Notes supplémentaires [1]).

Note I.

1. La présente note est consacrée à la résolution du problème suivant:

Soit (dans un espace métrique compact)

$$(1) \qquad F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_m \supset \ldots$$

une suite décroissante d'ensembles fermés possédant tous la même dimension n. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le produit F_ω de tous les ensembles F_m soit encore de dimension n?

On s'aperçoit par des exemples tout élémentaires que la dimension de F_ω peut être égale à tout entier non négatif et non supérieur à n (il suffit de prendre pour F_m des parallélépipèdes n-dimensionnels convenablement choisis); d'autre part, il est évident, que la dimension de F_ω ne peut pas être supérieure à n.

2. Nous commençons par une définition générale, dont l'intérêt nous semble ne pas s'épuiser par le problème ci-dessus mentionné.

Soit F un ensemble fermé quelconque (situé comme toujours dans un espace métrique compact) d'une dimension finie $n > 0$.

L'entier positif k étant quelconque, partageons les nombres réels de la façon suivante en deux classes I et II: tout nombre non positif sera assigné à la classe I; quant aux nombres positifs, un nombre

[1]) rédigées d'après les papiers posthumes de l'auteur par P. Alexandroff (Moscou).

positif quelconque ε sera dit appartenir à la classe I où à la classe II selon qu'il existe ou non un ε-recouvrement d'ordre k de l'ensemble F[1]).

On voit immédiatement (d'après ce qui a été dit au § 2 du Ch. V), que la distribution des nombres réels en deux classes que nous venons de définir, est une coupure au sens de Dedekind. Cette coupure détermine un nombre non négatif que nous désignerons par $d_k(F)$ $(k=1,2,\dots)$.

Il est évident que le nombre $d_k(F)$ peut être défini par sa propriété suivante:

Quel que soit $\varepsilon > d_k(F)$, il existe un système d'ordre k de sous-ensembles fermés de F, recouvrant l'ensemble F et ayant des diamètres inférieurs à ε.

Par contre, un tel système n'existe point si ε est inférieur à $d_k(F)$.

Remarquons que si F était un continu, on aurait $d_1(F)=\delta(F)$.

Il résulte immédiatement des théorèmes fondamentaux du ch. V (§§ 5 et 6) que tout ensemble fermé F de dimension n vérifie les relations suivantes:

$$(2) \qquad \delta(F) \geqslant d_1(F) \geqslant d_2(F) \geqslant \dots \geqslant d_n(F) > d_{n+1}(F) = 0 = \\ = d_{n+2}(F) = d_{n+3}(F) = \dots \text{ (in inf.)}.$$

Nous tenons à mentionner qu'il reste inconnu si l'égalité $d_k(F) = d_{k+1}(F)$ est ou non possible pour $k \leqslant n-1$.

Le nombre $d_n(F)$ est le plus important; il sera appelé *coefficient d'aplatissement* de l'ensemble F (de dimension n), et désigné simplement par $d(F)$.

Remarquons enfin que la définition des nombres $d_k(F)$ resterait la même au cas que la dimension de F était infinie; seulement tous les nombres $d_k(F)$ seraient alors positifs et formeraient une suite non croissante tendant vers 0.

3. Il est facile d'obtenir maintenant la résolution du problème mentionné au début de cette note. On démontre en effet sans peine la proposition suivante:

[1]) nous appelons ici *ε-recouvrement d'un ensemble fermé* F un système fini d'ensembles fermés

$$F_1, F_2, \dots F_s$$

vérifiant les conditions suivantes: $\delta(F_i) < \varepsilon$ (pour $i = 1, 2, \dots, s$); $\sum_{i=1}^{s} F_i = F$; voir pour la définition de l'ordre d'un système d'ensembles le § 2 du Ch. V (Déf. 1).

Théorème. *Pour que la partie commune aux ensembles fermés n-dimensionnels F_m formant une suite décroissante* (1) *possède la même dimension n, il faut et il suffit que les coefficients d'aplatissement des ensembles F_m ne tendent pas vers zéro (quand m augmente infiniment).*

Comme on a toujours $\dim F_\omega \leqslant n$ (en posant $F_\omega = \prod_{m=1}^{\infty} F_m$), on peut exprimer le même résultat comme il suit:

Pour que la dimension de F_ω soit inférieure à n, il faut et il suffit qu'on ait

$$\lim_{m\to\infty} d(F_m) = 0. \tag{3}$$

C'est dans cette forme-là que nous démontrerons le théorème.

La condition (3) *est nécessaire.* Soit en effet

$$\dim F_\omega = k \leqslant n-1$$

et ε un nombre positif quelconque. Il existe alors un système d'ordre $k+1 \leqslant n$ d'ensembles fermés Φ_i $(i=1,2,\ldots,s)$ F, tel que

$$\sum_{i=1}^{s} \Phi_i = F_\omega, \quad \delta(\Phi_i) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

D'après le lemme II du ch. V n^0 3, il existe un nombre positif $\vartheta < \frac{\varepsilon}{3}$ tel que les ensembles fermés

$$\Phi_i^* = \bar{S}(\Phi_i, \vartheta)$$

forment encore un système d'ordre $k+1$.

Comme on a

$$\delta(\Phi_i^*) \leqslant \delta(\Phi_i) + 2\vartheta < \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

l'ensemble fermé $\bar{S}(F, \vartheta)$ est recouvert par le système d'ordre $k+1$ de ses sous-ensembles Φ_i^*, dont les diamètres sont inférieurs à ε.

D'après les propositions élémentaires sur les espaces compacts, il existe un entier m_ε assez grand pour qu'on ait, pour tout $m > m_\varepsilon$, l'inclusion

$$F_m \subset S(F, \vartheta) \subset \bar{S}(F, \vartheta).$$

Les ensembles fermés $\Phi_i^m = F_m \cdot \Phi_i^*$ (de diamètres $< \varepsilon$) forment donc un système recouvrant l'ensemble F_m, et ce système est d'ordre $\leqslant k+1 \leqslant n$.

Il en résulte que $d(F_m)$ est non supérieur à ε, du moment que m surpasse m_ε. Comme ε était arbitraire, l'égalité (3) se trouve démontrée.

La condition (3) *est suffisante.* Supposons, en effet, qu'elle soit réalisée. Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver alors un entier m assez grand pour avoir

$$d(F_m) < \varepsilon.$$

Il existe par conséquent un système d'ordre n d'ensembles fermés F_i^m $(i=1,2,\ldots,s)$, tels que

$$\sum_{i=1}^{s} F_i^m = F_m, \quad \delta(F_i^m) < \varepsilon.$$

Il en résulte (en tenant compte de l'inclusion $F \subset F_m$) que les ensembles $F_i = F_i^m . F$ forment un système d'ordre $\leqslant n$ et vérifiant les relations

$$\sum_{i=1}^{s} F_i = F, \quad \delta(F_i) < \varepsilon.$$

Comme ε était arbitraire, on a bien $\dim F \leqslant n$, c. q. f. d.

Note II.

Soit M un ensemble G_δ situé dans l'espace n-dimensionnel E_n; supposons que l'ensemble complémentaire $E_n - M$ soit d'une dimension inférieure à $n-1$. Si G est un domaine connexe arbitraire de l'espace E_n et $x+y$ deux points quelconques de $G.M$, il existe un continu C_{xy} tel que

$$x+y \subset C_{xy} \subset G.M.$$

D é m o n s t r a t i o n. L'ensemble $E_n - M$ étant un ensemble F_σ, soit

$$E_n - M = \sum_{m=1}^{\infty} F_m, \tag{1}$$

où l'on peut évidemment supposer

$$F_m \subset F_{m+1}. \tag{2}$$

Quel que soit le domaine connexe $G \subset E_n$, $G - F_m$ est, d'après les résultats du Ch. V, un domaine non vide et connexe.

Soient x et y deux points de $G.M$.

Posons

$$G_0 = E_n; \quad G_1 = G$$

et supposons que les domaines connexes

$$G_0, G_1, \ldots, G_m$$

soient déja construits de telle façon que

(3) $$G_{m-1} \supset \overline{G}_m; \quad G_m \supset x + y.$$

Le domaine $\Gamma_m = G_m - F_m$ étant connexe, désignons par S_m une ligne polygonale agrégée à Γ_m et ayant x et y pour ses extrémités.

Posons

(4) $$\lambda_m = \frac{1}{2}\varrho(S_m, E_n - \Gamma_m)$$

et

(5) $$G_{m+1} = S(S_m, \lambda_m).$$

G_{m+1} est un domaine connexe. On a d'autre part

(6) $$x + y \subset S_m \subset G_{m+1} \subset \overline{G}_{m+1} \subset G_m - F_m \subset G_m.$$

L'ensemble

(7) $$C_{xy} = \prod_{m=1}^{\infty} \overline{G}_m$$

contient, d'après (6), les deux points x et y, tout en étant étranger à $\sum\limits_{m=1}^{\infty} F_m = E_n - M$. En outre C_{xy} est un continu (puisqu'il est le produit d'une suite décroissante de continus $\overline{G}_m$), c. q. f. d.

Corollaire. *L'ensemble M, situé dans l'espace n-dimensionnel E_n et complémentaire à un ensemble F_σ de dimension $< n-1$, est un sémicontinu.*

Liste [1]) des notations nouvelles introduites dans la 1re Partie du Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes [2]).

ε-séparation	Ch.	I.	§	1	Fund.	Math.	VII	p.	65
ε-séparation par un ensemble fermé	„	I.	„	8	„	„	„	„	69
Dimension d'un ensemble C en un point x, $\dim_x C$	„	I.	„	2	„	„	„	„	65
Dimension d'un ensemble C, $\dim C$	„	I.	„	2	„	„	„	„	65—66
Dimension de l'ensemble vide ($\dim 0 = -1$)	„	I.	„	3	„	„	„	„	66
Isotopie (dans un sens nouveau)	„	II.	„	5	„	„	„	„	83
Lignes Cantoriennes (les plus générales)	„	II.	„	15	„	„	„	„	93
Frontières doubles	„	II.	„	18	„	„	„	„	94
Frontières régulières	„	II.	„	18	„	„	„	„	95
Éléments dyadiques	„	II.	„	26	„	„	„	„	104
Surfaces Cantoriennes	„	II.	„	41	„	„	„	„	122
Multiplicités Cantoriennes	„	II.	„	42	„	„	„	„	124
Multiplicités Cantoriennes généralisées	„	II.	„	42	„	„	„	„	124
Ensembles $\mathfrak{N}_k(C)$	„	IV.	„	9	„	„	VIII	„	269
Noyau dimensionnel	„	IV.	„	9	„	„	„	„	270
Ordre d'un système d'ensembles	„	V.	„	2	„	„	„	„	288
Ordre d'un ensemble fermé par rapport à un nombre positit ε	„	V.	„	2	„	„	„	„	288
Vrai ordre d'un ensemble fermé	„	V.	„	2	„	„	„	„	288
ε-séparation complète	„	VI.	„	2	„	„	„	„	333
Nombres $d_k(F)$	1re note supplémentaire				„	„	„	„	353
Coefficient d'aplatissement	„	„		„	„	„	„	„	353

[1]) rédigée par Paul Alexandroff (Moscou).

[2]) Toutes les notations non énumérées dans cette liste se trouvent indiquées dans la section III de l'Introduction (§§ 15—22, *Fund. Math.* VII, pp. 49—64; voir aussi la liste de corrections se trouvant à la fin du t. VII de ce Journal). Il s'agit, bien entendu, des *notations* nouvelles (dont quelquesunes se rapportent à des *notions* déjà connues).

Table des matières [1]) de la 1re Partie du Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes.

Fund. Math. t. VII, pp. 30—137.

Fund. Math. t. VIII, pp. 225—359.

[1]) rédigée par P. Alexandroff (Moscou).

La 2de Partie du Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes:

„Les lignes Cantoriennes"

paraîtra dans les *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam,* au cours de l'année 1927.