disparaître dans le cas de l'espace de M. Linfield, toute signification intuitive des expressions ensemble ouvert, ensemble fermé, dont la contradiction verbale disparait.

Toutefois il faut observer que, si, dans un espace discret S, il existe un ensemble, soit fermé, soit ouvert, qui n'est pas identique à l'espace S entier, cet espace sera un ensemble fermé, décomposable en deux ensembles fermés disjoints, non vides et par suite l'espace S ne sera pas un continu.

Par suite, le paradoxe apparent signalé plus haut disparaît, si *on se limite aux espaces discrets qui sont des continus.* Dans un tel espace, *il n'existe aucun ensemble fermé, ni aucun ensemble ouvert,* ci ce n'est l'ensemble constitué par tout l'espace. Il est vrai que cet espace, lui, est à la fois ouvert et fermé, mais il partage cette propriété avec les espaces les plus simples, comme l'espace euclidien.

Ce qui précède justifie une fois de plus, et d'une manière très frappante, une observation que j'ai déjà eu l'occasion de faire au sujet de l'espace de M. Hausdorff [1])

[1]) Cet auteur n'envisage comme voisinages que des ensembles ouverts. Cette limitation m'a toujours paru inutile et étrangère à la notion intuitive de voisinage.

Si l'on veut définir les voisinages dans l'espace discret de sorte que l'ensemble dérivé d'un ensemble F soit constitué par les points conjugués d'au moins un point de F, ce ne sera plus une question de préférence personnelle qui décidera si on doit se limiter dans le choix des voisinages à ceux qui sont ouverts. *Si l'espace discret* est choisi parmi les plus intéressants, c'est-à-dire *est un continu*, et en laissant de côté le cas extrême où les points seraient tous conjugués deux à deux — *aucun voisinage ne pourra être ouvert.*

Homéomorphies. Dans le travail de M. Linfield, tout repose sur la conception de *transformation équivalence.* Il appelle ainsi une correspondance ponctuelle biunivoque qui conserve la relation de conjugaison. Il considère *deux ensembles* S, S_1 *comme équivalents*, s'il existe au moins une „transformation équivalence" de S en S_1. Un ensemble S est, pour lui, *symétrique*, si pour chaque couple d'éléments A, B de S. l'ensemble des éléments de S conjugués de A, est équivalent à l'ensemble des éléments de S conjugués de B

D'autre part, nous avons plus généralement défini les *transformations continues* totales ou partielles espace (V) en d'espace (V). Une transformation ponctuelle biunivoque d'un ensemble F d'un espace (V) en un ensemble F_1 d'un espace (V), — espace distinct ou non du premier, — sera intuitivement considéré comme continue, si un point y_1 de F_1 — correspondant à un point y de F — peut être pris aussi voisin qu'on veut d'un point x_1 de F_1 — correspondant à un point x de F — lorsqu'on prend y suffisamment voisin de x. Pour préciser, on supposera que, pour tout voisinage V_{x_1} de x_1, il y a un voisinage V_x de x tel que, si y se déplace sur V_x, y_1 se déplace sur V_{x_1}.

La transformation sera *bicontinue* si cela a lieu aussi en permutant F et F_1 et on pourra l'appeler alors une *homéomorphie* entre F et F_1.

Appliquons ceci à l'espace discret de M. Linfield. Une transformation ponctuelle biunivoque de l'ensemble S en l'ensemble S_1 sera continue si pour tout couple de points correspondants x de S, x_1 de S_1, le voisinage V_x de x est transformé en un ensemble appartenant au voisinage V_{x_1} de x_1. C'est-à-dire, si deux points conjugués appartenant à S sont transformés en deux points de S_1 qui sont

---

Il ne viendrait à personne l'idée d'admettre qu'un cercle réalise mieux l'idée de voisinage de son centre quand on le prive de sa circonférence.

conjugués. Alors la *transformation équivalence de M. Linfield n'est autre qu'une homéomorphie et réciproquement.*

Deux ensembles équivalents au sens de M. Linfield ne sont autres que deux ensembles homéomorphes, c'est-à-dire deux ensembles équivalents, à une homéomorphie près, deux ensembles équivalents, au sens de l'Analysis Situs classique.

On dit qu'un ensemble F de points d'un espace (V) est *topologiquement homogène*, si, quels que soient les points A, B de F, il existe une transformation biunivoque et bicontinue de F en lui-même qui transforme A en B. On peut dire qu'un ensemble G est *topologiquement homogène localement*, si, quels que soient les points A et B de G, il existe deux ensembles H et K auxquels A et B sont respectivement intérieurs relativement à G et tels qu'il existe une homéomorphie entre H et K qui transforme A en B et la partie $G.H$ commune à G et H en la partie $G.K$ commune à G et K.

Appliquons cette dernière définition à l'espace discret de M. Linfield. Alors, si un de ses ensembles est „symétrique" à son sens, il est évident qu'il est topologiquement homogène localement au sens que nous venons de définir. Il suffit de prendre pour H et K les voisinages de A et de B. La réciproque est aussi évidente.

Nombre de dimensions. M. Linfield appelle S'_n *un ensemble de* $n+1$ *éléments conjugués deux à deux.* (On pourrait soulager la mémoire en appelant un tel ensemble un noeud à n dimensions). Un ensemble est *à n dimensions* s'il contient un S'_n sans contenir un S'_{n+1}. M. Linfield, pour faire comprendre l'origine de cette définition, rappelle que le nombre maximum de points qui sont à la même distance l'un de l'autre est de 3 pour le plan euclidien, $n+1$ pour l'espace euclidien à n dimensions. D'autre part, il avait donné auparavant comme exemple de relation de cojugaison, celle qui consiste pour deux points à avoir une distance donnée.

Il ne nous semble pas que cette comparaison soit très convaincante. Elle a d'ailleurs l'inconvénient de faire appel, au moins en apparence, à des notions métriques, alors que dans l'espace euclidien la dimension est une conception purement topologique où seules entrent en ligne de compte les considérations de continuité.

Par contre, la définition de M. Linfield s'éclairerait mieux si on la comparait avec une propriété des espaces euclidiens à n dimensions récemment démontrée par M. Lebesgue (*Fund. Math.* t. II; 1921, p. 257.

Nous avons aussi donné en 1909 une définition du nombre de dimensions d'un ensemble abstrait. Nous disons que le *type de dimension* d'un ensemble E est *au moins égal* à celui d'un ensemble F (et nous écrivons $dE \geqslant dF$), s'il existe une homéomorphie entre F et un sous-ensemble de E (sous-ensemble qui peut être identique à E lui-même). Si l'on a, en même temps, $dE \leqslant dF$, on a $dE = dF$. Si au contraire, on a $dE \geqslant dF$ sans qu'il existe un sous-ensemble de F qui soit homéomorphe à E, on aura $dE > dF$.

Appliquons à l'espace discret de M. Linfield; et soient S'_{n+1} et S''_{n+1} deux ensembles de $n+1$ points conjugués deux à deux. Il existe au moins une correspondance ponctuelle biunivoque entre ces deux ensembles: une telle correspondance est, ici, une homéomorphie Donc, les types de dimensions de S'_{n+1} et S''_{n+1} sont égaux: $dS'_{n+1} = dS''_{n+1}$.

D'autre part, soit S'_n l'ensemble formé par n quelconques des points de S'_{n+1}; (ces n points sont conjugués deux à deux), on a évidemment $dS'_n \leqslant dS'_{n+1}$ et comme aucune correspondance biunivoque ne peut exister entre S'_{n+1} et un sous ensemble de S'_n, on a même $dS'_n < dS'_{n+1}$.

Ainsi, au point de vue topologique, tous les S'_n d'un même indice sont équivalents et leur type de dimensions croît avec l'indice: $dS'_1 < dS'_2 < dS'_3 \ldots < dS'_n < \ldots$

Appelons maintenant $N(F)$ la plus grande valeur N des nombres entiers n tels qu'il existe $n+1$ éléments de l'ensemble F conjugués deux à deux. Alors il existe un S'_N qui appartient à F et il n'existe aucun S'_{N+1} appartient à F. D'une part, on a

$$dS'_N \leqslant dF,$$

d'autre part, les types de dimensions de S'_{N+1} et de F ne sont peut être pas comparables — c'est-à dire qu'il n'y a peut être aucun sous-ensemble de l'un qui soit homéomorphe à l'autre, — mais s'ils le sont, on n'a certainement *pas*

$$dS'_{N+1} \leqslant dF$$

car alors F contiendrait un S'_{N+1}. Ou bien les types de dimensions de F et de S'_{N+1} ne sont pas comparables ou bien on a $dF < dS'_{N+1}$. (Dans ce dernier cas, d'ailleurs, F ne contiendrait que $N+1$ points et ces $N+1$ points seraient conjugués c'est-à-dire que F serait un S'_N). On voit ainsi la relation entre le nombre de dimensions de M. Linfield et le type de dimensions défini plus haut:

Si des ensemble F contiennent chacun $N+1$ points conjugués deux à deux, sans en contenir $N+2$, M. Linfield renonce à établir une comparaison entre les dimensions des divers ensembles F ainsi obtenus et il leur assigne à tous la même dimension que S'_{N+1}. Pour nous, les types de dimensions de ces ensembles F sont tous $\geqslant d\,S'_N$ et ils ne peuvent être $\geqslant d\,S'_{N+1}$. Mais il nous est possible d'y distinguer des types de dimensions différents. On pourrait considérer la relation entre notre type de dimensions $d\,F$ et le nombre de dimensions $N(F)$ de M. Linfield, comme analogue à celle qui existe entre un nombre réel quelconque et sa partie entière. Par exemple

$$d\,F \leqslant d\,G \quad \text{entraîne} \quad N(F) \leqslant N(G)$$

$$\text{et si} \quad N(F) < N(G), \quad \text{on ne peut avoir} \quad d\,F \geqslant d\,G.$$

A ce point de vue, la définition de M. Linfield pourrait être rapprochée des définitions que M. M. Brouwer, Urysohn et Menger ont déduites des idées émises par Poincaré sur la notion de dimension. Cependant, il semble que ces définitions ne soient pas applicables sans de sérieuses modifications aux espaces (V) les plus généraux, comme on le verra en essayant de les appliquer à l'espace de M. Linfield.

Conclusion. Les remarques précédentes suffiront sans doute pour établir qu'il y aurait lieu de modifier un peu la terminologie de M. Linfield (déjà bien améliorée) afin de mettre mieux en évidence ses relations avec la théorie des ensembles abstraits dont elle est moins indépendante qu'elle n'en a l'air. Ellesau ront, en outre, montré que la conception des espaces (V) permet de donner une cer taine unité à l'étude d'espaces en apparence radicalement différents comme l'espace euclidien et l'espace discret.

Bibliographie.

On trouvera les définitions, concernant le ensembles des espaces (V), que nous avons rappelées plus haut dans les mémoires suivants:

Sur une terminologie de la théorie des ensembles abstraits, C. R. Congrès des Soc. Sav. 1924.

L'Analyse générale et les ensembles abstraits, Revue de Métaphysique et de morale, 1925.

16 Août 1925.