Sur les continus de Jordan et le théorème de M. Brouwer.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

Dans le § 1 j'établis une condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu soit un continu de Jordan [1]). Je prends comme point de départ la propriété suivante du plan, à laquelle m'a attiré l'attention M. Knaster: étant donnée une famille d'ensembles ouverts (c. à d. composés de points intérieurs) G_j, la frontière de leur somme est contenue dans la fermeture de la somme des frontières; en symboles:

(1) $$F(\sum_j G_j) \subset \overline{\sum_j F(G_j)},$$

$\overline{X}$ désignant l'ensemble X augmenté de ses points d'accumulation.

Je prouve que, si l'on considère comme espace, au lieu du plan, un continu arbitraire C et si l'on remplace dans cet énoncé le terme „ensemble ouvert" par „ensemble ouvert dans C" ainsi que „frontière" par „frontière relative à C" — cette même condition devient suffisante et nécessaire pour que C soit un continu de Jordan.

Ainsi, par exemple, si C est le continu non-jordanien formé par les points (x, y) satisfaisant aux conditions: $y = \sin\frac{\pi}{x}$ pour $0 < x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant +1$ pour $x = 0$, et si G_n est le sous-ensemble de C tel que $\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n-1}$ avec $n > 1$, la formule (1) n'est pas

[1]) Un continu de Jordan borné c'est une image continue d'un segment. J'emploie ici le terme continu de Jordan dans un sens plus général, précisé au début du § 1.

vérifiée: le segment $-1 \leq y \leq +1$, $x=0$, tout entier est contenu dans $F(\sum_{n=1}^{\infty} G_n)$ tandis qu'il ne contient qu'un seul point (l'origine des axes) qui appartient à $\overline{\sum_{n=1}^{\infty} F(G_n)}$.

La condition (1) peut encore s'écrire de cette façon:

$$\overline{\sum_j (1-\overline{A_j})} \,.\, \prod_j \overline{A_j} - \overline{\sum_j \overline{A_j}\, \overline{1-\overline{A_j}}} = 0 \tag{2}$$

où A_j est un sous-ensemble arbitraire de l'espace considéré (désigné par 1). En effet, on n'a qu'à tenir compte de la formule $F(X) = \overline{X} \,.\, \overline{1-X}$ et du fait que tout ensemble ouvert est de la forme $1-\overline{X}$.

Si l'on ajoute la formule (2) aux quatre propriétés formelles de la fermeture (que j'ai étudiées dans le vol. III de ce Journal):

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B} \tag{3}$$

$$\overline{0} = 0 \tag{5}$$

$$A \subset \overline{A} \tag{4}$$

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A} \tag{6}$$

on peut en déduire à l'aide de l'algèbre de la logique un grand nombre de théorèmes de l'Analysis Situs, valables pour tout continu de Jordan, considéré comme espace.

Dans le § 2 j'établis une condition suffisante et nécessaire pour qu'un continu de Jordan borné coupe le plan [1]. Cette condition exige que le continu se décompose en deux continus dont le produit ne soit pas un continu.

Ainsi la propriété de couper la plan (par un continu de Jordan) équivaut à une propriété *intrinsèque* du continu seul. Il en résulte directement l'invariance de cette propriété par rapport aux transformations bicontinues effectuées sur les continus de Jordan bornés.

Ce même théorème permet de resoudre un problème lié à un théorème de M. Brouwer. D'après ce théorème, si C est un continu arbitraire et R une région du complémentaire de C, la frontière $F(R)$ de R est un continu. Je prouve dans le § 3 que, dans des hypothèses très générales concernant l'espace considéré, le théorème de M. Brouwer équivaut au théorème suivant: *Si l'on décompose l'espace en deux continus leur produit est aussi un continu.*

[1] On dit que C coupe le plan s'il existe deux points situés en dehors de C qui ne peuvent être unis par un continu sans rencontrer C.

Il résulte de là et du théorème du § 2 que, si l'on considère comme espace un continu de Jordan plan et borné arbitraire, la condition suffisante et nécessaire pour que le théorème de M. Brouwer soit valable dans cet espace est que ce continu ne coupe pas le plan.

(Ainsi, par exemple, le théorème de M. Brouwer ne subsiste pas sur une circonférence d'un cercle: C étant un arc de cette circonférence, R est le reste; or $F(R)$ étant composé de deux points, n'est pas un continu).

§ 1.

Un ensemble A est dit connexe, s'il n'est pas de la forme $A = M + N$, où $M \neq 0 \neq N$ et $\overline{M}N + \overline{N}M = 0$. Un ensemble A est dit ouvert dans un ensemble (fermé) C, si $A \subset C$ et $C - A$ est fermé. Un continu C est dit continu de Jordan si:

(7) tout ensemble A ouvert dans C est somme d'ensembles qui sont à la fois connexes et ouverts dans C.

Dans le cas de C borné, cette condition équivaut à celle que C soit image continue d'un segment [1]).

Je vais établir deux lemmes en me servant uniquement des formules (3) — (6). Ces formules étant valables, lorsque comme espace on considère un ensemble fermé arbitraire C [2]) nos lemmes restent vrais si l'on remplace les termes: „frontière" $F(X)$ par „frontière relative à C" $F_c(X) = \overline{X}\,\overline{C - X}$ et „ensemble ouvert" par „ensemble ouvert dans C".

Lemme I [3]). S étant un ensemble connexe, si $SX \neq 0 \neq S - X$ on a $S . F(X) \neq 0$.

Démonstration. On a $S = SX + (S - X)$ décomposition de l'ensemble connexe S en deux ensembles non vides. Donc:

$$SX . \overline{S - X} + (S - X) . \overline{SX} \neq 0. \tag{8}$$

Or, $SX . \overline{S - X} \subset S . X . \overline{1 - X}$, ainsi que $(S - X) . \overline{SX} \subset \subset S(1 - X) . \overline{X} \subset S . \overline{X} . \overline{1 - X}$. Donc, selon (8): $S\overline{X} . \overline{1 - X} \neq 0$, ce qui prouve le lemme, car $F(X) = \overline{X} . \overline{1 - X}$.

[1]) Voir: S. Mazurkiewicz: *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. I, Hahn: Wiener Berichte 1914 et Fund. Math. II et ma note des Fund. Math. I.

[2]) Voir: Fund. Math. III, p. 191.

[3]) Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre* p. 247, Leipzig 1914.

Lemme 2. G étant un ensemble ouvert, si

(9) $$G=M+N \text{ et } \overline{M}N+\overline{N}M=0,$$

les ensembles M et N sont aussi ouverts et $F(M)\subset F(G)$.

Démonstration. D'après (9): $MN=0$, donc $1-M=(1-G)+N$, d'où $\overline{1-M}=\overline{1-G}+\overline{N}=(1-G)+\overline{N}$, puisque $1-G$ est fermé. Mais $1-G\subset 1-M$ et $\overline{N}\subset 1-M$, car en vertu de (9) $\overline{N}M=0$. Donc $\overline{1-M}\subset 1-M$, ce qui prouve que $1-M$ est fermé, donc M ouvert.

D'autre part, $F(M)=\overline{M}.\overline{1-M}=\overline{M}-M$ et, comme $MN=0$, $\overline{M}\subset 1-N$, donc $F(M)\subset\overline{M}(1-N)-M=\overline{M}-(M+N)=$ $=\overline{M}-G\subset\overline{G}-G=F(G)$.

Théorème I. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu C soit un continu de Jordan est que, $\{G_j\}$ étant une famille arbitraire d'ensembles ouverts dans C, on ait*

(10) $$F_c(\sum_j G_j)\subset\overline{\sum_j F_c(G_j)}$$

où l'indice j varie dans un ensemble de nature quelconque.

Démonstration 1. Soit C un continu de Jordan. Il s'agit de prouver que si p non $\varepsilon\,\overline{\sum_j F_c(G_j)}$ on a

(11) $$p \text{ non } \varepsilon\, F_c(\sum_j G_j).$$

L'ensemble $\sum_j G_j$ étant ouvert dans C, on a $F_c(\sum_j G_j)=\overline{\sum_j G_j}-\sum_j G_j$; on peut donc supposer que p non $\varepsilon\,\overline{\sum_j G_j}$, car autrement la formule (11) serait évidemment réalisée.

Posons donc

(12) $$p\,\varepsilon\, C-\sum_j G_j.$$

L'ensemble $C-\overline{\sum_j F_c(G_j)}$ étant ouvert dans le continu de Jordan C, on conclut de (7) que p appartient à un ensemble connexe R ouvert dans C et contenu dans $C-\overline{\sum_j F_c(G_j)}$. Donc

(13) $$R\,.\,F_c(G_j)=0$$

quel que soit j.

Comme, selon (12), p non $\varepsilon\, G_j$ d'où $R-G_j\neq 0$ on en conclut, en vertu du lemme 1 et de (13), que $RG_j=0$, quel que soit j. Donc

$\sum_j G_j \subset C - R$, d'où $\overline{\sum_j G_j} \subset \overline{C - R} = C - R$, puisque R est ouvert dans C. Par suite $R . \overline{\sum_j G_j} = 0$ et, à plus forte raison: $R.F_c(\sum_j G_j) = 0$, d'où la formule (11).

La condition du théorème est donc nécessaire.

2. Pour prouver qu'elle est suffisante, supposons que C est un continu non-jordanien. D'après (7) il existe un ensemble A ouvert dans C qui n'est pas somme d'ensembles connexes ouverts (dans C). Soit donc p un point qui n'est contenu dans aucun sous-ensemble de A qui soit connexe et ouvert dans C.

Désignons par $\mathcal{G}$ la classe de tous les ensembles G_j tels que 1°: p non $\varepsilon\, G_j$ et 2°: G_j et $H_j = A - G_j$ sont séparés (en symboles: $\overline{G_j}\, H_j + \overline{H_j}\, G_j = 0$). En particulier, A étant non connexe, on peut le décomposer en deux ensembles séparés: celui qui ne contient pas p est un G_j.

Je dis que la formule (10) ne subsiste pas. Posons $P = \prod_j H_j$ et $S = \sum_j G_j$. Evidemment:

$$A = P + S \text{ et } P . S = 0. \tag{14}$$

D'après le lemme 2: $F_c(G_j) \subset F_c(A)$, d'où $\sum_j F_c(G_j) \subset F_c(A)$ et $F_c(A)$ étant fermé: $\overline{\sum_j F_c(G_j)} \subset F_c(A)$. Or A étant ouvert dans C, on a $A . F_c(A) = 0$, d'où selon (14): $P . F_c(A) = 0$. Donc:

$$P . \overline{\sum_j F_c(G_j)} = 0. \tag{15}$$

Ainsi, pour prouver que l'inclusion (10) n'est pas vérifiée il suffit de démontrer l'inégalité

$$P . F_c(S) \neq 0. \tag{16}$$

Supposons, pas contre, que $P . F_c(S) \neq 0$ et ajoutons à cette égalité la seconde des égalités (14). On a: $P(S + F_c(S)) = P . \overline{S} = 0$. D'autre part, $\overline{P}\, S = 0$, car les ensembles H_j étant fermés dans A, il en est de même de leur produit P; donc $\overline{P}\, A = P$, d'où $\overline{P}\, S = PS$ et en combinant avec (14): $\overline{P}\, S = 0$. Ainsi

$$\overline{P}\, S = P\, \overline{S} = 0$$

ce qui prouve que la formule (14) représente une décomposition de A en deux ensembles séparés P et S. Donc $S \varepsilon \mathcal{G}$; ainsi S est le plus grand ensemble de la famille $\mathcal{G}$. D'après le lemme 2 l'ensemble P est ouvert. Or, P contenant le point p, cet ensemble ne peut être connexe. Cela veut dire que $P = M + N$, M et N deux ensembles séparés non vides, $p \varepsilon M$. La formule $A = M + (N + S)$ fournit donc une décomposition de A en deux ensembles séparés dont le second est un G_j. Mais S étant le plus grand élément de $\mathcal{G}$, on a $N + S \subset S$ et comme $N \subset P$, il suit $N . S = 0$ et $N = 0$, contrairement à l'hypothèse.

La formule (15) se trouve ainsi établie, c. q. f. d.

Remarques. La condition du théorème reste vraie si l'on suppose que l'indice j est un *nombre naturel.* On peut aussi supposer les ensembles G_j *disjoints.*

Pour s'en convaincre, nous allons prouver que *C étant un continu non-jordanien il existe une suite d'ensembles $G_1, G_2, \ldots G_j, \ldots$ ouverts dans C, n'ayant deux à deux aucun point commun et tels que l'inclusion* (10) *n'aie pas lieu.*

En conservant les notations de la démonstration précédente on conclut de (16) qu'il existe un point q tel que

$$q \varepsilon P \text{ et } q \varepsilon F_c(S).$$

Soit $\lim\limits_{j=\infty} q_j = q$ et $q_j \ \varepsilon S$, $j = 1, 2, \ldots$. Soit $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots$ une suite d'ensembles appartenant à la famille $\mathcal{G}$ et tels que $q_j \varepsilon G^{(j)}$.

Posons:

$$G_1 = G^{(1)}; \quad G_j = G^{(j)} . H^{(1)} . H^{(2)} \ldots H^{(j-1)}; \quad H^{(j)} = A - G^{(j)}$$

Je dis que les ensembles G_j ainsi définis, appartiennent à la famille $\mathcal{G}$. Cela revient à dire que G_j et $H_j = A - G_j$ sont séparés.

Pour $j = 1$, notre assertion est évidente. Démontrons la pour $j > 1$.

$H^{(i)}$ étant le complémentaire de $G^{(i)}$ par rapport à A, on a, d'après une formule connue du calcul logique, l'identité:

$$A = G^{(j)} H^{(1)} \ldots H^{(j-1)} + (G^{(1)} + G^{(2)} + \ldots + G^{(j-1)} + H^{(j)}).$$

Le premier terme de cette somme étant G_j le second est $H_j = G^{(1)} + \ldots + G^{(j-1)} + H^{(j)}$. Chaque terme de cette dernière somme est séparé de G_j, puisque $G^{(i)}$ et $H^{(i)}$ sont séparés ($i = 1, 2, \ldots j$). Donc [1] la somme toute entière, H_j, est séparé de G_j.

Ainsi G_j, comme élément de $\mathcal{G}$, est un ensemble ouvert dans C.

Nous allons prouver que, si $i \neq j$, $G_i . G_j = 0$. En effet, si $j > i$ l'ensemble G_j est un produit d'ensembles parmi lesquels se trouve $H^{(i)}$. Donc $G_j \subset H^{(i)}$, tandisque $G_i \subset G^{(i)}$ et $G^{(i)} . H^{(i)} = 0$. Par suite $G_i . G_j = 0$.

[1]) Voir: l'ouvrage „Sur les ensembles connexes" de M. Knaster et de moi, Fund. Math. II.

Pour prouver que la formule (10) n'a pas lieu nous allons démontrer que:

$$q \,\varepsilon\, F_e(\sum_j G_j) \tag{17}$$

$$q \text{ non } \varepsilon\, \overline{\sum_j F_e(G_j)} \tag{18}$$

Quant à la formule (17), on a d'abord $q_j \,\varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} G_j$, car $\sum_{i=1}^{j} G_i = G^{(1)} + G^{(2)} H^{(1)} + \dots + G^{(j)} H^{(1)} \dots H^{(j-1)} = G^{(1)} + G^{(2)} + \dots + G^{(j)}$ et $q_j \,\varepsilon\, G^{(j)}$ par définition. Comme $q = \lim_{j=\infty} q_j$, $q \,\varepsilon\, \overline{\sum_{j=1}^{\infty} G_j}$. D'autre part, q non $\varepsilon\, (\sum_j G_j)$, car $q \,\varepsilon\, P$. La formule (17) est donc établie.

Enfin, q étant un point de P, la formule (18) résulte directement de l'égalité (15), qui fut établie dans l'hypothèse que l'indice j varie dans un ensemble arbitraire.

Notre assertion est donc démontrée complètement.

Il sera peut-être intéressant d'observer que, en supposant les ensembles G_j disjoints, on peut dans la formule (10) remplacer le signe d'inclusion par *l'égalité* [1]. Cela résulte du théorème suivant (qui se déduit des formules (3)—(6)): étant donnée une famille d'ensembles ouverts et disjoints $\{G_j\}$, on a

$$\sum_j F(G_j) \subset F(\sum_j G_j). \tag{19}$$

En effet, $F(G_i) \subset G_i \subset \overline{\sum_j G_j}$. D'autre part, $F(G_i) \cdot \sum_j G_j = 0$, car $F(G_i) \cdot G_i = 0$ puisque G est ouvert, et, si $i \neq j$, on a $G_i G_j = 0$, d'où $G_i \subset 1 - G_j$ donc $F(G_i) \subset \overline{G_i} \subset \overline{1 - G_j} = 1 - G_j$ puisque G_j est ouvert; par suite $F(G_i) \cdot G_j = 0$ quel que soit j.

Ainsi $F(G_i) \subset \overline{\sum_j G_j} - \sum_j G_j = F(\sum_j G_j)$ quel que soit i, d'où l'inclusion (19).

§ 2.

Un sous-ensemble connexe d'un ensemble A est dit sa *composante*, s'il ne fait partie d'aucun autre sous-ensemble connexe de A. L'énoncé (7) peut être exprimé de cette façon:

(20) toute composante d'un ensemble ouvert dans C est ouverte dans C.

Je vais établir deux lemmes dont le premier semble présenter par lui-même un certain intéret. Leurs démonstrations vont être basées

[1]) Dans le cas général on peut poser à la place de (10): $F_e(\sum_j G_j) = \overline{\sum_j F_e(G_j)} - \sum_j G_j$.

sur les énoncés (3) — (7), de sorte que ces lemmes seront valables sur tout continu de Jordan, considéré comme espace.

Lemme 1. S étant une composante d'un ensemble arbitraire A, on a $F(S) \subset F(A)$.

Démonstration. Soit $p \varepsilon F(S)$. Afin de prouver que $p \varepsilon F(A)$, considérons deux cas:

1) $p \varepsilon A$. Donc $p \varepsilon \bar{A}$ et comme $F(A) = \bar{A}\,\overline{1-A}$ il reste à prouver que $p \varepsilon \overline{1-A}$. Supposons au contraire: p non $\varepsilon\ \overline{1-A}$. Soit R la composante de l'ensemble ouvert $1-\overline{1-A}$ qui contienne p. Donc $p \varepsilon R . F(S)$ et

$$R . F(S) \neq 0. \tag{21}$$

Je dis que

$$R\,S \neq 0. \tag{22}$$

En effet, l'égalité $R\,S = 0$ entraîne $S \subset 1-R$, d'où $\bar{S} \subset \overline{1-R} = 1-R$, puisque R est selon (20) (où on pose $C = 1$) ouvert. Donc $R\,\bar{S} = 0$ et, à plus forte raison, $R . F(S) = 0$, contrairement à (21).

L'inégalité (22) entraîne: $R \subset S$. En effet $R \subset A$, car $R \subset 1 - \overline{1-A} \subset 1 - 1 - A = A$ et, selon (22), $R + S$ est un sous-ensemble connexe de A. Donc, S étant composante de A, $R + S = S$. Par conséquent, $1 - S \subset 1 - R$, d'où $\overline{1-S} \subset \overline{1-R} = 1 - R$, donc $R . \overline{1-S} = 0$ et $R . F(S) = 0$ contrairement à (21).

Donc $p \varepsilon \overline{1-A}$.

2) $p \varepsilon 1 - A$. Donc $p \varepsilon \overline{1-A}$. Or $F(S) = \bar{S}\,\overline{1-S} \subset \bar{S} \subset \bar{A}$, d'où $p \varepsilon \bar{A}$. Ainsi $p \varepsilon \bar{A}\,\overline{1-A}$, c. q. f. d.

Lemme 2. S_1 et S_2 étant deux composantes d'un ensemble ouvert G, on a $\bar{S}_1 . \bar{S}_2 \subset F(G)$.

Démonstration. Par définition de composante: $S_1 . S_2 = 0$. S comme composante d'un ensemble ouvert est ouverte; donc $F(S) = \bar{S} - S$. Or, $\bar{S}_1\,\bar{S}_2 = \bar{S}_1\,(\bar{S}_2 - S_2) + \bar{S}_1\,S_2 = \bar{S}_1\,(\bar{S}_2 - S_2) + S_1\,S_2 + (\bar{S}_1 - S_1)\,S_2 = \bar{S}_1 . F(S_2) + S_2 . F(S_1) \subset F(S_2) + F(S_1) \subset F(G)$ selon le lemme 1.

Je vais me servir dans la suite du lemme suivant:

Lemme 3. A et B étant deux ensembles fermés et disjoints il existe deux ensembles ouverts et disjoints D et E tels que $A \subset D$ et $B \subset E$ [1]).

Pour s'en convaincre il suffit d'entourer tout point p de A d'un cercle (d'un sphéroïde) de rayon égal à la moitié de la distance de p à B. La somme des intérieurs de ces cercles est l'ensemble D; $E = 1 - \bar{D}$.

La démonstration peut être transportée au cas où comme espace on considère un ensemble fermé quelconque F (contenant A et B), car on pose $D_1 = D.F$, $E_1 = E.F$; D_1 et E_1 sont ouverts dans F et $D_1 \supset A$, $E_1 \supset B$.

Théorème II. *Si un continu de Jordan plan et borné coupe le plan, il se décompose en deux continus dont le produit n'est pas un continu.*

Démonstration. Soient a et b deux points entre lesquels C coupe le plan. Soient, sur le segment ab, p le premier point de C et q le dernier (p et q peuvent coïncider). C étant un continu de Jordan, il contient un arc simple L qui unit p et q [2]). Comme arc simple, L ne coupe pas le plan; il existe donc un continu M (même une ligne brisée) qui unit a et b sans rencontrer L. Les continus L et M étant disjoints, il existe, en vertu du lemme 3, un ensemble ouvert G tel que $G \supset L$ et $\bar{G} M = 0$. L'ensemble $G C$ est donc un ensemble ouvert dans C et contenant L. C étant un continu de Jordan, toute composante de $G C$ est d'après (20) ouverte dans C; soit R la composante de $G C$ telle que

$$L \subset R. \tag{23}$$

L'égalité $\bar{G} M = 0$ entraîne

$$\bar{R} M = 0. \tag{24}$$

D'autre part $C M \neq 0$, car M est, par hypothèse, un continu unissant les points a et b entre lesquels C coupe le plan. Il en résulte, en vertu de (24), que $(C - \bar{R}) M \neq 0$.

[1]) Pour une étude approfondie de cette propriété importante de l'espace on consultera: Tietze Math. Ann. 88, Vietoris Mon. f. Math. u. Phys. 1921 et les ouvrages des MM. Alexandroff, Tychonoff et Urysohn Math. Ann. 1924—25.

[2]) Cf. Mazurkiewicz l. c., Moore R. L. Bull. Amer. Math. Soc. 1917, Vietoris Mon. f. Math. u. Phys. 1922, p. 278.

Il existe, par conséquent, parmi les composantes S de $C-R$, au moins, une telle que

$$S\,M \neq 0. \tag{25}$$

Je dis qu'il n'y en a qu'un nombre fini qui satisfassent à cette inégalité.

En effet, dans le cas contraire, on pourrait en choisir de chacune d'elles par un point appartenant à M. Il existerait alors un point r d'accumulation de ces points choisis; on aurait $r \,\varepsilon\, M$, d'où selon (24): $r \,\varepsilon\, C-R$. Désignons par S^* la composante de $C-R$ qui contient r. On arrive à une contradiction, car, d'une part, r est un point d'accumulation des points qui appartiennent à $C-S^*$ et, d'autre part, S^* étant une composante d'un ensemble ouvert dans C, S^* doit être ouverte dans C.

Il est ainsi établi que les composantes de $C-R$ qui satisfont à l'inégalité (25) forment une suite finie: $S_1, \dots S_n$ $(n \geqslant 1)$.

Posons: $K = C-(S_1+\dots+S_n)$. K est donc constitué par R et par les composantes de $C-R$ qui ne satisfont pas à (25), qui sont donc disjointes de M. D'après (24) on a donc:

$$K\,.\,M = 0. \tag{26}$$

Je dis que K est un continu. Considérons, en effet, la somme et le produit des deux ensembles fermés: K et $(\overline{R}+\overline{S}_1+\dots+\overline{S}_n)$.

$$K+(\overline{R}+\overline{S}_1+\dots+\overline{S}_n) = C \tag{27}$$

$$\begin{aligned} K.(\overline{R}+\overline{S}_1+\dots+\overline{S}_n) = {} & [\overline{R}-(S_1+\dots+S_n)] + \\ & +[(\overline{S}_1-S_1)-(S_2+\dots+S_n)]+[(\overline{S}_2-S_2)-(S_1+S_3+\dots+S_n)]+ \\ & +\dots+[(\overline{S}_n-S_n)-(S_1+\dots+S_{n-1})]. \end{aligned} \tag{28}$$

Or, $\overline{R}-(S_1+\dots+S_n)=\overline{R}$, car $S_1+\dots+S_n \subset C-\overline{R}$; puis $\overline{S}_1-S_1=F(S_1)\subset F(C-\overline{R})$ d'après le lemme 1; mais $F(C-\overline{R})\subset \overline{R}$. Donc tous les sommandes de (28) sont contenus dans $\overline{R}$. Ainsi

$$K.(\overline{R}+\overline{S}_1+\dots+\overline{S}_n)=\overline{R}. \tag{29}$$

La somme et le produit des ensembles fermés K et $(\overline{R}+\overline{S}_1+\dots+\overline{S}_n)$ étant selon (27) et (29) des continus, ces ensembles sont eux-mêmes des continus [1]).

[1]) D'après un théorème publié par Janiszewski et moi dans Fundam. Math. I. p. 211.

La continu K ne coupe pas le plan entre a et b, car le continu M unit ces points et, conformément à (26), ne rencontre pas K. Je vais prouver, d'autre part, que les continus $\bar{S}_1, \ldots \bar{S}_n$ ne coupent nonplus le plan entre a et b.

D'abord

$$\overline{C-\bar{R}}\,.\,L=0. \tag{30}$$

Car $C-\bar{R}\subset C-R$, d'où $\overline{C-\bar{R}}\subset\overline{C-R}=C-R$ puisque R est ouvert dans C. Donc $R\,.\,\overline{C-\bar{R}}=0$ et, comme $L\subset R$ (voir 23), on en tire l'égalité (30).

Or, l'arc L augmenté des segments ap et qb unit les point a et b. Donc, selon (30), l'ensemble $\overline{C-\bar{R}}$ ne coupe pas le plan entre ces points; il en est de même de tout sous-ensemble de $\overline{C-\bar{R}}$, en particulier, des ensembles $\bar{S}_1, \ldots \bar{S}_n$.

Il est ainsi établi que le continu C se compose des continus K, $\bar{S}_1, \ldots \bar{S}_n$ dont aucun ne coupe le plan entre a et b. Nous allons prouver à présent que parmi ces continus il y en a un, au moins, dont le produit avec K n'est pas un continu.

Rappelons que d'après un théorème de Janiszewski[1]), si C_1 et C_2 sont deux ensembles fermés et bornés dont aucun ne coupe le plan entre a et b et dont le produit est un continu, la somme C_1+C_2 ne coupe nonplus le plan entre ces points.

Or, supposons que $\bar{S}_i\,.\,K$ $(1\leq i\leq n)$ soit un continu. D'après le théorème précité, $K+\bar{S}_1$ ne coupe pas le plan entre a et b. En général, si $(K+\bar{S}_1+\ldots+\bar{S}_{i-1})$ ne coupe pas le plan entre a et b, il en est de même de $(K+\bar{S}_1+\ldots\bar{S}_{i-1}+\bar{S}_i)$. En effet $(K+\bar{S}_1+{}$ $+\ldots+\bar{S}_{i-1})\,.\,\bar{S}_i=K\,.\,\bar{S}_i+\bar{S}_1\,.\,\bar{S}_i+\ldots+\bar{S}_{i-1}\,.\,\bar{S}_i$ et, en raison du lemme 2, on a pour $j<i$: $\bar{S}_j\,.\,\bar{S}_i\subset F(C-R)\subset\bar{R}\subset K$; donc $(K+\bar{S}_1+\ldots+\bar{S}_{i-1})\,.\,\bar{S}_i=K\,.\,\bar{S}_i$, qui est par hypothèse un continu.

On parvient donc en raisonnant par induction à la conclusion que $K+\bar{S}_1+\ldots+\bar{S}_n$ ne coupe pas le plan entre a et b; mais ceci est impossible, car cette somme est égale à C. Nous pouvons donc supposer que, par exemple, $K\,.\,\bar{S}_1$ n'est pas un continu.

Posons $C_1=\bar{S}_1$ et $C_2=K+(\bar{S}_2+\bar{S}_3+\ldots+\bar{S}_n)$.

[1]) Prace Mat.-Fiz. 1913. Cf. Straszewicz, Fund. Math. VII, p. 159.

Je dis que la formule $C = C_1 + C_2$ présente la décomposition demandée du continu C en deux continus dont le produit n'est pas un continu.

En effet, en s'appuyant sur le lemme 2 on prouve, comme tout-à-l'heure, que

$$(31) \qquad (K + \bar{S}_1 + \ldots + \bar{S}_{i-1} + \bar{S}_{i+1} + \ldots + \bar{S}_n) \,.\, S_i = K \,.\, S_i$$

et $$C = \bar{S}_i + (K + \bar{S}_1 + \ldots + \bar{S}_{i-1} + \bar{S}_{i+1} + \ldots + \bar{S}_n).$$

Or, C étant un continu, il en résulte que $K \,.\, S_i \neq 0$, quel que soit $i \leq n$. Donc C_2 est un continu. Enfin, en posant dans (31): $i = 1$, on a $C_1 \, C_2 = K \,.\, S_1$ qui, par hypothèse, n'est pas un continu, c. q. f. d.

Corollaire. *Pour qu'un continu de Jordan plan et borné coupe le plan, il faut et il suffit qu'il se décompose en deux continus dont le produit n'est pas un continu.*

Ce corollaire est une conséquence du théor. II et du théorème suivant de Janiszewski (l. c.): la somme de deux continus bornés dont le produit n'est pas un continu coupe le plan.

Remarque. Notre théorème ne pourrait être étendu aux continus *non-jordaniens*. Considérons, en effet, le continu formé de la circonférence $\varrho = 1$ et des points dont les coordonnées polaires sont: $\varrho = 1 + \frac{1}{\theta}$, $\theta \geqslant 1$. Ce continu coupe évidemment le plan; cependant, il est impossible de le décomposer en deux continus dont le produit ne soit pas un continu.

§ 3.

Considérons les trois énoncés suivants.

(α) *si l'on décompose l'espace en deux continus, leur produit est un continu;*

(β) (théorème de M. Brouwer) *R étant une région-composante du complémentaire d'un continu, $F(R)$ est un continu;*

(γ) *Si A et B sont deux ensembles fermés disjoints et $a \,\varepsilon\, A$, $b \,\varepsilon\, B$, il existe un continu C disjoint de $(A + B)$ qui coupe l'espace entre a et b.*

Ces trois énoncés sont vérifiés sur le plan euclidien [1]) (ils ne

[1]) Pour les énoncés (β) et (γ), restreints au cas d'ensembles bornés, on consultera: Brouwer *Beweis des Jordanschen Kurvensatzes* Math. Ann. 69. (Cf. Phragmén Acta Math. 1885). L'extension de (β) au cas d'ensembles arbitraires, bornés ou non, est due à M. Mazurkiewicz, Fund. Math. III. Cf. aussi Knaster et Kuratowski *Sur les continus non-bornés*, Fund. Math. V.

sont pas vrais, si comme espace on considère une circonférence; voir: fin de l'introduction). Je vais prouver qu'ils sont *équivalents*, si l'on considère comme espace un continu de Jordan arbitraire. Notamment, leur équivalence va être établie dans des hypothèses vérifiées par tout continu de Jordan (telles que les conditions (3)—(7), le lemme 3 du § 2, la condition d'etre un continu: si $A\neq 0\neq 1-A$, $\bar{A}\,.\,\overline{1-A}\neq 0$).

Cette équivalence une fois établie, on en déduira, en tenant compte du corollaire du § 2 le théorème suivant:

Théorème III. *Pour qu'un continu de Jordan plan et borné puisse être considéré comme un espace vérifiant le théorème de M. Brouwer il faut et il suffit qu'il ne coupe pas le plan.*

La démonstration de ladite équivalence se compose de trois parties.

1. (α) entraîne (β).

Soit, en effet, C un continu et R une région-composante de son complémentaire. Je dis d'abord, que $1-R$ est un continu.

Considérons la somme et le produit des deux ensembles fermés: $C+\bar{R}$ et $1-R$.

$$(C+\bar{R})+(1-R)=1$$

$$(C+\bar{R})\,(1-R)=(C-R)+(\bar{R}-R)$$

mais $C-R=C$ et $\bar{R}-R=F(R)\subset C$ (voir lemme 1 du § 2). Donc $(C+\bar{R})\,(1-R)=C$, ce qui prouve que le produit, ainsi que la somme des deux ensembles fermés considérés, sont des continus. Ils sont donc eux-mêmes des continus.

Or, envisageons la décomposition de l'espace en deux continus: $1=\bar{R}+(1-R)$. Selon (α) $\bar{R}\,(1-R)$ est un continu, mais $\bar{R}(1-R)=F(R)$, ce qui prouve la proposition (β).

2. (β) entraîne (γ).

Soient A et B deux ensembles fermés et disjoints. Conformément au lemme 3 du § 2 il existe un ensemble ouvert D tel que $D\supset A$ et $\bar{D}.B=0$. Soit R la région-composante de D qui contient le point a. Donc $\bar{R}$ est un continu qui contient a mais ne contient pas b. Soit S la région-composante de l'ensemble $1-\bar{R}$ qui contient b. Selon (β): $F(S)$ est un continu. Je dis que c'est le continu cherché qui est disjoint de $A+B$ est coupe l'espace entre a et b.

Selon le lemme 1 du § 2:

$$F(S)\subset F(1-R)=\overline{1-R}\,.\,\overline{R}\subset 1-R\,.\,\overline{R}=(1-R)\,.\,\overline{R}$$

puisque R est ouvert. Or, $(1-R)\,.\,\overline{R}=F(R)\subset F(D)$, d'où $F(S)\subset$ $\subset F(D)$. Comme, d'autre part, $A\subset D$ d'où $A\,.\,F(D)=0$ et $D\,B=0$ d'où $B\,.\,F(D)=0$, on a $(A+B)\,.\,F(D)=0$, donc $F(S)\,.\,(A+B)=0$.

Enfin $F(S)$ coupe le plan entre a et b. En effet, $b\,\varepsilon\,S$, par définition de S, et a *non-*ε $(S+F(S))$, car $a\,\varepsilon\,R$, tandisque $S\subset 1-\overline{R}$ d'où $S\overline{R}=0$, et a *non-*ε $F(S)$, car $a\,\varepsilon\,A$ et $A\,.\,F(S)=0$.

2. (γ) entraîne (α).

Supposons C_1 et C_2 deux continus tels que

$$1=C_1+C_2. \tag{32}$$

Supposons, par impossible, que $C_1\,.\,C_2=M+N$, $M\,.\,N=0$, M et N deux ensembles fermés non vides. Soit $p\,\varepsilon\,M$, $q\,\varepsilon\,N$. Soit, en raison de (γ), K un continu qui coupe l'espace entre p et q de sorte que

$$K\,.\,(M+N)=0. \tag{33}$$

Comme $p\,\varepsilon\,C_1$ et $q\,\varepsilon\,C_1$, on a $KC_1\neq 0$. De même $KC_2\neq 0$.

Selon (32): $K=KC_1+KC_2$.

Les deux sommandes n'étant pas vides et K étant un continu, on en conclut que $(KC_1)\,.\,(KC_2)\neq 0$. Mais $C_1\,C_2=M+N$. Donc $K(M+N)\neq 0$, contrairement à (33).

L'hypothèse que $C_1\,.\,C_2$ n'est pas un continu conduit donc à une contradiction.