Sur une propriété des ensembles *(A)*.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Nous avons démontré avec M. Lusin en 1923 [1]) que *tout ensemble (A) de M. Souslin est une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B* [2]). Le but de cette note est de donner une démonstration plus simple et directe de cette propriété et d'en donner une généralisation.

1. Supposons qu'à tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$ corresponde un intervalle $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$: on dit qu'on a un *système déterminant* $S\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$. On appelle *noyau* du système S l'ensemble-somme de tous les produits infinis

$$\delta_{n_1} \cdot \delta_{n_1, n_2} \cdot \delta_{n_1, n_2, n_3} \cdot \ldots,$$

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$.

On appelle *ensemble (A)* (linéaire) tout ensemble qui est noyau d'un système déterminant.

Soit E un ensemble *(A)* donné, noyau du système $S\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$. Posons, pour tout système fini de nombres náturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$\delta^0_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \tag{1}$$

[1]) N. Lusin et W. Sierpiński: *Sur un ensemble non mesurable B*. Journal de Mathématiques, t. II (1923), p. 52.

[2]) La démonstration d'une propriété analogue des ensembles complémentaires aux ensembles (*A*) se trouve déjà dans le mémoire de N. Lusin et W. Sierpiński: *Sur quelques propriétés des ensembles* (*A*). Bull. Acad. Cracovie 1918, p. 39.

(2) $$\delta^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \dots, n_k} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \dots, n_k, n}$$

pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, et

(3) $$\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \prod_{\xi < \alpha} \delta^{\xi}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

pour tout nombre ordinal α de seconde espèce, le produit $\prod\limits_{\xi < \alpha}$ s'étendant à tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$.

Les ensembles $\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, définies ainsi par l'induction transfinie, sont évidemment mesurables *(B)* pour tout système fini d'indices $n_1, n_2, \dots, n_k$ et tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$.

D'après (2) et (3) on trouve tout de suite par l'induction transfinie:

(4) $$\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subset \delta^{\beta}_{n_1, n_2, \dots, n_k} \text{ pour } \alpha \geqslant \beta.$$

Posons

(5) $$S^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{\alpha}_{n}$$

et

(6) $$T^{\alpha} = \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_k)} (\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \dots, n_k} - \delta^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \dots, n_k}),$$

la sommation dans (6) s'étendant à tous les systèmes finis de nombres naturels $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Les ensembles S^{α} et T^{α}, ainsi que leurs différences $S^{\alpha} - T^{\alpha}$, seront évidemment tous mesurables *(B)* pour $\alpha < \Omega$.

Nous prouverons que

(7) $$E = \sum_{\alpha < \Omega} (S^{\alpha} - T^{\alpha}),$$

la sommation s'étendant à tous les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$.

Soit α un nombre ordinal donné $< \Omega$ et soit x un élément de l'ensemble $S^{\alpha} - T^{\alpha}$. Nous avons donc

(8) $$x \,\varepsilon\, S^{\alpha}$$

et

(9) $$x \text{ non } \varepsilon\, T^{\alpha}.$$

De (8) et de (5) résulte qu'il existe un nombre naturel m_1, tel que $x \,\varepsilon\, \delta^{\alpha}_{m_1}$. Or, de (9) et de (6) résulte que x non $\varepsilon\, (\delta^{\alpha}_{m_1} - \delta^{\alpha+1}_{m_1})$

(puisque $\delta^{\alpha}_{m_1} - \delta^{\alpha+1}_{m_1}$ est un des termes de la somme (6)): d'après $x \varepsilon \delta^{\alpha}_{m_1}$ nous trouvons donc $x \varepsilon \delta^{\alpha+1}_{m_1}$. Or, d'après (2):

$$\delta^{\alpha+1}_{m_1} = \delta^{\alpha}_{m_1} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{\alpha}_{m_1, n}$$

et de $x \varepsilon \delta^{\alpha+1}_{m_1}$ résulte qu'il existe un indice m_2, tel que $x \varepsilon \delta^{\alpha}_{m_1, m_2}$. D'après (9) et (6) nous avons x non $\varepsilon\, (\delta^{\alpha}_{m_1, m_2} - \delta^{\alpha+1}_{m_1, m_2})$: la formule $x \varepsilon \delta^{\alpha}_{m_1, m_2}$ donne donc $x \varepsilon \delta^{\alpha+1}_{m_1, m_2}$. Or, d'après (2)

$$\delta^{\alpha+1}_{m_1, m_2} \subset \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{\alpha}_{m_1, m_2, n}$$

et de $x \varepsilon \delta^{\alpha+1}_{m_1, m_2}$ résulte l'existence d'un indice m_3, tel que $x \varepsilon \delta^{\alpha}_{m_1, m_2, m_3}$. En raisonnant ainsi de suite nous obtenons une suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$, telle que

$$x \varepsilon \delta^{\alpha}_{m_1, m_2, \ldots, m_k}, \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots$$

D'après (1) et (4) (pour $\beta = 0$) il en résulte que

$$x \varepsilon \delta_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc, d'aprés la définition du noyan E du système $S\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, que $x \varepsilon E$.

Nous avons ainsi démontré que $(S^{\alpha} - T^{\alpha}) \subset E$ pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$: il en résulte que

$$\sum_{\alpha < \Omega} (S^{\alpha} - T^{\alpha}) \subset E. \tag{10}$$

Or, soit x un élément de l'ensemble E. Il existe donc une suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$, telle que

$$x \varepsilon \delta_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{11}$$

Je dis que

$$x \varepsilon \delta^{\alpha}_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{12}$$

pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$. D'après (11) et (1) la formule (12) est vraie pour $\alpha = 0$. Or, soit β un nombre ordinal $< \Omega$ et supposons que la formule (12) est vraie pour tout nombre ordinal $\alpha < \beta$. Si β est un nombre de seconde espèce, il en résulte, d'après (3), que la formule (12) est vraie pour le nombre β. Si β est un nombre de première espèce, nous pouvons poser $\beta=\alpha+1$, où $\alpha<\beta$, et la formule (2) donne (pour tout nombre naturel k)

$$\delta^{\beta}_{m_1, m_2, \ldots, m_k} = \delta^{\alpha}_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{\alpha}_{m_1, m_2, \ldots, m_k, n} \supset \delta^{\alpha}_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \delta^{\alpha}_{m_1, \ldots, m_k, m_{k+1}}$$

donc $x \varepsilon \delta^{\beta}_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$, puisque, d'après (12) on a $x \varepsilon \delta^{\alpha}_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ et $x \varepsilon \delta^{\alpha}_{m_1, m_2, \ldots, m_k, m_{k+1}}$. La formule (12) est ainsi établie par l'induction transfinie pour tout nombre ordinal $\alpha<\Omega$.

En particulier, il résulte de (12) que $x \varepsilon \delta^{\alpha}_{m_1}$ pour $\alpha<\Omega$, donc, d'après (5), que $x \varepsilon S^{\alpha}$ pour $\alpha<\Omega$. Nous avons ainsi démontré que $E \subset S^{\alpha}$ pour $\alpha<\Omega$, donc que

(13) $$E \subset \prod_{\alpha<\Omega} S^{\alpha}.$$

Je dis, maintenant, que

(14) $$\prod_{\alpha<\Omega} T^{\alpha}=0.$$

Admettons, en effet, que la formule (14) n'est pas vraie. Il existe donc un nombre x tel que

(15) $$x \varepsilon T^{\alpha} \text{ pour } \alpha<\Omega.$$

De (15) et (6) résulte qu'il existe pour tout nombre ordinal $\alpha<\Omega$ au moins un système d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$ (dépendant de α), tel que

$$x \varepsilon (\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \delta^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}).$$

Or, l'ensemble de tous les systèmes finis d'indices $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ étant dénombrable et l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\alpha<\Omega$ étant non dénombrable, il en résulte tout de suite l'existence d'un système d'indices $p_1, p_2, \ldots, p_r$ (indépendant de α) et de deux nombres ordinaux $\xi<\Omega$ et $\eta<\xi$, tels que

(16) $$x \varepsilon (\delta^{\xi}_{p_1, p_2, \ldots, p_r} - \delta^{\xi+1}_{p_1, p_2, \ldots, p_r})$$

et

(17) $$x \varepsilon (\delta^{\eta}_{p_1, p_2, \ldots, p_r} - \delta^{\eta+1}_{p_1, p_2, \ldots, p_r})$$

De (16) et (17) résulte que

$$x \varepsilon \delta^{\xi}_{p_1, p_2, \ldots, p_r} \quad \text{et} \quad x \text{ non } \varepsilon\, \delta^{\eta+1}_{p_1, p_2, \ldots, p_r}$$

ce qui est incompatible avec (4), puisque (d'après $\eta<\xi$) $\eta+1 \leq \xi$. La formule (14) est ainsi établie.

Soit maintenant x un élément de l'ensemble E. D'après (14) il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$ tel que x non εT^α. Or, d'après (13), nous avons $x \varepsilon S^\alpha$. Donc $x \varepsilon (S^\alpha - T^\alpha)$. Nous avons ainsi démontré que si $x \varepsilon E$, il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que $x \varepsilon (S^\alpha - T^\alpha)$. Il en résulte que

(18) $$E \subset \sum_{\alpha < \Omega} (S^\alpha - T^\alpha)$$

Les formules (10) et (18) donnent la formule (7), c. q. f. d.

Observons encore que les formules (7), (13) et (14) donnent tout de suite la formule

(19) $$E = \prod_{\alpha < \Omega} S^\alpha.$$

En effet, soit x un élément de l'ensemble $P = \prod_{\alpha < \Omega} S^\alpha$. D'après (14), il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que x non εT^α. Or, de $x \varepsilon P$ résulte que $x \varepsilon S^\alpha$: nous avons donc $x \varepsilon (S^\alpha - T^\alpha)$, donc, d'après (7), $x \varepsilon E$. Nous trouvons ainsi $P \subset E$ et la formule (13) donne la formule (19). Il en résulte que *tout ensemble complémentaire d'un ensemble (A) est une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B.*

2. Nous prouverons maintenant la proposition suivante qui peut être regardée comme une généralisation des propriétés démontrées dans le § 1:

Tout ensemble qu'on obtient en partant des ensembles (A) et en effectuant dans un ordre quelconque un nombre fini ou une infinité dénombrable d'additions, de soustractions et de multiplications d'ensembles est une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B.

F étant une famille donnée quelconque d'ensembles et $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ étant des ensembles de la famille F, on dit que le noyau du système $S\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ est un résultat de *l'opération* A effectuée sur les ensembles de la famille F.

K_1 étant la famille de tous les ensembles linéaires complémentaires aux ensembles *(A)*, désignons par K_2 la famille de tous les ensembles résultants de l'opération A effectuée sur les ensembles de la famille K_1, et désignons par K_3 la famille de tous les ensembles linéaires dont les complémentaires appartiennent à K_2.

Soit H un ensemble donné quelconque de la famille K_3. L'ensemble $E = CH$ appartient donc à K_2 et parsuite il est noyau d'un système $S\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, où les ensembles $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sont complémentaires aux ensembles *(A)*.

Posons $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et définissons les ensembles $\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et S^{α} par les formules (1), (2), (3) et (5). Nous aurons la formule (19) (puisque la démonstration de cette formule, donné dans le § 1, n'utilisait pas l'hypothèse que les ensembles $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sont des intervalles), donc aussi la formule

$$CE = \sum_{\alpha < \Omega} CS^{\alpha}. \tag{20}$$

Or, les ensembles $C\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ étant des ensembles *(A)* et la somme et le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles *(A)* étant, comme on sait, un ensemble *(A)*. il résulte sans peine des formules (1), (2), (3) et (5) (et des formules de de Morgan) que les ensembles CS^{α} sont de ensembles *(A)*. Donc, d'après (20), $H = CE$ est une somme de $\aleph_1$ ensembles *(A)*. Or, tout ensemble *(A)* étant, comme nous l'avons démontré dans le § 1, une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B, il en résulte tout de suite (d'après la formule $\aleph_1^2 = \aleph_1$) que H est une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B.

Nous avons ainsi démontré que tout ensemble de la famille K_3 est une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B.

Or, désignons par K_4 la plus petite classe K d'ensembles satisfaisant aux quatre conditions suivantes:

1) Tout ensemble *(A)* linéaire appartient à K.
2) Tout ensemble linéaire complémentaire à un ensemble *(A)* appartient à K.
3) Si les ensembles $E_1, F_2, E_3, \ldots$ appartiennent à K, leur somme $E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$ appartient à K.
4) Si les ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$ appartiennent à K, leur produit $E_1\, E_2\, E_3 \ldots$ appartient à K.

Je dis que $K_4 \subset K_3$.

La classe K_4 étant, par définition, la partie commune (produit) de toutes les classes K d'ensembles linéaires satisfasant aux conditions 1)—4), il suffira évidemment de démontrer que K_3 est une des classes K satisfaisant aux conditions 1)—4).

Soit E un ensemble *(A)* linéaire. L'ensemble CE peut être évidemment regardé comme résultat de l'opération A effectuée sur les ensembles qui sont tous égaux à CE: donc CE appartient à la classe K_2 et parsuite E appartient à K_3. La classe $K=K_3$ jouit donc de la propriété 1).

Or, tout ensemble *(A)* linéaire étant un résultat de l'opération A effectuée sur des intervalles, donc sur les ensembles dont les complémentaires sont des ensembles *(A)*, on voit que tout ensemble *(A)* linéaire appartient à la classe K_2 et parsuite tout ensemble linéaire complémentaire à un ensemble *(A)* appartient à la classe K_3. La classe $K=K_3$ jouit donc de la propriété 2).

On peut démontrer que si $E_1, E_2, E_3, \dots$ est une suite infinie d'ensembles dont chacun est résultat de l'operation A effectuée sur les ensembles d'une famille F, il en est de même de leur somme $E_1+E_2+E_3+\dots$ et de leur produit $E_1 E_2 E_3 \dots$ (La démonstration est tout à fait analogue à la démonstration qu'une somme et qu'un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles *(A)* sont des ensembles *(A)*). Il en résulte que la classe $K=K_2$, et parsuite aussi la classe $K=K_3$ jouit des propriétés 3) et 4) (Puisque de 3), resp. 4) pour K_2 résulte 4), resp. 3) pour K_3).

Nous avons ainsi démontré que $K_4 \subset K_3$.

Or, je dis que si E est un ensemble de K_4, CE l'est aussi. Pour le prouver désignons par K_5 la classe de tous les ensembles linéaires dont le complémentaires appartiennent à K_4. La classe $K=K_4$ jouissant des propriétés 1)—4), on voit sans peine que la classe $K=K_5$ jouit aussi de ces propriétés. Donc, K_5 étant une des classes K jouissant des propriétés 1)—4), nous trouvons $K_4 \subset K_5$. Donc, si E appartient à K_4, E appartient aussi à K_5, et il résulte de la définition de la classe K_5 que CE appartient à K_4.

Il en résulte de la formule $E_1 - E_2 = E_1 . CE_2$ et de la propriété 4) de la classe $K=K_4$ que cette classe jouit encore de la propriété 5) suivante:

5) La différence de deux ensembles appartenant à K appartient à K.

Des propriétés 1), 3), 4) et 5) de la classe $K=K_4$ résulte que tout ensemble qu'on obtient en effectuant dans un ordre quelconque un nombre fini ou une infinité dénombrable d'additions, de soustractions et de multiplications d'ensembles à partir de ensembles *(A)*, appartient à K_4, donc, d'après $K_4 \subset K_3$, aussi à K_3, et parsuite est une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B.

Notre théorème est ainsi démontré.

La proposition démontrée est encore susçeptible d'une généralisation. On voit notamment sans peine que $K_4 \subset K_2$ et on pourrait démontrer que tout ensemble de K_2 est une projection d'un ensemble plan complémentaire d'un ensemble (A); or, toute projection d'un ensemble plan complémentaire d'un ensemble (A) est une somme de $\aleph_1$ ensemble mesurables B [1]).

D'après une remarque de M. Kuratowski notre théorème admet encore une généralisation dans un autre sens: on pourrait notamment démontrer que *tout ensemble qu'on obtient en partant des intervalles et en effectuant un nombre fini de fois les opérations A et C* (complémentaire) *est une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B* (Or, on ne sait pas si ce théorème subsiste pour une infinité dénombrable d'opérations A et C).

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. VII, p. 240.