Sur un problème de M. Menger.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. K. Menger a posé récemment le problème suivant [1]).

Soit M un ensemble séparable d'un espace métrique. On dit que l'ensemble M jouit de la propriété E, si, quelle que soit la famille $\mathcal{F}$ d'ensembles ouverts, telle que pour tout point p de M et tout nombre $\varepsilon > 0$ existe un ensemble de la famille $\mathcal{F}$ de diamètre $< \varepsilon$, contenant p, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une suite infinie d'ensembles ouverts dont la somme contient M et dont les diamètres tendent vers zéro.

M. Menger demande: *Un ensemble jouissant de la propriété E est-il nécessairement une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles compacts et fermés?* Or, il regarde comme probable que la réponse y est positive [2]).

Le but de la présente note est de prouver que *si la puissance du continu est aleph-un, la réponse au problème de M. Menger est négative.* Nous démontrerons notamment, en admettant l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), l'existence d'un ensemble linéaire jouissant de la propriété E qui n'est pas un F_σ.

M. N. Lusin a démontré en 1914 [3]) que de l'hypothèse du

[1]) Karl Menger: *Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre*, Sitzungsber. d. Akad. Wien 133 (1924), p. 421.

[2]) l. c., p, 453. Au même problème est consacré un intéressant mémoire de M. Witold Hurewicz (*Über die Verallgemeinerung des Borelschen Theorems*, Mathematische Zeitschrift Bd. 24 (1925), p. 401—421) qui a prouvé que la supposition de M. Menger est vraie dans le domaine des ensembles (A) de M. Souslin (donc, à plus forte raison, dans le domaine des ensembles mesurables B). M. Hurewicz exprime d'ailleurs l'hypothèse que la restriction aux ensembles (A) n'est pas nécessaire (l. c., p. 419, note [32]); aussi p. 421, note [37])).

[3]) *C. R.* t. 158, p. 1259.

continu résulte l'existence dans l'intervalle $(0, 1)$ d'un ensemble M non dénombrable, tel que tout ensemble non dense dans $(0, 1)$ contient au plus un ensemble dénombrable de points de M. On voit sans peine qu'un tel ensemble M de M. Lusin n'est pas un F_σ. Or, nous prouverons que *tout ensemble de M. Lusin jouit de la propriété E.*

Soit donc M un ensemble de M. Lusin, $\mathcal{F}$ — une famille d'ensembles ouverts, telle que pour tout point p de M et tout $\varepsilon > 0$ existe un ensemble de $\mathcal{F}$ contenant p, de diamètre $< \varepsilon$. Soit $p_1, p_2, p_3, \dots$ un sous-ensemble dénombrable de M, dense dans M. D'après la propriété de la famille $\mathcal{F}$, il existe pour tout n naturel un ensemble P_n de $\mathcal{F}$ de diamètre $\delta(P_n) < 1/n$ contenant p_n. Or, on voit sans peine que l'ensemble $R = M - (P_1 + P_2 + P_3 + \dots)$ est non dense dans $(0, 1)$: d'après la propriété de M, l'ensemble R est donc au plus dénombrable; soit $q_1, q_2, q_3, \dots$ une suite, formée de tous les points de R: on peut la supposer toujours infinie, en répétant le même point, s'il le faut. D'après la propriété de $\mathcal{F}$ il existe pour tout indice n un ensemble Q_n de $\mathcal{F}$, tel que $q_n \varepsilon Q_n$ et $\delta(Q_n) < 1/n$. Formons la suite $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, \dots$: les diamètres des ensembles de cette suite convergent vers 0 et la somme $S = P_1 + Q_1 + P_2 + Q_2 + \dots$ contient évidemment M. Donc, l'ensemble M jouit de la propriété E, c. q. f. d.