Sur un problème de M. Fréchet concernant les dimensions des ensembles linéaires.

Par

C. Kuratowski et W. Sierpiński (Varsovie).

M. Maurice Fréchet exprima récemment l'opinion qu'il serait intéressant de chercher si, parmi les nombres de dimension, il en existe un qui précède immédiatement celui de l'ensemble de tous les nombres irrationnels et un autre qui suit immédiatement celui de l'ensemble de tous les nombres rationnels [1]).

Nous donnerons dans cette Note une solution négative du premier problème, en nous appuyant sur le théorème de M. Zermelo, et nous prouverons que le second se résout négativement, si l'on admet l'hypothèse du continu.

Lemme I [2]). *Soient R un ensemble de nombres réels de puissance $\mathfrak{c}$* [3]) *et $\mathfrak{M}$ une famille de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$ de sous-ensembles de R dont chacun a la puissance $\mathfrak{c}$. R renferme alors un ensemble Z de puissance $\mathfrak{c}$ qui, de-même que $R-Z$, contient au moins un élément de tout ensemble M de la famille $\mathfrak{M}$.*

Démonstration. Soit $\Omega_\mathfrak{c}$ le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{c}$. La famille $\mathfrak{M}$ ayant la puissance $\leqslant \mathfrak{c}$, il existe une suite transfinie du type $\Omega_\mathfrak{c}$:

$$(1) \qquad M_1,\ M_2, \ldots,\ M_\omega,\ M_{\omega+1}, \ldots,\ M_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega_\mathfrak{c})$$

[1]) On dit, d'après M. Fréchet, que les ensembles E et H ont le même nombre de dimension, si E est homéomorphe d'un sous-ensemble de H et inversement. Si E est homéomorphe d'un sous-ensemble de H sans que H soit homéomorphe d'un sous-ensemble de E, on dit que la dimension de E est inférieure à celle de H (et on écrit $d\,E < d\,H$).

[2]) Un théorème analogue a été démontré par M. F. Bernstein: Leipz. Ber. 60, 1908. Cf. P. Mahlo, ibid. 63. 1911.

[3]) $\mathfrak{c}$ désigne la puissance du continu.

dont les termes sont des ensembles de la famille $\mathfrak{M}$, chaque ensemble de $\mathfrak{M}$ figurant dans la suite (1) au moins une fois.

Or, soit

$$(2) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega_c)$$

une suite transfinie du type Ω_c, formée de tous les nombres réels différents, appartenant à R.

Définissons maintenant par l'induction transfinie deux suites transfinies p_α et q_α $(\alpha < \Omega_c)$ comme il suit. Soit p_1 le premier terme de la suite (2) contenu dans M_1, q_1 — le premier terme de la suite (2) autre que p_1, contenu dans M_1. (Les points p_1 et q_1 existent, M_1 ayant la puissance $\mathfrak{c}$).

Soit maintenant α un nombre ordinal donné $< \Omega_c$ et supposons que nous avons déjà défini les points p_ξ et q_ξ, pour tout $\xi < \alpha$. L'ensemble S_α de tous les points p_ξ et q_ξ, où $\xi < \alpha$, est de puissance $< \mathfrak{c}$, puisque $\alpha < \Omega_c$. L'ensemble M_α ayant la puissance $\mathfrak{c}$ (comme élément de $\mathfrak{M}$), il en résulte que l'ensemble $M_\alpha - S_\alpha$ est de puissance $\mathfrak{c}$. Nous définissons p_α comme premier terme de la suite (2) contenu dans $M_\alpha - S_\alpha$ et q_α comme premier terme de la suite (2) contenu dans $M_\alpha - S_\alpha$ et distinct de p_α.

Désignons par Z l'ensemble de tous les points p_α, où $\alpha < \Omega_c$. On voit sans peine que l'ensemble Z satisfait aux conditions de notre lemme.

En effet, nous avons, d'après la définition de la suite p_α, $p_\alpha \varepsilon Z$, et $p_\alpha \varepsilon M_\alpha$, donc $M_\alpha Z \neq 0$ pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega_c$. Or, soient α et β deux nombres ordinaux quelconques $< \Omega_c$, et distinguons trois cas: $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ $\alpha < \beta$. Si $\alpha > \beta$, nous avons, d'après la définition de S_α, $q_\beta \varepsilon S_\alpha$ et d'après la définition de p_α, $p \;\varepsilon (M_\alpha - S_\alpha)$, donc p_α *non* εS_α, et parsuite $q_\beta \neq p_\alpha$. Si $\alpha = \beta$, nous avons, d'après la définition de q_α, $q_\alpha \neq p_\alpha$, donc $q_\beta \neq p_\alpha$. Enfin, si $\alpha < \beta$, nous avons, d'après la définition de S_β, $p_\alpha \varepsilon S_\beta$ et, d'après la définition de q_β, $q_\beta \varepsilon (M_\beta - S_\beta)$, donc q_β *non* εS_β, et parsuite $q_\beta \neq p_\alpha$. Nous avons donc dans tous les cas $q_\beta \neq p_\alpha$ et parsuite, d'après la définition de l'ensemble Z, q_β *non* εZ, c'est-à-dire $q_\beta \varepsilon (R - Z)$, quel que soit le nombre ordinal $\beta < \Omega_c$. Or, nous avons, d'après la définition de q_β: $q_\beta \varepsilon M_\beta$ pour $\beta < \Omega_c$: il en résulte, d'après $q_\beta \varepsilon (R - Z)$, que $M_\beta (R - Z) \neq 0$ pour $\beta < \Omega_c$.

Nous avons donc démontré les inégalités $M_\beta Z \neq 0$ et $M_\beta (R - Z) \neq 0$ pour tout nombre ordinal $\beta < \Omega_c$. Tout ensemble de la famille $\mathfrak{M}$ étant un terme de la suite (1), il en résulte que l'ensemble Z satisfait aux conditions de notre lemme, qui est ainsi démontré.

Soit maintenant R l'ensemble de tous les nombres réels, $\mathfrak{M}$— la famille de tous les ensembles linéaires parfaits. R et $\mathfrak{M}$ satisfont donc aux conditions de notre lemme: en appliquant ce lemme on conclut qu'il existe un ensemble de nombres réels Z de puissance du continu qui, ainsi que son complémentaire CZ, contient au moins un point de tout ensemble linéaire parfait [1]. Z ne peut évidemment contenir aucun sous-ensemble parfait: c'est donc un ensemble „*totalement imparfait*". Ainsi le lemme I entraîne l'existence des ensembles totalement imparfaits de puissance du continu [2]. On en déduit sans peine que l'ensemble de tous les ensembles totalement imparfaits a la puissance $2^{\mathfrak{c}}$.

Lemme II. *E étant un ensemble linéaire qui ne contient aucun sous-ensemble parfait et P étant un ensemble linéaire parfait, l'ensemble $P-E$ a la puissance du continu.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{F}$ une famille formée de $\mathfrak{c}$ ensembles linéaires disjoints et dont chacun a la puissance $\mathfrak{c}$. On sait qu'une telle famille existe: on l'obtient p. e., en désignant pour tout nombre irrationnel t de $(0, 1)$, dont le développement dyadique est

$$t = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots,$$

par $P(t)$ l'ensemble parfait formé de tous les nombres réels x dont le développement dyadique est

$$x = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \frac{c_3}{2^3} + \cdots,$$

où $c_{2n} = a_n$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ (c_{2n-1} étant arbitraire).

On voit ensuite sans peine que l'ensemble N des nombres irrationnels contient $\mathfrak{c}$ ensembles de la famille $\mathfrak{F}$. Tout ensemble parfait contenant un sous-ensemble homéomorphe de N, il en résulte tout de suite que tout ensemble parfait contient une famille Φ de $\mathfrak{c}$ ensembles parfaits disjoints.

Soit maintenant E un ensemble linéaire ne contenant aucun sous-ensemble parfait, P et un ensemble linéaire parfait donné

[1] Un tel ensemble est, comme on voit sans peine, non-mesurable au sens de Lebesgue.

[2] L'existence des ensembles de ce genre a été prouvée par M. F. Bernstein, loc. cit.

Φ une famille de $\mathfrak{c}$ ensembles parfaits disjoints contenus dans P. L'ensemble E ne contenant aucun sous-ensemble parfait, il est évident que tout ensemble parfait de la famille Φ contient au moins un point n'appartenant pas à E. Les ensembles formant la famille Φ étant disjoints et contenus dans P, et la famille Φ ayant la puissance du continu, il en résulte que l'ensemble $P-E$ a la puissance du continu, c, q. f. d. Notre lemme est ainsi démontré.

Soit maintenant E un ensemble non-dénombrable de dimension $< dN$. L'ensemble de tous les ensembles G_δ [1]) linéaires ayant la puissance du continu, il en sera de-même de l'ensemble de tous les produits $E\Gamma$, où Γ est un G_δ variable. L'ensemble de tous les ensembles linéaires homéomorphes d'un ensemble linéaire donné ayant, comme on sait, la puissance du continu [2]), il en résulte que la famille $\mathcal{F}$ de tous les ensembles homéomorphes à un quelconque des produits $E\Gamma$, où Γ est un G_δ, est de puissance du continu. Evidemment l'ensemble E lui-même appartient à $\mathcal{F}$.

Or, désignons par $\mathfrak{M}$ la famille de tous les ensembles $P-T$, où P est un ensemble linéaire parfait quelconque et T un ensemble de la famille $\mathcal{F}$.

La famille de tous les ensembles parfaits ayant la puissance du continu, il en sera de-même de la famille $\mathfrak{M}$. Or, d'après le lemme II, les ensembles de la famille $\mathfrak{M}$ ont la puissance $\mathfrak{c}$ et la famille $\mathfrak{M}$ a elle-même la puissance du continu. Désignons par R l'ensemble de tous les nombres réels et appliquons le lemme I. D'après ce lemme il existe un ensemble de nombres réels Z, tel que Z, de même que CZ, contient au moins un point de tout ensemble de la famille $\mathfrak{M}$.

Posons

$$H = E + Z; \tag{3}$$

nous prouverons que

$$dE < dH < dN. \tag{4}$$

Pour le démontrer, remarquons d'abord que d'après (3), $H \supset E$, donc $dH \geqslant dE$. S'il était $dH = dE$, H serait homéomorphe d'un

1) Un ensemble est dit G_δ, s'il est le produit d'une suite infinie d'ensembles ouverts.

2) Voir, p. ex. Hausdorff *Grundzüge der Mengenlehre* p. 365, Leipzig 1914. ou P. Mahlo l. c. p. 345.

sous-ensemble Q de E. Or, d'après le théorème de M. Lavrentieff[1]) l'homéomorphie entre Q et H peut être étendue à des ensembles G_δ, Q^* et H^* tels que $Q^* \supset Q$ et $H^* \supset H$. Soit T l'ensemble en lequel se transforme l'ensemble EQ^* dans l'homéomorphie entre Q^* et H^*: d'après $Q \subset E$ et $Q \subset Q^*$ nous avons $Q \subset EQ^*$, ce qui donne: $H \subset T$ (puisque dans l'homéomorphie entre Q^* et H^* au sous-ensemble Q de EQ^* correspond le sous-ensemble H de T). Or, Q^* étant un G_δ et T étant homéomorphe de EQ^*, l'ensemble T appartient à la famille $\mathcal{F}$ et parsuite $\mathrm{C}T$ appartient à la famille $\mathfrak{M}$: d'après la propriété de l'ensemble Z, nous avons donc $Z.\mathrm{C}T \neq 0$, et, d'après (3), à plus forte raison $H.\mathrm{C}T \neq 0$, ce qui est impossible, puisque $H \subset T$.

Nous avons ainsi démontré qu'il ne peut être $dH = dE$, et, puisque $dH \geqslant dE$, nous avons $dH > dE$. Or, soit P un ensemble parfait linéaire. L'ensemble $P - E$ appartient donc à la famille $\mathfrak{M}$ et il résulte de la propriété de l'ensemble Z que $(P-E).\mathrm{C}Z \neq 0$, donc, d'après (3):

$$P.\mathrm{C}H = P.\mathrm{C}E.\mathrm{C}Z = (P-E).\mathrm{C}Z \neq 0,$$

ce qui prouve qu'il ne peut être $P \subset H$. L'ensemble H ne contient donc aucun ensemble parfait, et parsuite nous avons $dH \neq dN$; comme $dH \leqslant dN$ (puisque H ne contient aucun intervalle) on en tire: $dH < dN$. La formule (4) est ainsi établie. Nous avons donc démontré le suivant

Théorème I. *E étant un ensemble dont la dimension est plus petite que celle de l'ensemble N de tous les nombres irrationnels, il existe toujours un ensemble H dont la dimension est comprise entre celle de E et celle de N.*

Nous allons maintenant démontrer un théorème plus général que voici:

Théorème II. *$\mathcal{F}$ étant une famille ayant la puissance $\leqslant \mathfrak{c}$ d'ensembles dont les nombres de dimension sont $< dN$, il existe toujours un ensemble H de dimension $< dN$, mais supérieure à celle de tout ensemble X de la famille $\mathcal{F}$.*

Nous prouverons d'abord le suivant

Lemme III. *Si P est un ensemble plan parfait et borné, dont la projection sur l'axe d'ordonnées ne contient aucun ensemble parfait,*

[1]) *Fund. Math.* t. VI, p. 149.

il existe un nombre réel b, tel que la droite $y = b$ contient un sous-ensemble parfait de P.

Démonstration [1]). Soit P un ensemble plan parfait et borné, dont la projection Π sur l'axe d'ordonnées ne contient aucun ensemble parfait. L'ensemble Π étant fermé (comme projection d'un ensemble parfait et borné) et ne contenant aucun sous-ensemble parfait, nous en concluons que Π est au plus dénombrable. L'ensemble P étant parfait, donc non-dénombrable, il en résulte qu'un au moins des points de Π, soit $(0, b)$, est une projection d'une infinité non-dénombrable de points de P et parsuite la droite $y = b$ rencontre P en un ensemble P_b non-dénombrable de points. L'ensemble P_b étant fermé (comme intersection d'un ensemble parfait avec une droite), il en résulte que P_b contient un sous-ensemble parfait, et notre lemme est démontré.

Nous allons maintenant démontrer le théorème II. Soit $\mathcal{F}$ une famille ayant la puissance $\leqslant \mathfrak{c}$ d'ensemble linéaires, dont les dimensions sont $< dN$, et soit Q un ensemble de nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$ ayant la puissance du continu et ne contenant aucun sous-ensemble parfait. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les éléments y d'un sous-ensemble Q_1 de Q et les ensembles X de $\mathcal{F}$: soit $\varphi(y)$ l'ensemble de la famille $\mathcal{F}$ correspondant au nombre y de Q_1. La dimension de l'ensemble $\varphi(y)$ (comme ensemble de la famille $\mathcal{F}$) étant $< dN$, $\varphi(y)$ est homéomorphe d'un ensemble de nombres irrationnels de $(0, 1)$, soit de l'ensemble $\Psi(y)$. Définissons maintenant M comme l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $y \varepsilon Q_1$ et $x \varepsilon \Psi(y)$. L'ensemble M, comme sous-ensemble de l'ensemble de tous les points du plan dont les coordonnées sont irrationnelles, est, comme on sait [2]), homéomorphe d'un sous-ensemble de N, soit E. Nous avons donc $dE \leqslant dN$.

S'il était $dE = dN$, l'ensemble E, et parsuite aussi son homéomorphe M contiendrait un sous-ensemble parfait, soit P. Soit Π la projection de P sur l'axe d'ordonnées: d'après la définition de l'ensemble M, nous avons $\Pi \subset Q_1$; donc, d'après $Q_1 \subset Q$, et en vertu de la propriété de Q, Π ne contient aucun sous-ensemble parfait. D'après le lemme III, il existe donc un nombre réel b, tel que la droite $y = b$ contient un sous-ensemble parfait de P. Or, c'est impossible,

[1]) La démonstration du lemme III est due à M. Mazurkiewicz.
[2]) Cf. Fréchet Math Ann. 68, 1910.

puisque $P \subset M$ et puisqu'il résulte de la définition de M que les intersections de l'ensemble M avec les droites parallèles à l'axe d'abscisses (en tant qu'ensembles de la famille $\mathcal{F}$, donc ensembles de dimension $< dN$) ne contiennent aucun sous-ensemble parfait.

L'égalité $dE = dN$ implique donc une contradiction, et parsuite nous avons $dE < dN$. Or M, et parsuite aussi E, contient évidemment un ensemble homéomorphe à tout ensemble donné de la famille $\mathcal{F}$ (En effet, X étant un ensemble de $\mathcal{F}$, il existe un nombre réel $b \varepsilon Q$, tel que $X = \varphi(b)$, et la droite $y = b$ rencontre M en l'ensemble $\Psi(b)$, homéomorphe de l'ensemble $\varphi(b) = X$). Nous avons donc $dE \geqslant dX$ pour tout ensemble X de la famille $\mathcal{F}$. Soit maintenant H un ensemble linéaire tel que $dE < dH < dN$: un tel ensemble existe, d'après le théorème I (puisque $dE < dN$): l'ensemble H satisfait donc aux conditions du théorème II qui est ainsi demontré.

Une des conséquences immédiates du théorème II est *l'existence d'un ensemble bien ordonné de puissance supérieure à celle du continu d'ensembles linéaires dont les nombres de dimension vont en croissant*; en outre, le premier de ces ensembles peut être supposé arbitraire L_1 de dimension $< dN$.

Soit, en effet, λ le plus petit nombre ordinal dont la puissance est $> \mathfrak{c}$ et soit:

$$(5) \qquad L_1, L_2, \ldots L_\omega, L_{\omega+1}, \ldots L_\alpha, \ldots$$

une suite transfinie (de puissance $2^{\mathfrak{c}}$) formée de tous les ensembles totalement imparfaits. Nous définissons une suite transfinie du type λ d'ensembles E_α, en posant 1^0: $E_1 = L_1$, 2^0: pour α tel que $1 < \alpha < \lambda$, $E_\alpha =$ le premier terme de la suite (5) dont le nombre de dimension est $> dE_\xi$ quel que soit $\xi < \alpha$. Un tel E existe toujours, car α étant inférieur à λ, la puissance de α est $\leqslant \mathfrak{c}$ et on peut appliquer le théorème II, en substituant à $\mathcal{F}$ la famille de tous les E_ξ avec $\xi < \alpha$. La suite transfinie E $(\alpha < \lambda)$ jouit évidemment des propriétés désirées [1]).

Pour passer au deuxième de nos problèmes nous allons nous appuyer sur le

[1]) Il est à signaler que C. Kuratowski a démontré l'existence d'un ensemble de puissance $2^{\mathfrak{c}}$ d'ensembles linéaires dont les dimensions sont non comparables deux à deux: voir ce volume, p. 205.

Théorème III [1]. *E étant un ensemble linéaire de puissance du continu, il existe toujours un ensemble Z de puissance du continu, tel que $dZ < dE$.*

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire de puissance du continu. Posons $R = E$, et soit $\mathfrak{M}$ la famille de tous les sous-ensembles de E qui sont homéomorphes à E. On voit sans peine que la famille $\mathfrak{M}$ a la puissance $\leqslant \mathfrak{c}$ et que les ensembles formant $\mathfrak{M}$ ont chacun la puissance $\mathfrak{c}$. Donc R et $\mathfrak{M}$ satisfont aux conditions du lemme I. D'après ce lemme il existe donc un ensemble Z de puissance $\mathfrak{c}$, contenu dans E et tel que $E - Z$ contient au moins un point de tout ensemble M de la famille $\mathfrak{M}$. D'après $Z \subset E$, nous avons $dZ \leqslant dE$. S'il était $dZ = dE$, Z contiendrait un sous-ensemble H, homéomorphe de E: d'après $H \subset Z \subset E$ et d'après la définition de la famille $\mathfrak{M}$, H serait donc un ensemble de cette famille et il résulterait de la propriété de Z que $(E-Z)H \neq 0$, ce qui implique une contradiction, puisque $H \subset Z$. Nous avons donc $dZ < dE$ et le theorème III est démontré. Il en résulte immédiatement le suivant

Corollaire: *Si la puissance du continu est $\aleph_1$, il n'existe parmi les nombres de dimension des ensembles linéaires non-dénombrables aucun qui soit le plus petit.*

[1] Nous déduisons ce théorème du lemme I. On pourrait aussi le prouver en modifiant légèrement la démonstration du théor. 22 de M. Mahlo (l. c. p. 345). D'après ce théorème, il existe une suite transfinie de puissance $> \mathfrak{c}$ d'ensembles P_ν tels que, si $\mu < \nu$, on a ou bien $dP_\mu > dP_\nu$, ou bien: dP_μ et dP_ν sont non comparables. (Dans le livre de M. Schönflies *Entwickelung der Mengenlehre I*, Leipzig 1913, p. 380, le théorème de M. Mahlo est cité avec und faute d'impression qui change complètement son sens).