Sur les dérivées généralisées.

(Extension des résultats de M. Mazurkiewicz).

Par

Herman Auerbach (Léopol).

Dans cette note je me propose de généraliser les théorèmes suivants démontrés par M. Mazurkiewicz [1]):

1. *Une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a, b) et remplissant la condition:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = 0 \qquad a<x<b$$

se réduit dans cet intervalle à une constante.

2. *$f(x)$ étant une fonction bornée dans l'intervalle (a, b) et remplissant la condition*

$$\lim_{h\to 0} [f(x+h)+f(x-h)-2f(x)] = 0$$

à l'intérieur de cet intervalle, (1) l'ensemble de discontinuités de $f(x)$ dans (a, b) est de mesure nulle, (2) $f(x)$ est de première classe dans (a, b).

3. *$f(x)$ étant une fonction bornée dans l'intervalle (a, b) et remplissant la condition*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h} = 0$$

à l'intérieur de (a, b), l'ensemble de discontinuités de $f(x)$ est non dense dans (a, b).

[1]) St. Mazurkiewicz. *O pierwszej pochodnej uogólnionej.* (*Sur la dérivée première généralisée*). *Prace mat. fiz.* T. XXVIII. (1917). p. 79—85. — *O związku między istnieniem drugiej pochodnej uogólnionej, a ciągłością funkcji.* (*Sur la relation entre l'existence de la dérivée seconde généralisée et la continuité de la fonction*). *Prace mat. fiz.* T. XXX. (1919). p. 225—242.

4. *Si la fonction $f(x)$ est bornée dans (a, b) et admet à l'intérieur de (a, b) une dérivée seconde généralisée, alors (1) $f(x)$ est de classe 1 dans (a, b); (2) l'ensemble de discontinuités de $f(x)$ est de mesure nulle et non dense dans (a, b).*

Lemme I. *Soit $f(x)$ une fonction satisfaisante aux conditions:*

$$(A)\quad \begin{cases} 1^0\ |f(x)| < +\infty \text{ dans l'intervalle } (a, b)\ ^{1)}. \\ 2^0\ \overline{\lim_{h\to 0}} \left|\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right| < +\infty \qquad a < x < b \\ 3^0\ f^*(x) \equiv \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = 0 \text{ pour presque tout } x \text{ de } (a, b). \end{cases}$$

Définissons pour $n > 0$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= f(x) && \text{dans} \quad E(-n \leqslant f \leqslant n) \\ f_n(x) &= n && \quad " \qquad E(f > n) \\ f_n(x) &= -n && \quad " \qquad E(f < -n) \end{aligned}$$

La fonction $f_n(x)$ satisfait aussi aux conditions (A).

Démonstration. On a par définition de $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \frac{|f(x)+n| - |f(x)-n|}{2}, \text{ donc}$$

$$\left|\frac{f_n(x+h) - f_n(x+h)}{2h}\right| =$$

$$= \left|\frac{|f(x+h)+n| - |f(x-h)+n|}{4h} - \frac{|f(x+h)-n| - |f(x-h)-n|}{4h}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{|f(x+h)+n| - |f(x-h)+n|}{4h}\right| + \left|\frac{|f(x+h)-n| - |f(x-h)-n|}{4h}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\frac{f(x+h) - f(x-h)}{4h}\right|.$$

Lemme II. *Une fonction $f(x)$ satisfaisante aux conditions:*

$$(B)\quad \begin{cases} 1^0\ f(x) \text{ finie et continue dans l'intervalle } (a, b). \\ 2^0\ \overline{\lim_{h\to 0}} \left|\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\right| < +\infty \qquad a < x < b \\ 3^0\ f^{**}(x) \equiv \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = 0 \text{ pour presque tout } x \text{ de } (a, b). \end{cases}$$

est une fonction linéaire.

[1]) Ici et dans la suite l'intervalle (a, b) peut être fermé ou non.

Démonstration. La démonstration résulte immédiatement d'une généralisation du théorème bien connu de H. A. Schwarz due à M. de la Vallée Poussin [1]).

Théorème I. *Une fonction $f(x)$ mesurable et satisfaisante aux conditions (A) dans l'intervalle (a, b) est presque partout constante dans cet intervalle.*

Démonstration. Posons $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt$. Alors

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \left| \frac{F_n(x+h) + F_n(x-h) - 2F_n(x)}{h^2} \right| =$$

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \left| \frac{1}{h^2} \int_0^h \frac{f_n(x+t) - f_n(x-t)}{2t}\, 2t\, dt \right| \leqslant \overline{\lim_{h\to 0}} \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x-h)}{2h} \right|$$

La fonction $f_n(x)$ remplissant d'après le Lemme I les conditions (A), $F_n(x)$ satisfait aux conditions (B). $F_n(x)$ est donc (Lemme II) une fonction linéaire et $f_n(x)$, qui est presque partout sa dérivée, a une valeur constante c_n dans un ensemble E_n de mesure $b-a$. Or on a $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, donc $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ dans l'ensemble $E = \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$ dont la mesure est aussi $b-a$.

Théorème II. *Le minimum $m(x)$ et le maximum $M(x)$ d'une fonction $f(x)$ remplissant les conditions (A) dans l'intervalle (a, b) (mesurable ou non) sont presque partout constantes et presque partout continues dans cet intervalle.*

Démonstration Posons $\Phi_n(x) = \overline{\int_a^x} f_n(t)\, dt$, l'intégrale étant prise au sens de Darboux. On a

$$\frac{\Phi_n(x+h) + \Phi_n(x-h) - 2\Phi_n(x)}{h^2} =$$

$$= \frac{\overline{\int_0^h} f_n(x+t)\, dt - \overline{\int_0^h} f_n(x-t)\, dt}{h^2} \qquad a < x < b$$

La fonction $f_n(x)$ satisfait aux conditions (A) d'après le Lemme I.

[1]) Ch. de la Vallée Poussin. *Cours d'Analyse Infinitésimale T. I. 3ème éd. Louvain Paris 1914, p. 287.*

On a donc pour h suffisamment petit, en désignant par ε. un nombre positif convenablement choisi

$$f_n(x-t) - 2\varepsilon h \leqslant f_n(x+t) \leqslant f_n(x-t) + 2\varepsilon h \qquad 0 \leqslant t \leqslant h$$

$$\overline{\int_0^h} f_n(x-t)\,dt - 2\varepsilon h^2 \leq \overline{\int_0^h} f_n(x+t)\,dt \leq \overline{\int_0^h} f_n(x-t)\,dt + 2\varepsilon h^2$$

$$\text{donc } \overline{\lim_{h\to 0}} \left| \frac{\Phi_n(x+h) + \Phi_n(x-h) - 2\Phi_n(x)}{h^2} \right| \leq 2\varepsilon < +\infty.$$

Si en particulier $f_n^{**}(x) = 0$, ce qui a lieu pour presque tout x, alors on peut supposer ε aussi petit que l'on veut. Par conséquent $\Phi_n^{**}(x) = 0$. La fonction $\Phi_n(x)$ satisfait donc aux conditions (B) d'où il résulte qu'elle est linéaire. Or on a $\Phi_n(x) = \int_a^x M_n(t)\,dt$ [1].

En raisonnant comme dans la démonstration du théorème I et en utilisant la relation $M(x) = \lim_{n\to\infty} M_n(x)$, on voit que $M(x)$ a presque partout une valeur constante M. Enfin, $M(x)$ étant semicontinue supérieurement, cette fonction est continue en tout point où elle prend la valeur M. De même pour $m(x)$.

Théorème III. (de M. Mazurkiewicz). *Une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle (a, b), bornée et remplissant la condition*

$$(C) \qquad \lim_{h\to 0} [f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)] = 0 \qquad a < x < b$$

est presque partout continue dans cet intervalle.

Démonstration [2]. Posons $\Phi(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt$, $\varphi(x) = \underline{\int_a^x} f(t)\,dt$.

Alors

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x-h)}{2h} = \frac{\overline{\int_0^h} f(x+t)\,dt + \overline{\int_0^h} f(x-t)\,dt}{2h} \qquad (a < x < b).$$

La fonction $f(x)$ remplissant la condition (C), on a pour $0 < t < h(x, \varepsilon)$

[1] Voir p. e. C. Carathéodory. *Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig-Berlin 1918, p. 459.*

[2] Cette démonstration est plus simple que celle de M. Mazurkiewicz

$$2f(x)-f(x-t)-\varepsilon \leq f(x+t) \leq 2f(x)-f(x-t)+\varepsilon \qquad 0\leq t\leq h$$

$$[2f(x-\varepsilon]h-\int_0^h f(x-t)\,dt \leq \int_0^h f(x+t)\,dt \leq [2f(x)+\varepsilon]h-\int_0^h f(x-t)dt$$

$$\left|\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x-h)}{2h}-f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{donc}$$

$$\Phi^*(x)=f(x) \quad \text{et de même} \quad \varphi^*(x)=f(x) \quad (a<x<b).$$

D'après le théorème I la différence $\Phi(x)-\varphi(x)$ est une constante. Cette constante étant égale à zéro à cause de $\varphi(a)=\Phi(a)=0$, $f(x)$ est intégrable (R), donc presque partout continue.

Théorème IV. *Une fonction $f(x)$ finie, intégrable et remplissant la condition (C) dans l'intervalle (a, b) est de première classe de Baire dans cet intervalle.*

Démonstration. En posant $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ on a

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_0^h \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}2dt=f(x)$$

Lemme III. *Soit (S): $\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(x)$ une série de fonctions continues dans l'intervalle (a, b) et $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ une série convergente à termes positifs* [1]. *Supposons qu'à chaque x de (a, b) corresponde un nombre naturel $N(x)$ de manière que $|\varphi_n(x)|\leq a_n$ pour $n>N(x)$ (ce qui entraîne la convergence absolue de (S)). Alors dans chaque sous-intervalle de (a, b) il existe un autre, dans lequel la série (S) converge uniformément (vers une fonction continue).*

Démonstration. On peut évidemment supposer que $N(x)$ est le plus petit nombre naturel possible. Il suffit de prouver que chaque sous-intervalle (a', b') de (a, b) contient un autre dans lequel $N(x)$ est borné.

[1]) On pourrait, plus généralement, supposer, que les a_ν sont des fonctions de x non negatives et semi-continues supérieurement et que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ converge uniformément dans (a, b).

Or, dans le cas contraire il existe dans (a', b') un point x_1 de sorte que $N(x_1) > 1$. $N(x_1)$ étant minimal on a $|\varphi_{N(x_1)}(x_1)| > a_{N(x_1)}$, donc $N(x) \geqslant N(x_1) > 1$ dans un intervalle fermé δ_1 contenu dans (a', b'). Dans δ_1 il existe de même un intervalle fermé δ_2, dans lequel $N(x) > 2$ et ainsi de suite. Les intervalles δ_i ont au moins un point commun et en ce point $N(x)$ surpasse tout nombre naturel, ce qui est impossible.

Théorème V. *L'ensemble de points de discontinuité d'une fonction $f(x)$ finie, intégrable et remplissant la condition*

$$(D_\alpha)\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^\alpha}=0 \qquad a<x<b, \qquad \alpha>0$$

est non dense dans (a, b) [1]

Démonstration. On a pour $a<x<b$, $0<h<h(x)$

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}-f(x)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{2h}\int_0^h \frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x)}{2t^\alpha}\,2t^\alpha\,dt\right| \leq \frac{1}{2h}\int_0^h 2t^\alpha\,dt < h^\alpha$$

Soit (a', b') un intervalle quelconque contenu dans (a, b), $a<a'<b'<b$. Il existe évidemment une suite $\{h_n\}$ remplissant les conditions:

$$1^0.\ h_n > h_{n+1} > 0; \qquad 2^0.\ a'-h_n > a,\ b'+h_n < b;$$

$3^0.$ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} h_\nu^\alpha$ convergente. Posons

$$\Phi_n(x) = \frac{F(x+h_n)-F(x-h_n)}{2h_n}.$$

Alors on a pour $n > N(x)$.

$$|\Phi_n(x)-f(x)| < h_n^\alpha, \qquad |\Phi_{n+1}(x)-f(x)| < h_{n+1}^\alpha,$$

donc

$$|\Phi_{n+1}(x)-\Phi_n(x)| < 2h_n^\alpha$$

[1] Ce théoreme devient inexact lorsqu'on remplace la condition $(D\alpha)$ par (C). M. Mazurkiewicz a en effet démontré l'existence de fonctions bornées et remplissantes la condition (C), dont l'ensemble des points de discontinuité est identique à un ensemble dénombrable arbitrairement donné.

Remarquons encore que le téorème V et sa démonstration subsistent lorsqu'on y remplace h^α par une fonction $\varphi(h)$ tendant vers zéro avec h et dailleurs quelconque.

Il suffit maintenant d'appliquer le Lemme III à la série

$$\Psi_1(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [\Psi_{\nu+1}(x) - \Psi_\nu(x)]$$

laquelle représente $f(x)$ dans (a', b').

Les résultats de M. Mazurkiewicz, sont des simples conséquences des théorèmes énoncés ci-dessus.

Remarque. Le théorème III (p. 52) est valable dans le cas plus général où la condition *(C)* n'est que *presque partout* vérifiée, car la fonction $\Phi(x) - \varphi(x)$ (p. 53) satisfait alors encore aux conditions *(A)*

(Addition faite pendant la correction des épreuves).