Sur la puissance de l'ensemble des »nombres de dimension« au sens de M. Fréchet.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

Je prouve dans cette note que l'ensemble de tous les nombres de dimension (au sens de M. Fréchet) d'ensembles situés dans un espace euclidien a la même puissance que la famille de tous les ensembles de nombres réels. Cette puissance est donc $2^{\mathfrak{c}}$, $\mathfrak{c}$ désignant la puissance du continu.

Il suffit évidemment d'établir ce théorème pour le cas d'espace linéaire pour que le but principal de cette note soit atteint. Mais je ne me borne pas à traiter le cas de l'espace linéaire, car la méthode dont je me sers sur le plan a les avantages d'être beaucoup plus simple, de ne pas avoir récours à l'axiome du choix de Zermelo et de fournir d'une façon effective la correspondance biunivoque entre les nombres de dimension d'une famille d'ensembles plans et les ensembles de nombres réels.

Dans la même note je donne une solution du problème suivant, posé par M. Knaster: existe-il dans l'espace linéaire un ensemble infini qui ne soit homéomorphe à aucun de ses (vrais) sous-ensembles? Autrement dit, existe-il un ensemble linéaire infini *irréductible* au sens de l'Analysis situs?

Le même problème pour l'espace à $n \geqslant 2$ dimensions se résout d'une façon très simple: la circonférence d'un cercle en fournit une solution positive. Mais le cas de l'espace linéaire est tout différent. On prouve facilement qu'un ensemble linéaire, pour qu'il réponde au problème, devrait nécessairement être totalement imparfait [1]).

[1]) Pour les notations et les définitions je renvoie le lecteur à la note précédente.

Et, en effet, la solution positive du problème résulte, de l'existence d'ensembles linéaires dont la structure géométrique révèle des propriétés peut-être inattendues: telle est l'existence d'un ensemble linéaire qui n'admet aucune transformation bicontinue en soi-même (ni, en général, en un de ses sous-ensembles) sauf la transformation par l'identité.

1. Lemme. *Il existe une suite infinie $Z_0, Z_1, \ldots$ d'ensembles linéaires tels que 1°: si $i \neq n$ et si X est un ensemble ouvert (non vide) dans Z_i, on n'a jamais $dX \leqslant dZ_n$ et 2°: les ensembles Z_n ainsi que leurs complémentaires sont totalement imparfaits.*

Démonstration. Nous établirons l'existence de la suite $Z_0, Z_1, \ldots$ par induction. Comme Z_0 nous admettons un ensemble arbitraire qui, ainsi que son complémentaire, est totalement imparfait (v. p. 195). Soit $n > 0$ un nombre naturel fixe. Je définis une famille d'ensembles $\mathfrak{M}$ de la façon suivante: (1) tout ensemble homéomorphe d'un produit $PZ_i\,(i < n)$, où P est parfait ($\neq 0$), appartient à $\mathfrak{M}$; (2) si Γ est un ensemble G_δ (vide ou non) et H est homéomorphe d'un produit ΓZ_i, toute différence $P - H$ appartient à $\mathfrak{M}$.

D'après un lemme établi dans la note précédente, si $\mathfrak{M}$ est une famille de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$, composée d'ensembles dont chacun a la puissance $\mathfrak{c}$, il existe un ensemble Z qui, ainsi que son complémentaire, a des points communs avec tout ensemble M de la famille $\mathfrak{M}$.

Pour pouvoir appliquer ce lemme, remarquons d'abord que la puissance de $\mathfrak{M}$ est $\mathfrak{c}$. Cela résulte du fait que la puissance des familles: de tous les ensembles parfaits, de tous les ensembles G_δ, des images homéomorphes à un ensemble donné, — ne dépasse pas $\mathfrak{c}$.

Il reste à prouver que, si M appartient à $\mathfrak{M}$, sa puissance est $\mathfrak{c}$. Il y a deux cas à distinguer qui correspondent aux conditions (1) et (2):

Soit M de la forme $P.Z_i$ (ou homéomorphe à un tel ensemble). Si l'on supposait la puissance de M inférieure à $\mathfrak{c}$, on pourrait définir une famille de $\mathfrak{c}$ ensembles parfaits disjoints contenus dans P (v. p. 195); un, au moins, de ces ensembles serait donc disjoint de $P.Z_i$, donc de Z_i, contrairement à l'hypothèse que le complémentaire de Z_i est totalement imparfait.

D'autre part, si M est de la forme $P - H$, l'ensemble H, comme homéomorphe d'un sous-ensemble de Z_i, est totalement imparfait.

$M = P - H$ a donc la puissance $\mathfrak{c}$ (v. lemme II de la note précédente).

Ainsi, M a, en tout cas, la puissance $\mathfrak{c}$.

L'existence de l'ensemble Z qui, de-même que CZ, a des points communs avec tout ensemble M de $\mathfrak{M}$, — est donc établie.

Posons $Z_n = Z$. Nous allons prouver que la suite $Z_0, Z_1, \dots Z_n, \dots$ satisfait aux conditions 1° et 2°.

Ad 1°. Soit G un ensemble ouvert. Il s'agit de prouver que: si $i < n$ et $G Z_i \neq 0$, on n'a pas: $d(G Z_i) \leq d Z$, et, si $G Z \neq 0$, on n'a pas: $d(G Z) \leq d Z_i$ pour $i < n$.

Or, supposons que $G . Z_i$ soit homéomorphe à un sous-ensemble T de Z. En désignant par P un sous-ensemble parfait de G, l'ensemble $P Z_i$ est donc homéomorphe à un sous-ensemble M de T. Mais, d'après (1), M appartient à $\mathfrak{M}$, donc $M - Z \neq 0$, contrairement à l'inclusion $M \subset Z$. Donc l'inégalité $d(G Z_i) \leq d Z$ n'a pas lieu.

Supposons, d'autre part, que $G Z$ est homéomorphe à un sous-ensemble T de Z_i. Donc, P étant un sous-ensemble parfait arbitraire de G, PZ est homéomorphe à un sous-ensemble T_1 de T. D'après le théorème de M. L a v r e n t i e f f[1]), on peut étendre cette homéomorphie à deux ensembles G_δ: B et Γ, de sorte que: $PZ \subset B$ et $T_1 \subset \Gamma$. Comme $T_1 \subset Z_i$, d'où $T_1 \subset \Gamma Z_i \subset \Gamma$, l'ensemble ΓZ_i vient correspondre dans cette homéomorphie à un ensemble H contenant PZ. Mais $M = P - H$ appartient d'après (2) à $\mathfrak{M}$; donc $Z(P - H) \neq 0$, contrairement à l'inclusion $PZ \subset H$. Ainsi: l'inégalité $d(GZ) \leq d Z_i$ n'est non plus vérifiée.

Ad 2°: Il s'agit de prouver que, si P est parfait ($\neq 0$); on a $ZP \neq 0 \neq (CZ).P$. Cela résulte du fait que P appartient à $\mathfrak{M}$. Car, posons $\Gamma = 0$, d'où $\Gamma Z_0 = 0$ et, en posant dans (2): $H = 0$, on en conclut que $P - H$, c.-à-d. P, appartient à $\mathfrak{M}$, c. q. f. d.

Théorème. *Il existe sur la droite $2^{\mathfrak{c}}$ ensembles ayant les nombres de dimension différents.*

Démonstration. Soit C l'ensemble parfait non-dense de Cantor (situé sur le segment 01). Soit $Q_1, Q_2, \dots Q_n, \dots$ la suite des intervalles (ouverts) contigus à C. Soit $Z_0, Z_1, \dots Z_n, \dots$ une suite d'ensembles qui réalise notre lemme. Nous définirons une suite d'ensembles $W_0, W_1, \dots W_n, \dots$ respectivement homéomorphes aux précédents: W_0 est homéomorphe à Z_0 et est contenu dans l'ensemble de points de C

[1]) Fund. Math. t. VI.

autres que les extrémités des intervalles contigus (ce dernier ensemble étant homéomorphe à l'ensemble des nombres irrationnels, W_0 existe); pour $n \geqslant 1$, W_n est homéomorphe à Z_n et est situé dans l'intervalle Q_n.

Soit $A \subset W_0$; nous lui ferons correspondre un ensemble $F(A)$ de façon que l'inégalité $A_1 \neq A_2$ entraîne $d\,F(A_1) \neq d\,F(A_2)$.

Posons:

$$F(A) = A + \sum_{n=1}^{\infty} W_n.$$

Or, supposons que $d\,F(A_1) = d\,F(A_2)$ et que la fonction $f(x)$ transforme l'ensemble $F(A_1)$ d'une façon bicontinue en un sous-ensemble de $F(A_2)$. Nous allons prouver que $A_1 \subset A_2$. Il suffit évidemment de prouver que, si $p \,\varepsilon\, A_1$ on a $f(p) = p$.

Supposons, par contre, que $f(p) = q \neq p$. Soit ab un intervalle entourant q. La fonction f étant continue, il existe un intervalle ce entourant p et tel que les conditions $x \,\varepsilon\, F(A_1)$ et $c < x < e$ entraînent $a < f(x) < b$. On peut évidemment supposer que les intervalles ab et ce sont disjoints et qu'il n'existe aucun intervalle contigu Q_n qui ait des points communs avec tous les deux intervalles ab et ce (car, par hypothèse, p n'est pas une extrémité d'un intervalle contigu). L'intervalle ce renferme des intervalles contigus: soit Q_k un tel intervalle; donc l'image $f(W_k)$ de W_k se trouve entre a et b. Comme W_k est homéomorphe à Z_k et W_0 à Z_0 et comme $d\,Z_k$ n'est pas $\leqslant d\,Z_0$, on n'a pas $d\,W_k \leqslant d\,W_0$; par conséquent $f(W_k)$ n'est pas contenu dans W_0. Il existe donc un point r de W_k tel que $f(r)$ appartient à un W_l avec indice $l \neq 0$ (et $l \neq k$). Comme W_l est situé à l'intérieur de l'intervalle Q_l et W_k à l'intérieur de Q_k, il existe (en vertu de la continuité de f) un intervalle (ouvert) R contenu dans Q_k et contenant r, tel que $f[R\,.\,F(A_1)] \subset Q_l$, ce qui revient à dire que $f(R\,.\,W_k) \subset W_l$.

Ainsi, nous parvenons à la conclusion qu'un sous-ensemble $R\,.\,W_k$ ouvert dans W_k a le nombre de dimension $\leqslant d\,W_l$. Mais W_k étant homéomorphe à Z_k et W_l à Z_l, il en résulte l'existence d'un ensemble X ouvert dans Z_k tel que $d\,X \leqslant d\,Z_l$, contrairement au lemme.

Il est donc établi que l'inégalité $f(p) \neq p$, pour un p appartenant à A_1, implique une contradiction. On en conclut que $A_1 \subset A_2$. D'une façon analogue: $A_2 \subset A_1$.

Nous avons ainsi prouvé qu'à des ensembles A_1 et A_2 différents correspondent des nombres $dF(A_1)$ et $dF(A_2)$ différents. Or, l'ensemble W_0 ayant la puissance du continu, la famille des ensembles A contenus dans W_0 a la puissance $2^{\mathfrak{c}}$. On en conclut que la famille des ensembles $F(A)$, famille composée d'ensembles à nombres de dimension différents, a la même puissance $2^{\mathfrak{c}}$. C'est donc la puissance de la famille de tous les nombres de dimension.

Remarque. *Il existe une famille composée de $2^{\mathfrak{c}}$ ensembles dont les nombres de dimension sont non-comparables deux à deux.*

Pour s'en convaincre, remarquons d'abord qu'il existe une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles situés à l'intérieur du segment 01 dont aucun n'est contenu dans un autre; cette famille a la puissance $2^{\mathfrak{c}}$ [1]).

En effet, à tout ensemble X situé entre 0 et 1 faisons correspondre l'ensemble $\Phi(X)$ en convenant que: pour que y appartienne à $\Phi(X)$ il faut et il suffit que ou bien $2y$ appartienne à X ou bien qu'on ait $y \geqslant \frac{1}{2}$ et qu'en même temps $2y-1$ n'appartienne pas à X. On prouve aisément que, si $X_1 \neq X_2$, aucune des inclusions $\Phi(X_1) \subset \Phi(X_2)$ et $\Phi(X_2) \subset \Phi(X_1)$ n'a lieu.

Or, l'ensemble W_0 ayant la puissance $\mathfrak{c}$, il en résulte l'existence d'une famille $\mathfrak{A}$ de puissance $2^{\mathfrak{c}}$ ayant comme éléments des sous-ensembles de W_0 dont aucun n'est contenu dans un autre. Nous avons prouvé que, si $dF(A_1) \leqslant dF(A_2)$, on a $A_1 \subset A_2$. Donc, si l'on considère la famille de tous les ensembles $F(A)$ où A varie dans $\mathfrak{A}$, cette famille se compose de $2^{\mathfrak{c}}$ ensembles dont les nombres de dimension son non-comparables.

2. La construction géométrique dont nous nous servirons à présent permettra de faire correspondre effectivement à tout ensemble X situé dans l'intervalle 01 un ensemble *plan* $F(X)$, de façon que l'inégalité $X_1 \neq X_2$ entraîne: $dF(X_1) \neq dF(X_2)$. Cela revient à dire que la famille que nous définirons, composée d'ensembles

[1]) C'est un cas particulier du théorème dû à M. Knaster, que l'on peut énoncer — en évitant l'application de l'axiome du choix — de cette façon: $\mathfrak{m}$ étant un nombre cardinal tel que $\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m}$, il existe une famille composée de $2^{\mathfrak{m}}$ ensembles dont aucun n'est contenu dans un autre. Pour le prouver on imagine l'ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$ décomposé en deux ensembles disjoints M_1 et M_2 les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ transformant de façon biunivoque M en M_1 et M en M_2 resp. A tout $X \subset M$ on fait correspondre $\Phi(X)$ en rangeant y dans $\Phi(X)$ si: $y = f_1(x)$ et x appartient à X, ou bien $y = f_2(x)$ et x n'appartient pas à X. La famille de tous les $\Phi(X)$ est la famille demandée.

plans ayant les nombres de dimension différents, est *effectivement* de puissance 2^c.

Soit $r_2, r_3, \dots r_n, \dots$ la suite des nombres rationnels de l'intervalle $(-1, 1)$. Désignons par S l'ensemble composé:

1⁰: de points x, y tels que

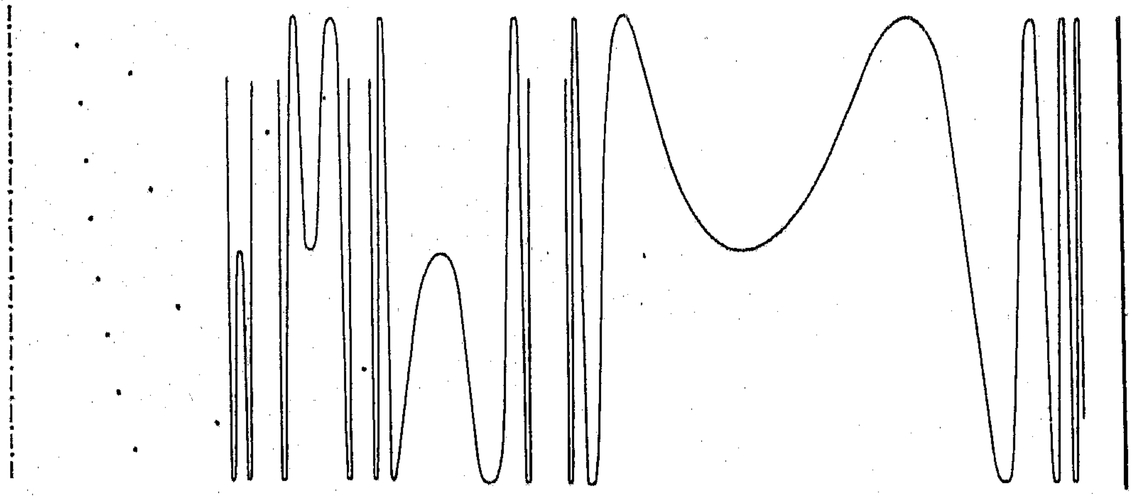
$$y = \sin\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{x}}\right],\quad 0 < x < 1,\ x \neq \frac{1}{n}\quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

2⁰: de points $\left(\frac{1}{n}, r_n\right)$ où $n = 2, 3, 4, \dots$

3⁰: de points du segment: $x = 1$, $-1 \leqslant y \leqslant +1$.

Soit X un ensemble arbitraire situé sur le segment 01 de l'axe des y; la fonction $F(X)$ est définie par l'égalité:

$$F(X) = X + S.$$



Je dis que, si $X_1 \neq X_2$, on a $dF(X_1) \neq dF(X_2)$. Il suffit de prouver que, si $dF(X_1) \leqslant dF(X_2)$, on a $X_1 \subset X_2$.

Or supposons que la fonction f transforme l'ensemble $F(X_1)$ en un sous-ensemble de $F(X_2)$ de façon bicontinue. On prouve facilement que le segment $x = 1$, $-1 \leqslant y \leqslant +1$ se transforme en lui-même; d'une façon analogue, en désignant par p_n le point $\left(\frac{1}{n_1}, r_n\right)$, on a $f(p_n) = p_n$; de sorte que tout point p_n est fixe par rapport à la fonction f. Il en est de même de tout point z de l'ensemble X_1 car pour tout z il existe une suite p_{n_k} qui converge vers z. Donc l'égalité $f(p_{n_k}) = p_{n_k}$ entraîne: $f(z) = z$. Ainsi $X_1 \subset F(X_2)$, d'où $X_1 \subset X_2$ [1]).

[1]) M. Sierpiński a attiré mon attention sur le fait que le procédé que j'emploie

3. Nous allons établir, à présent, l'existence d'un ensemble linéaire (infini) tel que, si la fonction f transforme cet ensemble en un sous-ensemble (vrai un non) de façon bicontinue, on a identiquement: $f(x) \equiv x$. Il sera plus commode de construire d'abord un ensemble plan V de ce genre; comme V ne contiendra aucun point sur les droites $y = r$, ni sur les droites $x = r$, où r désigne un nombre rationnel quelconque, — il en résulte tout de suite l'existence d'un ensemble linéaire qui est homéomorphe à V Cet ensemble linéaire repond donc au problème.

Soit K un carré ayant deux cotés situés sur les axes. Soit $p_0, p_1, \dots p_n, \dots$ une suite de points dense dans K et telle que 1°: p_n a les deux coordonnées irrationnelles, 2°: si $n \neq m$, p_n et p_m ont l'abscisse différente. Soit enfin $S_0, S_1, \dots S_n, \dots$ une suite de segments parallèles à l'axe des y telle que 1°: $p_n \varepsilon S_n \subset K$, 2°: la longueur de S_n est $< \frac{1}{n}$.

Reprenons la suite d'ensembles $Z_0, Z_1, \dots Z_n, \dots$ du lemme du N 1 et désignons par H_n un ensemble homéomorphe à Z_n et situé sur le segment S_n; nous pouvons évidemment supposer que H_n ne contient aucun point à ordonnée rationnelle. Je dis que l'ensemble

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} H_n$$

est l'ensemble V demandé.

Observons d'abord les deux propriétés suivantes des ensembles H_n.

1) si $m \neq n$ et si X est un ensemble ouvert ($\neq 0$) dans H_m, l'inégalité $d\,X \leq d\,H_n$ n'a pas lieu;

2) H_n n'est pas un ensemble de I^{re} catégorie sur lui-même [2]).

La propriété 1) résulte immédiatement de la propriété analogue des ensembles Z_n, énoncée dans le lemme. Pour prouver 2) il suffit de prouver que Z_n n'est pas de I^{re} catégorie sur lui-même.

Or, si Z_n était de I^{re} catégorie sur lui-même, il le serait aussi

permet de *nommer* une suite transfinie de puissance $\aleph_1$ d'ensembles plans dont les nombres de dimension vont en croissant (pour le cas d'ensembles linéaires le problème reste ouvert). En effet on sait nommer une suite de puissance $\aleph_1$ d'ensembles $X_1, X_2, \dots X_\alpha, \dots$ situés sur le segment 01 tels que $\alpha < \beta$ entraîne $X_\alpha \subset X_\beta$ (Cf. H. Lesbesgue Journ. de Math. 1905). Par conséquent: $d\,F(X_\alpha) < d\,F(X_\beta)$.

[2]) Un ensemble E est dit de I^{re} catégorie (au sens de Baire) sur E_1 si E est somme d'une série d'ensembles non-denses dans E_1.

sur la droite toute entière. Mais alors [1]) il existerait un ensemble parfait situé en dehors de Z_n, contrairement à l'hypothèse que le complémentaire de Z_n est totalement imparfait (cond. 2° du lemme).

Les propositions 1) et 2) établies, nous en déduirons la suivante:

3) l'inégalité $d\,H_n \leq d \sum_{m \neq n}^{\infty} H_m$ (la sommation s'étendant à tous les indices différents de n) n'est jamais vérifiée.

Pour simplifier les notations, posons $n = 0$. Il s'agit de prouver que $d\,H_0 \leq d \sum_{m=1}^{\infty} H_m$ n'a pas lieu. Supposons, par contre, que la fonction f transforme l'ensemble H_0 en un ensemble $f(H_0)$ contenu dans $\sum_{m=1}^{\infty} H_m$. On a donc: $H_0 = I_1 + I_2 + \ldots + I_m + \ldots$, où $f(I_m) \subset H_m$. D'après 2), un des ensembles de cette série, par ex. I_1 n'est pas non-dense dans H_0; autrement dit, il existe un intervalle (ouvert) J contenu dans S_0 tel que I_1 est dense dans $J\,H_0$ $(\neq 0)$. Comme $f(I_1) \subset H_1 \subset S_1$, on en conclut en vertu de la continuité de f que $f(J\,H_0) \subset S_1$, donc $f(J\,H_0) \subset H_1$. Or, l'ensemble $J\,H_0$ est ouvert dans H_0; par conséquent selon 1): $d\,(J\,H_0)$ n'est pas $\leq d\,H_1$, ce qui contredit l'inclusion $f(J\,H_0) \subset H_1$.

La proposition 3) est ainsi établie. Passons à la propriété fondamentale de l'ensemble V. Il s'agit de prouver que, si la fonction $f(x)$, définie pour tout $x \,\varepsilon\, V$, est bicontinue et satisfait à la condition $f(x) \,\varepsilon\, V$, — on a $f(x) = x$, quel que soit x.

Supposons, par contre, qu'il existe un point p tel que $f(p) = q \neq p$. Entourons q d'un cercle R ne contenant pas p. Soit $p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots$ une suite extraite de la suite $p_0, p_1, p_2, \ldots$ précédemment définie, qui converge vers p. En vertu de la continuité de la fonction f on a $f(p_{n_k}) \,\varepsilon\, R$, pour k suffisamment grand; la longueur des segments S_{n_k} tendant vers 0, on a $f(H_{n_k}) \subset R\,V$. On peut aussi assujettir l'indice k à la condition $H_{n_k} . R = 0$. Donc: $R\,V \subset \sum_{m \neq n_k}^{\infty} H_m$. D'où:

$$f(H_{n_k}) \subset \sum_{m \neq n_k}^{\infty} H_m \text{ et } d\,H_{n_k} \leq d \sum_{m \neq n_k}^{\infty} H_m, \text{ contrairement à 3).}$$

Il est ainsi établi que $f(x) = x$, quel que soit x, c. q. f. d.

[1]) Cf. Schönflies l. c. p. 347.