Sur les projections d'un ensemble fermé.

Par

Stefan Mazurkiewicz et Stanisław Saks (Varsovie).

1. Le but de cette note est de donner un exemple d'un ensemble plan [1]) fermé F jouissant de la propriété suivante: *la projection de F sur l'axe des abscisses constitue un segment et sur toute autre droite passant par l'origine est un ensemble de mesure nulle.*

2. Pour construire un tel ensemble, nous allons considérer certains systèmes des parallélogrammes dont deux côtés sont parallèles à l'axe des ordonnées; nous conviendrons d'appeller ces côtés des bases des parallélogrammes; deux autres côtés seront appellés simplement côtés.

Un système formé d'un nombre fini de tels parallélogrammes sera appelé régulier lorsque les projections sur l'axe de x de ces paralélogrammes constituent le segment $(0, 1)$ et n'empiétent pas.

$\mathfrak{S}$ étant un système régulier et l une droite quelconque, $\overline{\overline{\mathfrak{S}}}$ désignera la somme des parallélogrammes appartenant à $\mathfrak{S}$ et $\overline{\overline{\mathfrak{S}}}_l$ la projection de $\overline{\overline{\mathfrak{S}}}$ sur l. Par $\Delta(\mathfrak{S})$, respectivent par $\delta(\mathfrak{S})$, nous conviendrons de désigner la somme des longueurs des côtés, respectivement des bases, des parallélogrammes de $\mathfrak{S}$. Ensuite, $\Delta_l(\mathfrak{S})$ sera la somme des longueurs des segments qui sont des projections sur l des côtés des parallélogrammes du système $\mathfrak{S}$.

3. Soit $(n \geqslant 2, k)$ un couple de nombres entiers et $\alpha_{n,k} = \frac{\pi}{n} + k\frac{\pi}{n^2}$. Nous désignerons, pour chaque tel couple, par $l_{n,k}$ la droite:

[1]) Des méthodes pareilles à celles qui sont employées dans cette note permettent de construire des exemples analogues dans l'espace; notamment, un ensemble dont la projection sur l'axe de x (le plan xy) est un segment (carré), et sur toute autre droite (plan) passant par l'origine est un ensemble de mesûre nulle.

$y = x \operatorname{tg} \alpha_{n,k}$, et par $S_{n,k}$ la somme de deux régions angulaires contenues dans les angles aigues entre les droites $l_{n,k}$ et $l_{n,k+1}$. On voit aisément que pour tout nombre naturel $N \geqslant 3$:

$$E - l_x = \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{n(n-2)} S_{n,k}, \tag{1}$$

E désignant le plan tout entier et l_x l'ensemble des points $(x \neq 0, y = 0)$.

4. On peut déterminer maintenant, pour tout couple de nombres entiers (n, k) $(n \geq 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n(n-2))$ une opération $\varphi_{n,k}$ qui fasse correspondre à tout système régulier des parallélogrammes $\mathfrak{S}$ un autre système $\mathfrak{S}^*$ vérifiant les conditions suivantes:

$$\overline{\overline{\mathfrak{S}^*}} \subset \overline{\overline{\mathfrak{S}}}. \tag{2}$$

$$\delta(\mathfrak{S}^*) < \frac{1}{n}. \tag{3}$$

(4) les côtés des parallélogrammes du système $\mathfrak{S}^*$ sont perpendiculaires à $l_{n,k}$.

On peut procéder de façon suivante pour déterminer un tel système. Supposons que $\mathfrak{S}$ se compose de p parallélogrammes et envisageons-en quelconque, soit K_i $(i = 1, 2, \ldots p)$. Soit $d = |x_1 - x_2|$, x_1, x_2 désignant les abscisses des points d'intersection des côtés de K_i (ou de leurs prolongements) avec une droite quelconque perpendiculaire à $l_{n,k}$; d ne dépendant que de la direction de la droite sécante, est déterminé ainsi d'une façon univoque.

Divisons K_i en un nombre fini de parallélogrammes $K_{i,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, j_i)$ égaux, n'empiétant pas et de l'hauteur inférieure à d. On voit de suite, en vertu de la définition du nombre d, qu'on peut construire dans chaque $K_{i,j}$ un autre parallélogramme $K^*_{i,k}$ de façon que les bases de ce parallélogramme soient placées sur celles de $K_{i,j}$ et inférieures à $\frac{1}{2pnj_i}$, et que ses côtés soient perpendiculaires à la droite $l_{n,k}$. La réunion de tous les K^*_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, j_i)$ ainsi construits fournit un ensemble régulier $\mathfrak{S}^*$ qui jouit évidemment des propriétés (2), (3), (4).

§ 5. L'opération $\varphi_{n,k}$ vérifiant les conditions demandées, nous allons prouver la proposition suivante:

(A). *$\mathfrak{S}$ étant un système régulier et (n, k) un couple de nombres naturels tels que*

$$n \geq 3, \quad 1 \leqslant k \leqslant n(n-2), \tag{5}$$

on a, pour toute droite $l \subset S_{n,k}$:

$$|\overline{\overline{\mathfrak{S}^*_l}}|^{1)} \leqslant \frac{5}{n}, \quad \text{où: } \mathfrak{S}^* = \varphi_{n,k}(\mathfrak{S}).$$

[1]) A désignant un ensemble, $|A|$ désigne sa mesure.

Démonstration: $\mathfrak{S}^*$ étant un système régulier, les projections des côtés des parallélogrammes de $\mathfrak{S}$ sur l'axe des abscisses n'empiètent pas et constituent le segment $(0, 1)$; d'autre part, d'après (4), ces côtés sont perpendiculaires à la droite $l_{n,k}$.

Donc:

$$\Delta(\mathfrak{S}) = \frac{2}{\left|\cos\left(\alpha_{n,k} + \frac{\pi}{2}\right)\right|} = \frac{2}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{\pi}{n^2}\right)\right|}$$

d'où, en vertu de (5):

$$\Delta(\mathfrak{S}) \leqslant \frac{2}{\sin\frac{\pi}{n}}. \tag{6}$$

Or, la droite l appartenant, par hypothèse, a $S_{n,k}$, elle fait avec les côtés des parallélogrammes de $\mathfrak{S}^*$ l'angle aigu supérieur, ou, au moins, égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n^2}$, donc, en tenant compte de (6):

$$\Delta_l(\mathfrak{S}^*) \leq \Delta(\mathfrak{S}^*) \cdot \sin\frac{\pi}{n^2} \leqslant \frac{2\sin\frac{\pi}{n^2}}{\sin\frac{\pi}{n}} \leqslant \frac{4}{n},$$

d'où, $\delta(\mathfrak{S}^*)$ étant, d'après (3), $\leqslant \frac{1}{n}$:

$$|\mathfrak{S}_l^*| \leqslant \Delta_l(\mathfrak{S}^*) + \delta(\mathfrak{S}) \leqslant \frac{5}{n}.$$

6. Nous pouvons maintenant déterminer une suite d'ensembles fermés dont le produit sera l'exemple demandé.

Soit d'abord $\mathfrak{S}_0$, le système composé d'un seul carré dont la base est le segment $(0, 1)$ de l'axe des abscisses. Posons encore $\mathfrak{S}_1 = \varphi_{3,2}(\mathfrak{S}_0)$, et, généralement, lorsque $p \geq 1$ et $\mathfrak{S}_p = \varphi_{n,k}(\mathfrak{S}_{p-1})$, soit:

$$\mathfrak{S}_{p+1} \begin{cases} = \varphi_{n,k+1}(\mathfrak{S}_p), & \text{si: } k < n(n-2), \quad \text{où:} \\ = \varphi_{n+1,2}(\mathfrak{S}_p), & \text{si: } k = n(n-2), \end{cases}$$

Posons ensuite:

$$F = \prod_{p=0}^{\infty} \mathfrak{S}_p.$$

Nous affirmons que *F jouit des propriétés désirées.*

En effet, soit pour toute valeur réelle a, $F(a)$, respectivemen

$\overline{\mathfrak{S}}_p(a)$, la partie de F, respectivement de $\overline{\mathfrak{S}}_p$, contenue dans la droite $x = a$. On voit de suite que, pour tout a, situé en dehors du segment $(0, 1)$ $\overline{\mathfrak{S}}_p(a)$ est vide, donc, à plus forte raison, $F(a) = 0$. D'autre part, lorsque $0 \leqslant a \leq 1$, on a, pour tout p: $\overline{\mathfrak{S}}_p(a) \neq 0$, donc, d'après le théorème bien connu de Cantor, $F(a) \neq 0$.

La projection de F sur l'axe des abscisses constitue ainsi le segment $(0, 1)$.

Soit maintenant l une droite quelconque passant par l'origine et différente de l'axe de x. Soit $N \geq 3$ un nombre naturel. D'après (1), il existe un couple de nombres entiers (n, k) tels que $n \geq N$, $1 \leq k < n(n-2)$ et que

$$l \subset S_{n,k}.$$

En vertu de la définition de la suite $\{\mathfrak{S}_p\}$, il existe une valeur p telle que

$$\mathfrak{S}_{p+1} = \varphi_{n,k}(\mathfrak{S}_p),$$

donc, d'après la proposition (A) (§ 5):

$$|F_l|\,^{1)} \leq |(\overline{\mathfrak{S}}_{p+1})_l| \leqslant \frac{5}{n} \leq \frac{5}{N}.$$

Or, N étant un entier quelconque ≥ 3, on en conclut:

$$|F| = 0,$$

ce qui justifie notre assertion.

§ 7. Profitons encore de l'occasion pour mentionner un résultat qui est du à M. Sierpiński et qui se rattache évidemment à la question traitée dans cette note.

Désignons, pour tout ensemble plan P, par $f(P; \varphi)$ la mesure de la projection de P sur la droite faisant l'angle φ avec l'axe d'abscisses. M. Sierpiński a prouvé que, *lorsque P est un ensemble fermé et borné, la fonction $f(P; \varphi)$ ainsi déterminée, est semi-continue supérieurement par rapport à φ.*

En effet, le théorème est évident lorsque P est un carré, et, par conséquent, aussi lorsque P est une somme d'un nombre fini de carrés; la fonction $f(P; \varphi)$ est dans ce cas *continue*.

Or, P étant un ensemble fermé et borné quelconque, ont peut toujours construire une suite descendente d'ensembles $\{P_n\}$ tel que chacun d'eux soit une somme d'un nombre fini de carrés et que

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} P_n.$$

1) A étant un ensemble et l une droite, A_l désigne la projection de A sur l (cf. § 2).

Les fonctions $f(P_n; \varphi)$ forment alors aussi une suite non-croissante de fonctions et

$$f(P; \varphi) = \lim_{n \to \infty} f(P_n; \varphi)\ ^{1)};$$

$f(P; \varphi)$ étant donc limite d'une suite non-croissante de fonctions continues, est, elle-même, semi-continue supérieurement.

Remarque. Remarquons, en terminant cette note, que les méthodes y employées permettent effectuer une construction un peu plus générale et utile pour les considérations ultérieures: notamment celle d'un ensemble fermé plan dont la projection sur toute droite $y = mx$ $(-M \leqslant m \leqslant M)$ est un segment de longueur $\geqslant 1$ et sur toute autre droite passant par l'origine — un ensemble de mesure nulle; M désigne un nombre non négatif quelconque.

1) Cette égalité découle de la précédente en vertu p. ex. du théorème connu de Cantor („*Durchschnittssatz*").