Sur l'ensemble de valeurs qu'une fonction continue prend une infinité non dénombrable de fois.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans le vol. VI de ce journal [1]) nous avons démontré avec M. Mazurkiewicz que *l'ensemble de toutes les valeurs qu'une fonction continue d'une variable réelle prend une infinité non dénombrable de fois est une projection d'un ensemble plan mesurable (B)* [2]).

La démonstration que nous avons donné est assez compliquée et fait appel à la thèorie des ensembles *(A)* de M. Souslin. Le but de cette Note est de démontrer notre théorème directement, sans recours aux ensembles *(A)*. Dans notre démonstration nous ferons usage d'une méthode due à M. Lusin, utilisée par ce géomètre dans la théorie des ensembles dits projectifs.

Lemme. *F étant un ensemble plan fermé, l'ensemble de tous les nombres réels c, tels que la droite $y=c$ rencontre F en un ensemble parfait de points est un $F_{\sigma\delta}$.*

Démonstration. Soit F un ensemble plan fermé, (a, b) un intervalle (fini) donné. Soit F_n l'ensemble de tous les nombres réels c, pour lesquels il existe deux nombres réels x' et $x'' \neq x'$, tels que $a \leq x' \leq b$, $a \leq x'' \leq b$, $x' - x'' \geqslant 1/n$, $(x', c) \varepsilon F$, $(x'', c) \varepsilon F$. L'ensemble F étant fermé, on voit sans peine que les ensembles F_n le sont aussi, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Il en résulte que l'ensemble E de tous les nombres réels c, tels que le segment $a \leq x \leq b$, $y = c$ contient plus qu'un point de F, est un F_σ (puisque, évidemment $E = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$). Par conséquent l'ensemble H de tous les

[1]) *Fund. Math.*, t. VI (1924), p. 161—169.

[2]) Nous y avons démontré aussi la proposition réciproque.

nombres réels a, tels que le segment $a \leq x \leq b$, $y = c$ contient au plus un point, est un G_δ. Or, l'ensemble Φ de tous les nombres réels c tels que le segment $a \leq x \leq b$, $y = c$ contient au moins un point de F est evidemment fermé (puisque F est fermé). Donc, l'ensemble $M = M(a, b)$ de tous les nombres réels c, tels que le segment $a \leq x \leq b$, $y = c$ contient précisément un point de F, est un G_δ (puisque évidemment $M = H\,\Phi$) L'ensemble $S = \Sigma M(a, b)$, où la sommation s'étend à tous les intervalles aux extrémités rationnelles, est un $G_{\delta\sigma}$. Or, on voit sans peine que S est l'ensemble de tous les nombres réels c, tels que l'ensemble de tous les points de F situés sur la droite $y = c$ contient au moins un point isolé. Par conséquent $N(F) = C\,S$ est l'ensemble de tous les nombres réels c, tels que la droite $y = c$ rencontre F en un ensemble dense en soi, ou, ce qui revient au même, parfait (puisque F est fermé). Donc $N(F)$ est un $F_{\sigma\delta}$, c. q. f. d.

Remarquons que F étant un ensemble plan fermé choisi convenablement, $N(F)$ peut être un ensemble $F_{\sigma\delta}$ linéaire quelconque. En effet, soit N un ensemble linéaire $F_{\sigma\delta}$ donné. Nous pouvons donc poser $N = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{k,n}$, où $F_{k,n}$ sont des ens. linéaires fermés. Désignons par $\Phi_{k,n}$ l'ensemble (fermé) de tous les points (x, y) du plan, tels que $k \leq x \leq k + \frac{1}{n}$ et $y \varepsilon F_{k,n}$, et par P_k l'ensemble de points (x, y), tels que $x = k$, et posons $F = \sum_{k=1}^{\infty} P_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{k,n}$. On voit sans peine que F est fermé et que $N(F) = N$.

Or, observons que si E est un ens. F_σ, $N(E)$ peut être non mesurable (B). En effet, on pourrait démontrer que pour qu'il existe un ensemble E qui est un F_σ, tel que $N(E) = H$, il faut et il suffit que H soit un complémentaire d'un ensemble (A).

Or, on pourrait prouver que pour qu'il existe un ensemble (A), E, tel que $N(E) = H$, il faut et il suffit que H soit un complémentaire d'une projection d'un ensemble complémentaire à un ensemble (A).

Soit maintenant E un ensemble fermé donné, situé dans le plan $z = 0$. Il s'agit de prouver que l'ensemble $N(E)$ de tous les nombres réels b, tels que la droite $y = b$, $z = 0$ rencontre E en une infinité non dénombrable de points, est une projection d'un ensemble mesurable (B). (L'image d'une fonction continue étant un ensemble plan fermé, il en résultera tout de suite le théorème dont la démonstration est le but de cette note).

L'ensemble E étant fermé, son complémentaire $H = CE$ est un F_σ et nous pouvons poser $H = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$, où F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont des ensembles fermés.

Soit U un ensemble fermé, situé dans le plan $y = 0$, tel que les intersections de U par les droites parallèles à l'axe $0x$ donnent tous les ensembles linéaires fermés. Pour démontrer l'existence d'un tel ensemble il suffirait d'effectuer des modifications évidentes dans la construction d'un ensemble analogue dans l'espace à 3 dimensions que j'ai donné dans le vol. VII de ce journal, p. 200—201. Désignons par L l'ensemble de tous les nombres réels c, tels que la droite $y = 0$, $z = c$ rencontre l'ensemble U en un ensemble parfait: d'après notre lemme L est un $F_{\sigma\delta}$. Désignons par M l'ensemble-somme de toutes les droites $x = 0$, $z = c$ (du plan $x = 0$), où $c \varepsilon L$: l'ensemble L étant un $F_{\sigma\delta}$, il en est évidemment de même de M.

Désignons par Φ_n l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace, tels que $(x, y, 0) \varepsilon F_n$ et $(x, 0, z) \varepsilon U$: les ensembles F_n et U étant fermés, on voit tout de suite que les ensembles Φ_n sont fermés (pour $n = 1, 2, \ldots$). Or, désignons par Q l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace, tels que $(x, y, 0) \varepsilon H$ et $(x, 0, z) \varepsilon U$: d'après $H = F_1 + F_2 + \ldots$ nous avons évidemment $Q = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots$, d'où résulte que Q est un F_σ. Désignons par T la projection de Q sur le plan $x = 0$: comme projection d'un F_σ, l'ensemble T est un F_σ. Posons $R = M \cdot CT$: l'ensemble M étant un $F_{\sigma\delta}$ et l'ensemble CT un G_δ (comme complémentaire d'un F_σ), on voit sans peine que R est un $F_{\sigma\delta}$. Or, on voit sans peine que l'ensemble $N(E)$ est la projection Π de l'ensemble R sur l'axe $0y$.

En effet, soit $b \varepsilon N(E)$. De la définition de l'ensemble $N(E)$ résulte que la droite $y = b$, $z = 0$ rencontre l'ensemble fermé E en une infinité non dénombrable de points. Un ensemble fermé non dénombrable contenant un sous-ensemble parfait, il en résulte qu'il existe un ensemble parfait P, situé sur la droite $y = b$, $z = 0$ et contenu dans E. Or, de la propriété de l'ensemble U et de la définition de l'ensemble L résulte qu'il existe un nombre réel $c \varepsilon L$, tel que pour tout x réel les formules $(x, 0, c) \varepsilon U$ et $(x, b, 0) \varepsilon P$ sont équivalentes. D'après $P \subset E$ nous concluons donc que la formule $(x, 0, c) \varepsilon U$ entraîne $(x, b, 0) \varepsilon E$, c'est-à-dire $(x, b, 0) \varepsilon CH$. Il n'existe donc aucun x réel, tel qu'on ait à la fois $(x, b, 0) \varepsilon H$ et $(x, 0, c) \varepsilon U$, donc (d'après la déf. de Q) aucun x réel, tel que $(x, b, c) \varepsilon Q$. Il en résulte (d'après la déf. de T) que $(0, b, c) \varepsilon CT$. Or, de $c \varepsilon L$ et de la déf. de M résulte que $(0, b, c) \varepsilon M$. Nous avons donc $(0, b, c) \varepsilon M \cdot CT = R$, ce qui prouve que b est la projection d'un point de R sur l'axe $0y$, c'est-à-dire que $b \varepsilon \Pi$.

Or, soit $b \varepsilon \Pi$. Donc, b est la projection sur l'axe $0y$ d'un point de R, soit du point $(0, b, c)$. De $(0, b, c) \varepsilon R$ et de $R = M \cdot CT \subset M$ résulte que $(0, b, c) \varepsilon M$, d'où résulte, d'après la déf. de M, que $c \varepsilon L$ et il s'en suit d'après la déf. de L que la droite $y=0$ $z=c$ rencontre U en un ensemble parfait, soit P. Nous avons donc $(x, 0, c) \varepsilon U$ pour $x \varepsilon P$. Si pour un $x \varepsilon P$ on aurait $(x, b, 0) \varepsilon H$, on aurait, d'après $(x, 0, c) \varepsilon U$ et d'après la déf. de Q: $(x, b, c) \varepsilon Q$, ce qui donnerait, d'après la déf. de T: $(0, b, c) \varepsilon T$, ce qui est impossible puisque $(0, b, c) \varepsilon R = M . CT$. Donc $(x, b, 0) \varepsilon CH = E$ pour $x \varepsilon P$, ce qui prouve que l'intersection de E par la droite $y=b$, $z=0$ contient un sous-ensemble parfait P, d'où résulte que $b \varepsilon N(E)$.

La formule $N(E) = \Pi$ est ainsi établie. Π étant une projection d'un ensemble mesurable (B) (d'un $F_{\sigma\delta}$), notre théorème est démontré.