Nouvelle démonstration d'un théorème de Paul Urysohn.

Par

L. Tumarkin (Moscou).

1. Parmi les théorèmes généraux de Paul Urysohn [1]) sur la dimension des ensembles se trouve la proposition affirmant que l'ensemble Q de tous les points x d'un ensemble quelconque C (situé dans un espace métrique séparable) pour lesquels $\dim_x C$ est $\leqslant k$, est un G_δ (rel. C) [2]).

La démonstration de cet important théorème étant assez compliquée, je me propose de donner ici une démonstration qui me semble très simple et qui ne fait aucune supposition sur la séparabilité de l'espace.

Il s'agit donc du théorème suivant:

Soit C un ensemble situé dans un espace métrique quelconque. Désignons par Q l'ensemble de tous les points x de C tels que $\dim_x C \leqslant k$; l'ensemble Q est un G_δ (rel. C).

2. Démonstration. Urysohn lui-même a remarqué [3]) que sans altérer sa définition de la dimension, on peut donner à la notion „ε-séparation d'un point $x \subset C$" (par rapport à C) la forme suivante:

[1]) »Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes«, 1re Partie, t. VII et t. VIII de ce Journal. Dans la présente note, les notations sont empruntées à l'Introduction de ce Mémoire (t. VII, pp. 49 et suiv.).

[2]) Urysohn, op. cit. ch. IV, § 13 (*Fund. Math.* VIII, p. 277).

[3]) Op. cit. ch. I, § 12 (*Fund. Math.* VII, p. 73).

La décomposition

$$C = A + B + D \tag{1}$$

de l'ensemble C en trois ensembles deux à deux sans points communs est une ε-séparation d'un point $x \subset C$ si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$x \subset A; \quad H(A, D) = 0; \quad \delta(A + B) < \varepsilon. \tag{2}$$

On peut en outre supposer que B soit fermé (rel. C) [1].

3. Cette dernière supposition faite, l'ensemble A devient un domaine (rel. C), et, ce qui est essentiel, (1) est une ε-séparation de tout point y de ce *domaine* A.

Il en résulte que l'ensemble Q_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ de tous les points $x \subset C$ qui peuvent être $\frac{1}{i}$-séparés par des ensembles fermès B de dimension $\leqslant k - 1$, cet ensemble Q_i est un domaine (rel. C).

Or Q est évidemment la partie commune à tous les ensembles Q_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, donc Q est un G_δ (rel. C), c. q. f. d.

[1] Op. cit. ch. I, § 7, théor. IV (p. 69).