Sur l'invariance topologique des ensembles G_δ.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Les démonstrations connues de l'invariance topologique des ensembles G_δ (produits d'infinités dénombrables d'ensembles ouverts) sont assez compliquées [1]. Le but de cette Note est de donner une démonstration simple et directe de cette propriété importante.

Pour simplifier l'écriture nous donnerons la démonstration pour le cas des ensembles linéaires.

Soit E un ensemble G_δ donné, H son homéomorphe: il s'agit de prouver que H est aussi un G_δ.

Tout ensemble G_δ étant homéomorphe à un ensemble G_δ borné (ce qui résulte tout de suite du fait que l'ensemble de tous les nombres réels est homéomorphe à l'ensemble de tous les points intérieurs à un intervalle fini), nous pouvons supposer que l'ensemble E est borné.

Soit $f(x)$ la fonction réalisant l'homéomorphie entre E et H, $\varphi(y)$ — sa fonction inverse. Donc $f(x)$ est définie et continue dans E, et $\varphi(y)$ est définie et continue dans H.

Désignons par Q l'image de la fonction $f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble plan, formé de tous les points (x, y), où $x \varepsilon E$ et $y = f(x)$ [2]. L'ensemble H pourra donc être regardé comme projection de l'ensemble Q sur l'axe d'ordonnées.

[1]) S. Mazurkiewicz: *Bull. Acad. Cracovie* 1916, p. 490—494. M. Lavrentieff: *Fund. Math.* t. VI (1924), p. 151.

[2]) Si E et H étaient des ensembles plans, Q serait un ensemble dans l'espace à 4 dimensions, formé de tous les points (x, y, z, t), où $(x, y) \varepsilon E$ et $(z, t) = f(x, y)$ $f(x, y)$ désignant le point de H correspondant au point (x, y) de E dans l'homéomorphie entre E et H.

On voit sans peine que Q est un G_δ. En effet, désignons par M l'ensemble de tous les points (x, y), tels que $x \varepsilon E$: l'ensemble M est évidemment un G_δ (puisque E est un G_δ) et on a $Q = \overline{Q} M$ [1]) (puisque $f(x)$ est continue dans E).

Or, Q peut être évidemment regardé comme l'ensemble de tous les points (x, y), où $x = \varphi(y)$ et $y \varepsilon H$, et il résulte de la continuité de $\varphi(y)$ dans H que $Q = \overline{Q} N$, où N désigne l'ensemble de tous les points (x, y), tels que $y \varepsilon H$. Posons $\overline{Q} - Q = R$: ce sera donc un ensemble F_σ ($\overline{Q}$ étant fermé et Q étant un G_δ). Or, de $Q = \overline{Q} N = (Q + R) N \supset R N$ et de $Q R = 0$ résulte que $R N = 0$. Il s'en suit que la projection de Q sur l'axe d'ordonnées (c'est-à-dire l'ensemble H) est la différence entre la projection sur cet axe de l'ensemble $\overline{Q} = Q + R$ et celle de l'ensemble R. L'ensemble $\overline{Q}$ étant fermé et contenu entre deux droites $x = a$ et $x = b$, où a et b sont finis (puisque E est borné), sa projection sur l'axe $0y$ est fermé; or, l'ensemble R étant nn F_σ, il en est de même de sa projection. Il en résulte que H est une différence entre un ensemble fermé et un F_σ, c'est-à-dire que H est un G_δ, c. q. f. d.

Remarquons que le même raisonnement permettrait de démontrer l'invariance topologique des ensembles complémentaires aux ensembles (A).

[1]) $\overline{Q}$ désigne la fermeture de Q, c'est-à-dire l'ensemble $Q + Q'$.