Contributions à l'étude de l'espace métrique I.

Par

Adolphe Lindenbaum (Varsovie).

§ 1. Introduction.

D'ordinaire, la Géométrie se borne à quelques espaces spéciaux et n'y considère qu'une classe étroite des figures géométriques; on crée, d'autre part, *l'espace métrique abstrait*, on étudie en général des ensembles de points — mais c'est justement là, où la distance ne sert que d'un instrument accessoire, quoique utile [1]. Et pourtant — il y a des problèmes généraux dont le sujet même est de nature essentiellement métrique.

Ces recherches en donneront quelques exemples; d'ailleurs, elles contiennent encore beaucoup de topologique (tout au moins leur première partie, présentée ci-dessous).

Au § 4 j'examine la propriété singulière d'un ensemble de points d'être superposable avec son vrai sous-ensemble. On peut indiquer des ensembles plans bornés jouissant de cette propriété paradoxale, bien qu'ils ne puissent être F_σ et G_δ [2] à la fois (ni linéaires); donc, à plus forte raison, ils ne sauraient être fermés, ni ouverts, cependant il y en a qui sont F_σ ou G_δ.

Voilà le sujet principal, mais, à ce propos, j'étudie encore de plus près la notion (bien élémentaire) de *congruence* (§ 3).

Tous les résultats, étant valables pour un espace métrique abso-

[1] »La notion de *distance* étant étrangère à la Topologie, il vaudrait donc mieux de ne pas en faire usage«. (P. Urysohn, Fund. Math. 7 (1925), p. 42).

[2] Un ensemble est F_σ, s'il est somme dénombrable d'ensembles fermés; s'il est complémentaire d'un F_σ (c.-à-d.: produit dénombrable d'ensembles ouverts) — il est G_δ.

lument arbitraire, s'appliquent — bien entendu — à l'espace euclidien (comme on vient de voir); — j'envisage dans le petit texte les propriétés particulières de cet espace.

Il m'a semblé enfin nécessaire de consacrer un paragraphe, pour pouvoir expliquer ou préciser quelques notions générales et en résumer certaines propriétés (§ 2).

Je termine cette préface par remercier MM. Kuratowski et Tarski, qui ont bien voulu prendre intérêt à ces recherches: j'en ai profité beaucoup.

§ 2. Quelques notions générales et leurs propriétés [1]).

L'ensemble de tous les arguments d'une fonction f est appelé *domaine* de f, tout court: $D(f)$.

Soit $A \subset D(f)$: j'entends par $f(A)$ — l'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$, x parcourant l'ensemble A [2]) (donc $f(0)=0$, si 0 désigne l'ensemble vide).

Je pose $f^0(x)=x$ et pour k entier positif: $f^k(x)=f(f^{k-1}(x))$. Lorsque f est biunivoque, on définit encore $f^{-1}(x)$, comme l'élément y de $D(f)$ pour lequel $f(y)=x$; d'où il est déjà clair ce qu'on veut désigner par $f^k(x)$ pour un k entier <-1.

J'appelle *chaîne* [3]) de a (par rapport à une fonction f biunivoque) — ou $C(a)$ [4]) — le plus petit ensemble X remplissant les conditions: 1°: $a \varepsilon X$; 2°: si $x \varepsilon D(f) X$, alors $f(x) \varepsilon X$; 3°: si $x \varepsilon f(D(f)).X$, alors $f^{-1}(x) \varepsilon X$. — Donc, c'est l'ensemble de tous les $f^k(a)$ qui existent; lorsque p. ex. $f(D(f)) \subset D(f)$ et $a \varepsilon [D(f) - - f(D(f))]$, tous les $f^k(a)$ pour k non négatif existent et constituent une suite S infinie: $a, f(a), f^2(a), \dots$; pour k négatif — les $f^k(a)$ n'existent plus — la chaîne $C(a)$ se confond donc dans ce cas avec la suite S. Je ferai usage de suivantes propriétés de chaînes:

[1]) Pour les détails — v, p. ex.: F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre* (1914), Chap. VII et les suivants *passim*. Or, il importe de remarquer que nos définitions diffèrent souvent de celles qu'on trouve ailleurs.

[2]) Au fond, c'est une convention incorrecte. Pour les raisonnements plus délicats, il faut distinguer la fonction $f(x)$, définie pour $x \varepsilon D(f)$, d'une autre, $f_1(X)$, définie pour $X \subset D(f)$.

[3]) Cette notion provient de celle de „*Kette*", due à Dedekind.

[4]) La chaîne dépend évidemment de la fonction f considérée, ce que le symbole $C(a)$ ne marque pas, parce qu'aucun malentendu ne serait ici possible.

(1) Si f est une fonction biunivoque et $a \varepsilon D(f)$, toute la chaîne de a par rapport à f, sauf peut être un seul élément, est contenue dans $f(D(f))$.

(2) Si a et a^* appartiennent au domaine d'une fonction f biunivoque, alors on a: $C(a) = C(a^*)$ ou $C(a) . C(a^*) = 0$.

Par *espace métrique* (classe (D) de M. Fréchet[1]) j'entends un ensemble d'éléments nommés points, avec la seule condition qu'à deux points x et y corresponde toujours un *nombre réel* $\varrho(x, y)$ — leur *distance* (écart) — de façon que:

1°: *pour que* $\varrho(x, y)$ *s'annule, il faut et il suffit que* x *et* y *soient identiques*,

2°: $\varrho(x, y) + \varrho(x, z) \geqslant \varrho(y, z)$.

Il y a encore deux propositions, notamment:

$$\varrho(x, y) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \varrho(x, y) = \varrho(y, x), \tag{3}$$

— qu'on voit autre part séparément postulées; c'est parce que la *loi du triangle* (exprimée chez nous par 2°) est presque toujours formulée d'une façon moins avantageuse[2]), ou que — parfois — on n'en tire pas toutes les conséquences, car les propositions (3) sont ici démontrables[3]).

Observons que l'espace métrique est — strictement — quelque chose de plus qu'un ensemble de points: il n'est défini que par ses points et sa distance ensemble.

On appelle un ensemble de points:

α) *sphère* — de centre a et de rayon r (> 0), s'il est composé des points x pour lesquels: $\varrho(a, x) < r$,

β) *borné*, s'il est contenu dans une sphère; l'ensemble de distances entre les points d'un ensemble A borné non vide a donc une borne supérieure, $\delta(A)$, nommée *diamètre* de A.

[1]) V. p. ex.: M. Fréchet, Trans. Am. M. Soc. 19 (1918); pour la première fois cette notion apparaît (sous le nom de classe (E)) dans la *Thèse* de cet auteur: *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906)).

[2]) Dans la forme: $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$. Cependant, on peut bien remplacer 2° par: $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(y, z)$, ou (d'après la modification que je dois à M. Szymański) — par: $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(z, x) + \varrho(y, z)$.

[3]) Posons $z = y$ dans 2°; et pour la seconde proposition: $z = x$ etc.

Un point a est dit *point d'accumulation* pour A, lorsque toute sphère de centre a contient deux points au moins de A.

$a \varepsilon \bar{A}$, lorsque toute sphère de centre a contient un point au moins de A (ou autrement: $\bar{A}$ se compose de tous les points qui appartiennent à A ou en sont points d'accumulation).

Il serait déjà superflu de faire voir comment s'obtiennent les notions connues d'ensemble *dense en soi*, *fermé*, (domaine) *ouvert* etc.

Mais encore — un ensemble A est:

γ) *divergent*, si l'ensemble de points d'accumulation pour A est vide,

δ) *compact*, si toute suite $\{F_k\}$ d'ensembles fermés non vides avec: $F_1 \subset \bar{A}$ et $F_{k+1} \subset F_k$ — possède le produit non vide [1].

Dans l'espace euclidien, pour qu'un ensemble soit compact, il faut et il suffit qu'il soit borné.

(4) Tout sous ensemble divergent d'un ensemble compact est fini (au sens de Dedekind [2])).

(5) L'image continue d'un ensemble compact et fermé est compacte et fermée [3]).

J'aurai besoin aussi de la notion de (premier) *résidu* [4]) d'un ensemble A: c'est l'ensemble $A . \overline{A - A}$, qui sera dénoté par A_R. Remarquons le théorème [5]):

(6) Lorsqu'une homéomorphie (transformation biunivoque et bicontinue) transforme A en B, alors A_R se trouve transformé en B_R — c'est-à-dire: la propriété d'appartenir au résidu est un invariant topologique [6]).

[1]) C'est la proposition (4) (v. plus loin) qu'on emploie pour définir la compacité; mais — afin p. ex. d'éviter l'axiome du choix — il me fallut adopter la définition du texte. D'ailleurs, pour l'espace euclidien, l'équivalence de ces définitions se démontre sans ledit axiome.

[2]) C.-à-d.: n'admet aucune partie dénombrable.

[3]) V. Hausdorff, op. cit., p. 364, th. V. Une démonstration sans l'axiome du choix exige ici un peu de précaution.

[4]) V. p. 213, [2]).

[5]) C. Kuratowski, *Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analysis Situs*, Fund. Math. 3 (1922), p. 189.

[6]) D'après Urysohn, l. c., p. 64, on dit que le résidu est un covariant topologique.

On introduit — en outre — les *résidus de tout ordre* [1]) (d'une manière analogue comme pour les dérivés, cohérences). Un ensemble est *réductible* [2]), si son résidu de certain ordre est vide (donc tous les suivants aussi).

Dans l'espace euclidien, pour qu'un ensemble soit réductible, il faut et il suffit qu'il soit F_σ et G_δ à la fois [3]).

§ 3. Transformations isométriques, congruence (étude générale).

Parmi les fonctions dont les arguments et les valeurs sont des points, je distingue une espèce par la définition suivante:

Définition 1. *φ est une transformation isométrique de A en B, lorsque $\varphi(A) = B$ et, pour tout a_1 et a_2 de A* (qui est, comme B, un ensemble de points), *on a:*

$$\varrho(\varphi(a_1),\ \varphi(a_2)) = \varrho(a_1, a_2).$$

On remarque aisément que, pour une transformation de ce genre, $\varphi(x) = \varphi(y)$ — implique: $x = y$.

(7) C'est donc toujours une transformation biunivoque; son inversion est de même une transformation isométrique (de B en A).

Définition 2. *A est superposable avec B (A et B sont congruents):*

$$A \cong B,$$

s'il existe une transformation isométrique de A en B [4]) [5]).

[1]) Ce qui n'exige point des nombres transfinis. V. Hausdorff, op. cit., p. 283 et C. Kuratowski: *Une méthode d'élimination des nombres transfinis...*, Fund. Math. 3 (1922), § 6. Ces auteurs envisagent un espace moins général, mais cela n'influe que sur les détails.

[2]) Les expressions »réductible« et »résidu« se rencontrent aussi aux sens différents (v. L. Zoretti — A. Rosenthal, Enc. d. Math Wiss. II C 9 a, p. 869 et 872, notes [43]) et [60])); celle-là n'a rien de commun avec le terme „irréductible" introduit par Zoretti et Janiszewski (— cf. la note [1]), p. 217).

[3]) Hausdorff, op. cit., pp. 306, 462 A l'aide de l'axiome du choix, on obtient la même proposition pour les ensembles *compacts* situés dans un espace métrique quelconque.

[4]) Cf. la définition due à MM. S. Banach et A. Tarski: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund Math. 6 (1924), Déf. 1, p. 245. M. Hausdorff, op. cit, emploie le terme „congruent" en quelques sens différents.

[5]) Il serait possible de donner une définition qui comprendrait aussi la »con-

Il est à remarquer que la notion de congruence embrasse ici également celle de congruence *directe* et *inverse*. P. ex. toute symétrie est un cas de congruence.

On déduit sans peine les lois fondamentales de cette rélation: I. $A \cong A$; II. Si l'on a: $A \cong B$, on a aussi: $B \cong A$; III. Si $A \cong B$ et $B \cong C$, alors $A \cong C$. Dans la suite de ce § nous étudierons les propriétés topologiques de congruence et le problème de l'extension d'une congruence donnée [1]).

Théorème 1. *Toute transformation isométrique est une homéomorphie.*

Grâce à (7), il suffira évidemment de prouver que c'est une transformation continue: il faut donc, d'après la définition de continuité [2]), montrer que si $b = \varphi(a)$, $a \varepsilon A$ — où φ est une transformation isométrique de A — et S_b est une sphère de centre b, alors il existe une sphère S_a de centre a que l'on a: $\varphi(A . S_a) \subset S_b$. Mais, pour ça, il suffit de supposer tout simplement le rayon de S_a égal à celui de S_b [3]).

Le théorème démontré conduit à deux conclusions suivantes:

(8) Si $\varphi(A) = B$, φ étant une transformation isométrique, alors $\varphi(A_R) = B_R$. [(6) et th. 1].

Corollaire 2. Si $A \cong B$, *alors* $A_R \cong B_R$. [(8)].

Théorème 3. *Si $A \subset A^* \subset \bar{A}$, φ est une transformation isométrique de A et ψ est une transformation continue de A^* dont les valeurs coïncident sur A avec celles de φ — alors ψ est une transformation isométrique de A^*.*

J'omets la démonstration, qui n'est point difficile [4]).

---

gruence« entre deux ensembles dont chacun est dans son propre espace métrique; mais ici, c'est superflu.

[1]) La notion de congruence, introduite tout à l'heure, amène bientôt à celle d'*équivalence* (v. le mémoire cité de MM. Banach et Tarski, pp. 244—277), mais ce sujet sera traité dans la partie suivante de mon travail (v. aussi les notes [3]), p. 217 et [3]), p. 218).

[2]) V. Hausdorff, op. cit., p. 359.

[3]) En analysant cette démonstration, on voit que le théorème suivant est encore valable: Toute transformation φ remplissant la condition:

(†) $$\varrho(\varphi(a_1), \varphi(a_2)) \leqslant \varrho(a_1, a_2) \quad \text{pour tout } a_1 \text{ et } a_2 \text{ de } A$$

— est continue dans A, et même uniformément continue (donc la transformation isométrique aussi).

[4]) De même, on obtient un résultat vrai, en remplaçant dans l'énoncé du th. 3 le terme »isométrique« par »assujettie à la condition (†)« (v. [3])).

En général, il serait impossible d'étendre une homéomorphie entre A et B jusqu'aux ensembles $\bar{A}$ et $\bar{B}$ tout entiers [1]); mais quelquefois on est en état de le faire [2]).

Pour l'espace euclidien, cette question, quant à la congruence, est bien simple: Si $A \cong B$, alors il existe une transformation isométrique dont le domaine est l'espace entier, et qui présente une extension de celle qui transformait A en B. Dans ce cas, A et B sont donc isotopes [3]).

Théorème 4. *Lorsqu'une transformation isométrique φ transforme l'ensemble compact A en l'ensemble compact B, alors il existe une transformation isométrique φ^* de $\bar{A}$ en B et une seule — qui coïncide avec φ sur A.*

Soit p un point de $\bar{A}$; en désignant par $S_p^{(n)}$ la sphère de centre p et de rayon $\frac{1}{n}$, on obtient: $A \cdot S_p^{(n)} \neq 0$, donc aussi $\varphi(A \cdot S_p^{(n)}) \neq 0$; posons:

$$T_p^{(n)} = \overline{\varphi(A \cdot S_p^{(n)})}.$$

On a:

$$\delta(T_p^{(n)}) \leqslant \frac{2}{n}, \tag{9}$$

et la partie commune de tous les $T_p^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ contient — en raison de la compacité de B — un, et — selon (9) — un seul point; il sera désigné par $\varphi^*(p)$. La fonction φ^* ainsi définie jouit de toutes les propriétés désirées. (Au préalable, on vérifie qu'elle

[1]) On peut seulement démontrer (avec l'axiome du choix) la proposition suivante: Parmi les ensembles contenus dans $\bar{P}$ auxquels s'étend une fonction continue donnée, définie dans P, il existe toujours un qui est **le plus grand** (cf. le lemme connexe chez MM. W. Sierpiński et A. Zygmund, Fund. Math. 4 (1923), p. 317); et ensuite: »Parmi les couples d'ensembles (E, H) auxquels s'étend l'homéomorphie entre deux ensembles donnés $P, Q, E \subset \bar{P}$ et $H \subset \bar{Q}$, il en existe toujours un (M, N) tel que les ensembles M et N sont respectivement plus grands que les ensembles E et H formant tout autre couple de même nature«. — W. Sierpiński: *Sur l'extension de l'homéomorphie entre deux ensembles*, C. R. 178 (1924). (M. Sierpiński ne s'occupe que de l'espace euclidien, mais ses résultats restent vrais pour un espace beaucoup plus général: ce que j'ai cité ci-dessus — pour un espace métrique quelconque).

[2]) V. Hausdorff, op. cit., p. 368.

[3]) C.-à-d.: il existe une homéomorphie qui transforme l'espace en soi, et A en B.

est continue [1]); par suite [th. 3] — elle est isométrique. Finalement on prouve [(5)] que $\varphi^*(A) = B$ etc.) [2]).

Corollaire 5. *Si A et B sont compacts et congruents, alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.*

Corollaire 6. *Si A et B sont compacts et congruents, alors $\bar{A}-A$ et $\bar{B}-B$ le sont aussi.*

Théorème 7. *La chaîne d'un point quelconque par rapport à une transformation isométrique est divergente ou dense en soi.* (C'est M. Kuratowski qui a su généraliser de cette manière intéressante une idée de ma démonstration primitive du th. 8)

Soit φ une transformation isométrique, et supposons que la chaîne $C(a)$ n'est pas divergente: pour un ε positif donné, on peut donc trouver (dans la sphère de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ autour d'un point d'accumulation) deux points différents de notre chaîne: $\varphi^k(a)$ et $\varphi^l(a)$, avec la distance mutuelle $< \varepsilon$, c.-à-d.:

$$(10) \qquad \varrho\left(\varphi^k(a),\ \varphi^l(a)\right) < \varepsilon.$$

Puisque $C(a)$ n'est pas divergente, elle doit être infinie; par conséquent, $\varphi^{k-l}(a)$ ou $\varphi^{l-k}(a)$ existe (peut-être — tous les deux): supposons que ce soit $\varphi^{l-k}(a)$. Or, $\varphi^{l-k}(a)$ n'est pas égal à a (on aurait au cas contraire — $\varphi^l(a) = \varphi^k(a)$) et — d'après (10): $\varrho\left(a, \varphi^{l-k}(a)\right) < \varepsilon$; ce qui prouve que dans une sphère, si petite qu'elle soit, autour de a, il y a encore outre a d'autres points de $C(a)$. On en conclut que a est un point d'accumulation pour $C(a)$. Mais, si $a^* \varepsilon C(a)$, on a [(2)]: $C(a^*) = C(a)$ — et, en appliquant le résultat acquis à $a = a^*$, nous obtenons, tout aussi bien, que, la chaîne $C(a)$ supposée non divergente, tout son point est un point d'accumulation c. q. f. d. [3]).

[1]) Dans ce but p. ex., il serait commode d'introduire la distance entre deux ensembles; on aurait alors: $\varrho(\varphi(X), \varphi(Y)) = \varrho(X, Y)$ — pour φ isométrique.

[2]) Le théorème analogue pour les fonctions assujetties à la condition (†) sera: Si une telle fonction φ transforme un ensemble A en l'ensemble compact B, alors il existe une fonction dont le domaine est $\bar{A}$, et qui, tout en remplissant sur $\bar{A}$ la condition (†), coïncide sur A avec φ.

[3]). Si on introduisait la notion d'ensemble „complètement borné" (*total beschränkt* — Hausdorff, op. cit., p. 311), on obtiendrait le suivant résultat:

Sans peine, on établit les relations entre les chaînes de deux points différents (par rapport à la même transformation isométrique φ), comme p. ex.: Si la chaîne $C(a)$ contenue dans $D(\varphi)$ est bornée, $C(b)$ l'est aussi.

§ 4. Monomorphie.

Définition 3. *L'ensemble A est monomorphe, lorsque les relations:*

$$B \cong A \text{ et } B \subset A$$

ne se présentent à la fois que si $B = A$.

On peut dire que l'ensemble est monomorphe, s'il est élément „irréductible" [1]) dans la classe d'ensembles superposables avec lui. J'introduis cette notion, parce qu'un ensemble (même compact) peut bien être superposable avec un de ses vrais sous-ensembles; — c'est, sans doute, un „paradoxe de l'infini" (Bolzano).

Un livre sur la théorie des ensembles commence [2]) par les réflexions sur deux angles égaux dont l'un est — néanmoins — contenu dans l'autre.

Un exemple le plus simple de cette singularité donnent les demi-droites: $\underset{x}{E}[x \geqslant 0]$ et $\underset{x}{E}[x \geqslant 1]$.

Quant aux ensembles bornés, on a tout d'abord le théorème:

(*I*). *Un ensemble linéaire borné est toujours monomorphe.* [3])

Mais voici l'exemple (exprimé en coordonneés polaires) d'un ensemble plan borné (situé même sur une circonférence) qui est superposable avec sa partie [4]):

Lorsque la chaîne d'un point quelconque par rapport à une transformation isométrique est complètement bornée et infinie, elle est dense en soi.

[1]) Pour la définition de ce terme (cf. la note [2]), p. 213) v. p. ex.: A. Tarski, Fund. Math. 6 (1924), p. 48

[2]) G. Hessenberg, *Grundbegriffe der Mengenlehre* (1906), Chap. I.

[3]) Ce théorème peut être généralisé. Dans cette forme, on le démontre sans peine (en s'appuyant p. ex. sur le fait que la chaîne d'un point par rapport à une transformation isométrique est nécessairement divergente, lorsqu'elle est linéaire). Cependant, j'ai montré qu'*un ensemble A linéaire borné peut posséder une partie B telle que A et B se décomposent en deux parties respectivement congruentes* (cf. Banach et Tarski, l. c., p. 259).

[4]) D'ailleurs, des ensembles fort semblables ont été utilisés bien de fois pour de différents buts (même très voisins), mais c'est probablement M. Tarski qui, le premier, en a explicitement indiqué la propriété en question. (A. Tarski: *O równoważności wielokątów*, Przegląd Matematyczno-Fizyczny 1924, Nr. 1—2, p. 54 (en polonais) ou Banach et Tarski, l. c., p. 258; j'ai modifié légèrement son exemple).

α étant un angle incommensurable avec π, ϱ un nombre positif, l'ensemble A de tous les points $(\varrho, n\,\alpha)$, pour n entier non négatif, est superposable avec l'ensemble $[A - ((\varrho, 0))]$ de points $(\varrho, n\,\alpha)$, pour n entier positif [1]).

Un ensemble fini (au sens de Dedekind — v. [2]), p. 212, est évidemment monomorphe [2]). Le th 8, les cor. 15 et 14 — nous fourniront des conditions suffisantes, de plus en plus générales, pour qu'un ensemble compact soit monomorphe.

Théorème 8. *Un ensemble compact* [3]) *et fermé est monomorphe.*

Soit A un ensemble compact et fermé, et φ — une fonction isométrique telle que:

(11) $$\varphi(A) \subset A.$$

Soit ensuite

(12) $$a \,\varepsilon\, A.$$

Si la chaîne de a est finie, on a nécessairement $[(11)]$: $a = \varphi^k(a)$, pour un certain $k > 0$, donc:

(13) $$\text{si } C(a) \text{ est finie, } a \,\varepsilon\, \varphi(A).$$

Si cette chaîne est infinie, le th. 7 et (4) donnent qu'elle est dense en soi (puisque A est compact); ceci entraîne pour un b quelconque la relation: $a \,\varepsilon\, \overline{C(a) - (b)}$. En appliquant (1), nous en concluons:

(14) $$a \,\varepsilon\, \overline{\varphi(A)}.$$

Mais $\varphi(A)$ est un ensemble fermé [(5) et th. 1], donc — d'après (14):

(15) $$\text{si } C(a) \text{ est infinie, } a \,\varepsilon\, \varphi(A).$$

[1]) On peut même construire de tels ensembles non vides $A + B$ que:

(††) $$A \cong A + B \cong B, \quad A\,.\,B \text{ étant vide.}$$

Ils peuvent être plans non bornés (E. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, C. R. 158 (1914); cf. aussi S. Ruziewicz, Fund. Math. 2 (1921), p. 4), ou bien être situés sur la surface d'une sphère (donc bornés; — Hausdorff, op. cit., p. 469 ou Math. An. 75 (1914), p. 428). D'après mes résultats (que je remets à plus tard), ce sont des cas — en quelque sorte — le plus simples, car aucun ensemble $A + B$ plan borné ni linéaire ne peut jouir de la propriété (††), s'il n'est pas vide.

[2]) Notons le théorème beaucoup plus intéressant: Lorsque A et B sont congruents, et $A\,.\,B$ contient moins que $\frac{n(n+1)}{2}$ points, alors $A - B$ et $B - A$ se décomposent en n parties respectivement congruentes.

[3]) On pourrait seulement supposer qu'il est complètement borné (v. [3]), p. 216). Le th. 7 donnerait aussi qu'un ensemble complètement borné et clairsemé est monomorphe.

En rapprochant (13) et (15), on voit que notre hypothèse (12) implique toujours: $a \varepsilon \varphi(A)$. En d'autres termes: $A \subset \varphi(A)$, ce qui donne avec (11) l'égalité: $A = \varphi(A)$. Cette conclusion montre enfin que A est monomorphe.

Lemme 9. Si, pour un A compact[1]), $B \subset A \cong B$, alors $\overline{B} = \overline{A}$.

L'hypothèse entraîne tout de suite: $\overline{B} \subset \overline{A}$ et (selon le cor. 5) $\overline{B} \cong \overline{A}$. D'après le théorème précédent $\overline{A}$ est monomorphe, donc on doit avoir $\overline{B} = \overline{A}$, c. q. f. d.

Théorème 10. *Pour qu'un ensemble compact A soit monomorphe, il faut et il suffit que les relations $B \cong A$ et $B \supset A$ n'aient lieu à la fois que lorsque $B = A$.*

1°. Soit A monomorphe. S'il existe une transformation φ isométrique et un ensemble B, tels que $B \supset A = \varphi(B)$, on a évidemment: $\varphi(A) \subset \varphi(B)$, donc: $\varphi(A) \subset A$. Mais, par notre hypothèse, il en résulte $\varphi(A) = A$, c.-à-d.: $\varphi(A) = \varphi(B)$ et $A = B$.

Les relations $B \cong A$ et $B \supset A$ n'ont donc lieu à la fois que si $B = A$.

Dans ce qui précède nous n'avons encore point utilisé l'hypothèse que A est compact; de plus, on remarque que le th. 10 est vrai pour l'espace euclidien sans cette restriction. Pourtant, de simples exemples montrent qu'elle est essentielle dans le cas général, et c'est pourquoi elle apparaît dans la seconde partie de la démonstration.

2°. Soit A compact et non monomorphe. On peut — par conséquent — trouver un vrai sous-ensemble C de A, avec $C \cong A$. Conformément au th. 4, il existe une transformation isométrique φ^* de $\overline{A}$ en $\overline{C}$ pour laquelle $\varphi^*(A) = C$; mais [lem. 9] $\overline{A} = \overline{C}$, donc:

$$A \subset \overline{A} = \varphi^*(\overline{A}), \tag{16}$$

$$\varphi^*(A) = C \neq A \supset C. \tag{17}$$

En vertu de (16), il existe un ensemble $D \subset \overline{A}$, assujetti à la condition:

$$\varphi^*(D) = A. \tag{18}$$

Selon (17) et (18), $\varphi^*(D) \supset \varphi^*(A)$ et $\varphi^*(D) \neq \varphi^*(A)$, ce qui

[1]) Il suffit de supposer B compact, mais il faudrait alors raisonner autrement.

entraîne: $D \supset A \neq D$; avec (18), on en conclut qu'il existe un ensemble $D \supset A$, superposable avec A, mais plus grand que A.

Théorème 11. *Lorsque $\overline{A} - A$ est monomorphe, A étant compact, — A est monomorphe aussi.*

J'omets la démonstration — le lecteur la trouvera sans peine. [Cor. 6, lem. 9, th. 10] [1]).

Théorème 12. *φ étant une transformation isométrique de l'ensemble compact A en son sous-ensemble* (vrai ou non), *et Q — un résidu de A d'ordre arbitraire, on a:*

(19) $$\varphi(Q) \subset Q,$$

(20) $$Q - \varphi(Q) = A - \varphi(A).$$

On aura à appliquer l'induction transfinie.

1⁰ Le théorème est valable pour le premier résidu $Q = A_R$.

Posons $\varphi(A) = B \subset A$. On a [(8)]:

(21) $$\varphi(A_R) = B_R = B.\overline{\overline{B} - B} \subset A.\overline{\overline{B} - B}.$$

D'autre part [lem. 9], nous avons: $\overline{A} = \overline{B}$, d'où: $\overline{B} - B = \overline{A} - B \supset$ $\supset \overline{A} - A$ et [cor. 6] $\overline{B} - B \cong \overline{A} - A$. Donc [lem. 9]:

(22) $$\overline{\overline{B} - B} = \overline{\overline{A} - A}$$

et, en vertu de (21):

(23) $$\varphi(A_R) \subset A.\overline{\overline{A} - A} = A_R.$$

Mais, comme $\overline{A} = \overline{B}$, nous obtenons aussi [(22)]: $A - B \subset \overline{A} - B =$ $= \overline{B} - B \subset \overline{\overline{A} - A}$, d'où: $A - B \subset A_R$.

Ainsi:

(24) $$A - \varphi(A) \subset A_R.$$

Or, $\varphi(A_R) \subset \varphi(A)$, et par suite:

(25) $$A - \varphi(A) \subset A - \varphi(A_R).$$

En raison de (24) et (25), on a:

(26) $$A - \varphi(A) \subset A_R - \varphi(A_R).$$

[1]) En partant de l'égalité $A_R = \overline{\overline{A} - A} - (\overline{A} - A)$ et en invoquant deux fois le th. 11, on démontre le corollaire: Lorsque A est compact et A_R est monomorphe, A est monomorphe aussi. Mais le th. 13 va nous fournir plus que ça.

Egalement [(8)]: $\varphi(A - A_R) = B - B_R = B - B - B =$ d'après (22): $B - A - A \subset A - A - A = A - A_R$, donc $A_R . \varphi(A - A_R) = 0$ et, à plus forte raison, $[A_R - \varphi(A_R)] . \varphi(A - A_R) = 0$. Mais aussi $[A_R - \varphi(A_R)] . \varphi(A_R) = 0$. Par conséquent: $[A_R - \varphi(A_R)] . [\varphi(A - A_R) + \varphi(A_R)] = [A_R - \varphi(A_R)] . \varphi(A) = 0$, ce qui donne:

$$A_R - \varphi(A_R) \subset A - \varphi(A). \tag{27}$$

En rassemblant (23), (26) et (27), on obtient les relations (19) et (20) pour le cas: $Q = A_R$ [1]).

2⁰. Si le théorème est valable pour un résidu Q^*, il est valable pour $Q = (Q^*)_R$. Cela se démontre comme 1⁰, il ne faut que remplacer A par Q^*.

3⁰. Supposons enfin que le théorème est vrai pour tous les éléments d'une classe non vide $\mathfrak{C}$ de résidus de A, et prouvons qu'il subsiste encore pour le produit de cette classe [2]).

On a donc, pour tout $Q \varepsilon \mathfrak{C}$, les relations (19) et (20). Il en résulte tout de suite [3]):

$$\varphi(\Pi Q) = \Pi \varphi(Q) \subset \Pi Q \tag{28}$$

et

$$A - \varphi(A) \subset \Pi Q. \tag{29}$$

Il est évident que $\varphi(\Pi Q) \subset \varphi(A)$, d'où:

$$A - \varphi(A) \subset A - \varphi(\Pi Q). \tag{30}$$

(29) et (30) donnent:

$$A - \varphi(A) \subset \Pi Q - \varphi(\Pi Q). \tag{31}$$

Mais encore, d'après un théorème de l'algèbre de la logique: $\Pi F(Q) - \Pi G(Q) \subset \Sigma [F(Q) - G(Q)]$; nous aurons donc:

[1]) La partie 1⁰ pourrait être bien plus simple, si l'on introduisait le résidu „d'ordre 0" de A (comme A seul); pourtant, le raisonnement du texte se répète dans la démonstration 2⁰ — c'est pourquoi nous n'aurions rien gagné.

[2]) On verra que je démontre ici, au fond, un lemme général sur le produit d'une classe d'ensembles qui ont de certaines propriétés par rapport à une fonction biunivoque.

[3]) Je vais écrire: $\Pi F(Q)$ resp. $\Sigma F(Q)$ — au lieu de $\underset{Q \varepsilon \mathfrak{C}}{\Pi} F(Q)$ resp. $\underset{Q \varepsilon \mathfrak{C}}{\Sigma} F(Q)$.

$$(32)\qquad \Pi Q - \varphi(\Pi Q) = \Pi Q - \Pi \varphi(Q) \subset \Sigma[Q - \varphi(Q)] = \\ = \Sigma[A - \varphi(A)] = A - \varphi(A),$$

(28), (31) et (32) — donnent de nouveau (19) et (20) pour $Q_1 = \Pi Q$.

Ainsi, la démonstration par l'induction transfinie est achevée.

Théorème 13. *Lorsque A est compact et son résidu d'un ordre donné est monomorphe, — A est monomorphe aussi.*

Le résidu Q supposé monomorphe, l'inclusion (19) du th. 12 implique $Q = \varphi(Q)$, d'où, selon l'égalité (20): $A - \varphi(A) = 0$ et $A = \varphi(A)$, c. q. f. d.

Corollaire 14. *Un ensemble compact et réductible est monomorphe.*

En effet — son dernier résidu est vide, donc monomorphe, et l'hypothèse du th. 13 est remplie.

Des ensembles ouverts étant réductibles (leur premier résidu est déjà vide), nous en concluons qu'ils sont monomorphes, quand ils sont compacts. Tout aussi bien, on a, en outre, le

Corollaire 15. *Toutes les différences de deux ensembles fermés qui sont compactes — sont monomorphes.*

Pour l'espace euclidien, le cor. 14 exprime la proposition suivante:

(II) *Un ensemble borné qui est F_σ est G_δ à la fois, est toujours monomorphe* [1] [2].

L'exemple cité d'un ensemble non monomorphe, quoique borné et dénombrable, nous montre qu'un ensemble borné qui n'est qu'un F_σ peut être déjà superposable avec sa partie pareillement: son complémentaire à la fermeture qui est un G_δ); donc, il est possible qu'un ensemble borné F_σ (ou G_δ) ne soit pas monomorphe, mais il n'en est rien, s'il est plus simple: F_σ et G_δ à la fois.

Nous voyons ainsi quels sont les ensembles bornés non monomorphes, le moins compliqués au point de vue topologique.

[1]) Le problème auquel le théorème (II) donne réponse m'a été posé par M. Kuratowski.

[2]) La proposition (II) subsiste aussi p. ex. pour des espaces compacts arbitraires (cf. la note [3]), p. 213).