Sulle funzioni continue.

Nota di

Giuseppe Vitali (Padova).

La presente nota ha lo scopo di dimostrare una proprietà caratteristica delle funzioni continue ed a variazione limitata di una variabile reale, proprietà che credo non sia stata messa ancora in rilievo [1]) e che suggerisce una estensione della nozione di variazione alle funzioni di più variabili reali diversa da quella tentata fin qui [2]) e forse più importante.

1. Sia $y=f(x)$ una funzione continua della variabile reale x nell' intervallo (a, b), $a<b$, e siano c e d rispettivamente il limite inferiore ed il limite superiore di $f(x)$ in (a, b). I valori di $y=f(x)$ cadono tutti in (c, d), ed ogni valore di (c, d) è assunto da $y=f(x)$ almeno una volta.

Così ad ogni punto di (a, b) viene a corrispondere uno ed un solo punto di (c, d), e ad ogni punto di (c, d) deve corrispondere almeno un ponto di (a, b), ma ne possono corrispondere parecchi, anche infiniti.

Indico con G_∞ il gruppo dei punti di (c, d) cui corrispondono infiniti punti di (a, b), e, per ogni numero intero r maggiore di *zero*, indico on G_r il gruppo dei punti di (c, d) cui corrispondono esattamente r punti di (a, b).

I gruppi $G_\infty, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_r, \ldots,$

[1]) Mentre correggo le bozze ho da segnalare la recente importantissima nota di Stefan Banach „*Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*", Fund. Math. T. VII, pg 226—236, nella quale l'autore, con analoghi intendimenti sebbene con procedimenti diversi, ha conseguito risultati che collimano con quelli del presente lavoro. Sono lieto che l'opinione dell'Illustre College dell'Università di Leopoli a la mia concordino nell'indicare la via per estendere alle superficie i noti risultati sulla rettificazione delle curve ed in particolare il bel teorema di Leonida Tonelli.

[2]) Giuseppe Vitali. *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabile reale* (R. Accademia delle scienze di Torino. Vol, XLIII 1907—08. pp. 3—20) vedi pag. 19. — Henri Lebesgue. *Sur l'intégration des fonctions discontinues* (Annales de l'Ecole normale de Paris. (3). XXVII. 1910. pp. 361—450), vedi p. 364.

sono a due a due distinti, cioè senza punti comuni, ed hanno per somma il gruppo dei punti di (c, d).

Per ogni numero intero r maggiore di *zero*, indico con Γ_r il gruppo dei punti di (c, d) cui corrispondono almeno r punti di (a, b).

Evidentemente per ogni numero r maggiore di *zero* si hanno le relazioni:

$$G_r = \Gamma_r - \Gamma_{r+1} \tag{1}$$

$$G_\infty = \Gamma_r - (G_r + G_{r+1} + G_{r+2} + \ldots). \tag{2}$$

2. Def. Chiamo *eccezionale* ogni punto di G_∞ i cui corrispondenti in (a, b) formano un gruppo contenente tutti i punti di un segmento.

Sia p un punto eccezionale e sia Ω il gruppo dei punti corrispondenti a p. Un punto q di Ω lo dirò *interno* ad Ω se è interno ad un segmento i cui punti appartengono tutti ad Ω. Naturalmente Ω contiene punti interni. Se q è un punto interno ad Ω indichiamo con q' il limite inferiore dei numeri $q_1 < q$ per cui tutti i punti di (q_1, q) appartengono ad Ω, e con q'' il limite superiore dei numeri $q_{11} > q$ per cui tutti i punti di (q, q_{11}) appartengono ad Ω. A causa della continuità della $y = f(x)$ anche q' e q'' appartengono ad Ω.

Il segmento (q', q'') ha la proprietà che tutti i suoi punti appartengono ad Ω, ma qualunque segmento maggiore che contenga (q', q'') contiene dei punti che non appartengono ad Ω. Un segmento come (q', q'') lo dirò associato al punto eccezionale p.

É evidente che due segmenti associati ad un medesimo punto eccezionale p o coincidono o sono completamente distinti, cioè non hanno punti in comune. Si ha inoltre che due segmenti σ_1, σ_2 associati a due punti eccezionali p_1, p_2 diversi sono completamente distinti, ed infatti se avessero un punto commune q, al valore q della x corrisponderebbero valori diversi p_1 e p_2 di $y = f(x)$. Consegue che i segmenti associati ai vari punti eccezionali sono a due a due distinti e quindi sono in numero finito od una infinità numerabile e quindi che *i punti eccezionali sono in numero finito od una infinità numerabile.*

Indichiamo con E il gruppo dei punti eccezionali e dei punti $f(a)$ ed $f(b)$. Evidentemente anche *il gruppo E ha potenza non maggiore del numerabile.*

3. Teor. *I gruppi Γ_r sono misurabili.*

Dim. Sia p un punto di Γ_r che non appartenga ad E. A p corrispondono in (a, b) almeno r punti

$$a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_r$$

tutti interni ad (a, b), perchè p non appartenendo ad E non può corrispondere ad alcuno degli estremi di (a, b).

Sia h un numero > 0, ma minore di ciascuno dei numeri

$$a_1 - a, \quad \frac{a_2 - a_1}{2}, \quad \frac{a_3 - a_2}{2}, \dots \quad \frac{a_r - a_{r-1}}{2}, \quad b - a_r.$$

Consideriamo i $2r$ intervalli

$$(3) \qquad \begin{array}{l} (a_1 - h,\ a_1),\ (a_2 - h,\ a_2), \dots\ (a_r - h,\ a_r) \\ (a_1,\ a_1 + h),\ (a_2,\ a_2 + h), \dots\ (a_r,\ a_r + h) \end{array}$$

che sono evidentemente a due a due distinti. In ciascuno di questi o il massimo o il minimo di $f(x)$ è diverso da p, perchè p non è punto eccezionale e quindi non può corrispondere a tutti i punti di un tale intervallo. Vi sono dunque almeno r intervalli (3) in cui i massimi di $f(x)$ sono diversi da p, od almeno r intervalli (3) in cui i minimi di $f(x)$ sono diversi da p.

Supponiamo per esempio che vi siano almeno r intervalli (3) in cui i massimi di $f(x)$ siano diversi da p, e quindi maggiori di p, ed indichiamo con p_1 il più piccolo di questi massimi. È certo $p_1 > p$. Per la continuità della $y = f(x)$, i valori y che soddisfano alle limitazioni

$$p \leqq y \leqq p_1$$

sono assunti dalla $f(x)$ in ciascuno di detti intervalli almeno una volta e quindi sono punti di Γ_r.

Allora ogni punto di Γ_r che non appartiene ad E appartiene o come punto interno o come estremo ad un segmento di (c, d) che appartiene completamente a Γ_r. Associamo ad ogni p di Γ_r che non appartiene ad E il massimo segmento (α, β) contenente p come punto interno o come estremo e di cui almeno tutti i punti interni appartengono a Γ_r. Due qualunque segmenti così ottenuti o coincidono o sono distinti. Di tutti i segmenti che coincidono prendiamone uno solo. Si ha così un gruppo di segmenti (α, β) a due a due distinti. Ogni gruppo interno ad uno di tali segmenti appartiene a Γ_r

ed ogni punto di Γ_r che non appartenga a qualcuno di questi segmenti o come interno o come estremo appartiene ad E, e ricordando che E è finito o numerabile, si conclude che Γ_r è un gruppo misurabile, e che anzi è misurabile secondo Borel [1]).

4. Dalle relazioni (1) e (2) e dal teorema precedente risulta immediatamente il

Teor. *I gruppi* G_r $(r=1, 2, 3, \ldots)$ *ed il gruppo* G_∞ *sono misurabili* (anzi sono misurabili secondo Borel).

5. Abbiamo visto al N° 3 che, se p è un punto di Γ_r che non appartiene ad E, esistono in (a, b) r segmenti distinti

$$(a_i, b_i),\ a_i < b_i,\ (i=1, 2, 3, \ldots, r)$$

in ciascuno dei quali la $y=f(x)$ acquista almeno una volta ciascuno dei valori y soddisfacenti alle limitazioni

$$p_0 \leqslant y \leqslant p_1,$$

dove p_0 e p_1 sono numeri convenienti soddisfacenti alle limitazioni

$$p_0 \leqslant p \leqslant p_1 \quad \text{e} \quad p_0 < p_1 \text{ [2])}.$$

Ogni intervallo (q_0, q_1), $q_0 < q_1$, contenuto in (p_0, p_1) soddisfa pure alla condizione che in ciascuno degli intervalli (a_i, b_i) la $y=f(x)$ acquista ogni valore dell' intervallo (q_0, q_1) almeno una volta. Un intervallo come (q_0, q_1) si dirà *congiunto* a Γ_r. Dunque un intervallo congiunto a Γ_r è un intervallo (q_0, q_1) di (c, d) tale che in (a, b) esistono r segmenti distinti

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ (a_3, b_3), \ldots, (a_r, b_r)$$

in ciascuno dei quali è assunto almeno una volta da $y=f(x)$ ogni valore dell' intervallo (q_0, q_1), estremi compresi.

Evidentemente *ogni punto di* Γ_r *appartiene almeno come estremo ad un intervallo* congiunto *a* Γ_r, e quindi anche *ad infiniti fra i quali ve ne sono dei piccoli quanto si vuole.*

[1]) Emile Borel. *Leçons sur la théorie des fonctions.* Paris. Gauthier-Villars. 1898.

[2]) Nel fatto abbiamo visto esistere r segmenti (3) nei quali la $y=f(x)$ acquista tutti i valori soddisfacenti alle limitazioni $p \leqslant y \leqslant p_1$ o alle $p \geqslant y \geqslant p_1$, dove p_1 è un numero conveniente diverso da p.

6. Sia (q_0, q_1) un intervallo congiunto a Γ_r e sia $q_0 < q_1$. Siano inoltre

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_r, b_r),$$

con

$$a_i < b_i, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, r),$$

r intervalli distinti di (a, b) in ciascuno dei quali la $y = f(x)$ acquista almeno una volta ciascuno dei valori dell' intervallo (q_0, q_1), estremi compresi.

Consideriamo uno qualunque (a_i, b_i) di questi intervalli. Esiste in (a_i, b_i) un punto $\overline{\alpha}_i$ in cui la $y = f(x)$ ha il valore q_0. In una almeno delle parti $(a_i, \overline{\alpha}_i)$ $(\overline{\alpha}_i, b_i)$ la $y = f(x)$ ha il valore q_1. Ciò avvenga per esempio in $(\overline{\alpha}_i, b_i)$. Sia β_i il primo punto di $(\overline{\alpha}_i, b_i)$ in cui la $y = f(x)$ acquista il valore q_1. Un tal primo punto esiste a causa della continuità di $f(x)$ ed è diverso e quindi maggiore di $\overline{\alpha}_i$. Sia α_i l'ultimo punto di $(\overline{\alpha}_i, \beta_i)$ in cui $f(x)$ acquista il valore q_0. Anche questo esiste per la continuità di $f(x)$, ed è minore di β_i. L'intevallo (α_i, β_i) ha la proprietà che in nessun punto interno la $f(x)$ acquista i valori q_0, q_1, mentre $f(\alpha_i) = q_0$ ed $f(\beta_i) = q_1$. Allora (α_i, β_i), che fa parte di (a_i, b_i), è tale che in esso la $f(x)$ acquista ogni valore di (q_0, q_1), estremi compresi, almeno una volta, ma in esso non acquista alcun valore esterno all' intervallo $(q_0; q_1)$.

Consegue che ad ogni intervallo (q_0, q_1) congiunto a Γ_r si possono associare r segmenti distinti

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_r, \beta_r)$$

di (a, b), in ciascuno dei quali la $f(x)$ acquista almeno una volta ogni valore di (q_0, q_1), ma non alcun valore esterno a (q_0, q_1), ed acquista i valori q_0 e q_1 soltanto negli estremi.

Dei segmenti come gli (α_i, β_i) si diranno *segmenti puri associati* a (q_0, q_1). Dunque *per ogni segmento congiunto a* Γ_r *esistono* r *segmenti puri associati ad esso e a due a due distinti.*

7. **Teor.** *Segmenti puri associati a segmenti distinti congiunti a* Γ_r *sono pure distinti.*

Dim. Infatti se (p_0, p_1) e (q_0, q_1) sono due segmenti distinti congiunti a Γ_r, se (α, β) è un segmento puro associato a (p_0, p_1) e se (γ, δ) e un segmento puro associato a (q_0, q_1), non può darsi che i segmenti (α, β), (γ, δ) abbiano un punto interno comune, perchè in quel punto la $f(x)$ acquisterebbe un valore che sarebbe contemporaneamente interno a (p_0, p_1) ed a (q_0, q_1), e questi due segmenti non sarebbero distinti come si è supposto.

8. I segmenti congiunti a Γ_r formano un gruppo Σ di segmenti il cui *nucleo* [1]) è Γ_r, esclusoal più un gruppo finito o numerabile di punti [2]).

Allora, se μ_r è la misura di Γ_r, esiste un numero finito od una infinità numerabile di segmenti di Σ a due a due distinti, le cui lunghezze hanno una somma non minore di μ_r [3]).

Preso un numero reale $\varepsilon > 0$, piccolo a piacere, potremo trovare un numero finito di questi segmenti le cui lunghezze abbiano una somma $>$ di $\mu_r - \varepsilon$.

Siano dessi

$$(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_s, q_s).$$

A ciascuno di questi segmenti possiamo associare in (a, b) r segmenti puri distinti.

Gli $r.s$ segmenti puri che così si ottengono sono ancora a due a due distinti. Siano dessi

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots (\alpha_{r.s}, \beta_{r.s}).$$

É evidente che

$$\sum_1^{rs}{}_i |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| = r \sum_1^{s}{}_i |q_i - p_i| > r(\mu_r - \varepsilon).$$

Questo prova che la variazione totale di $f(x)$ in (a, b) è $> r(\mu_r - \varepsilon)$ qualunque sia $\varepsilon > 0$, e quindi è $\geqslant r . \mu_r$.

9. Se la variazione totale di $y = f(x)$ in (a, b) è finita, e se V è questa variazione, dalla relazione

$$V \geqslant r \mu_r$$

risulta

$$\mu_r \leqslant \frac{V}{r}$$

e quindi

$$\lim_{r=\infty} \mu_r = 0.$$

1) G. Vitali. *l. c.* vedi pag. 3.

2) Escluso cioè al più alcuni dei punti di Γ_r che appartengono ad E.

3) G. Vitali. *l. c.* pag. 3 e seg.

Ma G_∞ è contenuto in ogni Γ_r e quindi *se $f(x)$ è a variazione limitata, la misura di G_∞ è nulla.*

10. Si potrebbe sospettare che la condizione precedente (la misura di G_∞ è nulla) debba essere soddisfatta da tutte le funzioni continue, ma invece è facile creare una funzione continua $y=f(x)$ per cui la misura di G_∞ è diversa da *zero*. Per questo basta considerare la funzione $y=f(x)$ definita nell' intervallo (0, 1) che per ogni punto

$$x=\frac{\alpha_1}{3}+\frac{\alpha_2}{3^2}+\frac{\alpha_3}{3^3}+\dots$$

dove le α_r hanno solo i valori 0 e 2, ha il valore

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_3}{2^2}+\frac{\alpha_5}{2^3}+\dots\right)$$

e che nei punti rimanenti è definita nel modo seguente:

I punti in cui è fin qui definita la $f(x)$ formano un gruppo Z che è perfetto [1]. Se x è un valore non contenuto in Z, allora esso è interno ad un intervallo (x_0, x_1) i cui estremi appartengono a Z, ma che non contiene al suo interno alcun punto di Z. Per un tale x noi poniamo

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0).$$

La funzione così definita, la cui costruzione si è già presentata in altri studi [2], è continua ed assume ciascun valore dell' intervallo (0, 1) infinite volte, perchè ogni numero y dell' intervallo (0, 1) si può mettere almeno in un modo [3] sotto la forma

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_3}{2^2}+\frac{\alpha_5}{2^3}+\dots\right),$$

[1] H. Lebesgue, l. c. pag. 26—27.

[2] H. Lebesgue, l. c. pag. 44.

[3] Vi sono numeri che possono essere messi in due modi sotto la forma $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{2^i}$ con le β_i uguali a *zero* o ad 1, e sono i numeri che nel sistema binario di numerazione si possono scrivere anche con un numero finito di cifre. Così numero $\frac{1}{2}$ si può scrivere anche $\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{2}$.

dove le α hanno solo i valori 0 e 2, e quindi corrisponde a tutti i punti di Z che si ottengono da

$$x=\frac{\alpha_1}{3}+\frac{\alpha_2}{3^2}+\frac{\alpha_3}{3^3}+\dots$$

mettendo per

$$\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_5,\dots$$

i valori che figurano nella espressione di y e per

$$\alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_6,\dots$$

un sistema qualunque di valori 0 e 2.

Per la funzione così definita il gruppo G_∞ è dunque costituito da tutti i punti dell' intervallo $(0,1)$ ed ha quindi misura non nulla.

11. Abbiamo visto all N° 9 che *affinchè una funzione* $y=f(x)$ *continua definita in un intervallo* (a,b) *sia a variazione limitata è necessario che la misura del gruppo* G_∞ *ad essa relativo sia nulla.*

Questa condizione *non è sufficiente.*

Così, per esempio, se nel piano (x, y) consideriamo la successione di punti

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ P_6,\dots$$

che hanno per ascisse

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\dots$$

e per ordinate

$$0,\ 1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\dots$$

e conduciamo i segmenti

$$P_1P_2,\ P_2P_3,\ P_3P_4,\ P_4P_5,\dots,$$

otteniamo una spezzata. La funzione $y=f(x)$ che per $x=0$ ha il valore $y=0$ e che nell' intervallo $(0,1)$ è rappresentata da tale spezzata è una funzione per cui G_∞ è costituito dal solo punto $y=0$ e quindi è di misura nulla, ma essa non è a variazione limitata.

12. Teor. *Se* $y=f(x)$ *è una funzione continua in* (a,b), *condizione necessaria e sufficiente perchè sia a variazione limitata è che la serie* $\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r$, *dove* μ_r *indica la misura del gruppo* Γ_r, *sia conver-*

gente. In tutti i casi la variazione totale di $f(x)$ in (a, b) è uguale alla somma della serie $\sum_{r=1}^{\infty} \mu_r$.

Dim. Sia ε un numero reale > 0 e piccolo a piacere. Per quanto si è visto al N° 8 possiamo trovare per ogni r un sistema Δ_r di un numero finito di segmenti congiunti a Γ_r e a due a due distinti le cui lunghezze abbiano una somma maggiore di $\mu_r - \frac{\varepsilon}{2^r}$.

Consideriamo i sistemi

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n.$$

I segmenti di Δ_1 saranno in generale divisi dagli estremi dei segmenti di $\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$ in un numero finito di segmenti più piccoli che formeranno un nuovo sistema Δ'_1 di segmenti congiunti a Γ_1. Analogamente i segmenti di Δ_2 saranno divisi dagli estremi dei segmenti di $\Delta_1, \Delta_3, \ldots \Delta_n$ in un numero finito di segmenti più piccoli che formeranno un nuovo sistema Δ'_2 di segmenti congiunti a Γ_2 e così via. Evidentemente i segmenti che appartengono ad un medesimo dei sistemi

$$(4) \qquad \Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \ldots \Delta'_n$$

sono distinti nel senso che due qualunque di essi non hanno punti interni in comune, e due segmenti che appartengono a due diversi dei sistemi (4) o sono distinti o coincidono, potendo un segmento appartenere a due o più sistemi (4).

Indichiamo con Δ''_1 l'insieme dei segmenti di Δ'_1 che non appartengono ad alcuno dei sistemi $\Delta'_2, \Delta'_3, \ldots \Delta'_n$. Indichiamo con Δ''_2 l'insieme dei segmenti di Δ'_2 che non appartengono ad alcuno dei sistemi $\Delta'_3, \Delta'_4, \ldots \Delta'_n$, e così via. Infine indichiamo con Δ''_n il sistema dei rimanenti segmenti di Δ'_n. Evidentemente ogni segmento che appartiene ad uno dei sistemi (4) appartiene ad uno e ad uno solo dei sistemi

$$\Delta''_1, \Delta''_2, \ldots, \Delta''_n.$$

e quindi il sistema

$$\Delta''_1 + \Delta''_2 + \ldots + \Delta''_n$$

è formato di segmenti a due a due distinti. Poniamo allora

$$H_r = \Delta''_r + \Delta''_{r+1} + \ldots \Delta''_n \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Evidentemente la somma delle lunghezze dei segmenti di H_r è $\geqq$ della somma delle lunghezze dei segmenti di Δ_r [1]) e quindi è $>$ di $\mu_r - \frac{\varepsilon}{2^r}$.

I segmenti di Δ_r'' sono congiunti a Γ_r, e quindi è possibile associare a ciascuno di essi r segmenti puri di (a, b) a due a due distinti. Si ottiene così un sistema ω_r di segmenti di (a, b) a due a due distinti. Se δ è un segmento di Δ_r'' e se (α, β) è uno degli r segmenti puri associati a δ, è evidentemente

$$|f(\beta) - f(\alpha)| = \text{lunghezza di } \delta,$$

e quindi, indicando con l_r la somma delle lunghezze dei segmenti Δ_r'', si ha

$$\sum_{\omega_r} |f(\beta) - f(\alpha)| = r \,.\, l_r,$$

dove il 1° membro indica la sommatoria estesa a tutti i termini $|f(\beta) - f(\alpha)|$ corrispondenti ai vari segmenti di ω_r.

Consegue che

$$\sum_1^n{}_r \sum_{\omega_r} |f(\beta) - f(\alpha)| = \sum_1^n{}_r \, r \,.\, l_r = \sum_1^n{}_r \Big(\sum_r^n{}_i \, l_i\Big).$$

Ma $\sum_r^n{}_i \, l_i$ è uguale alla somma delle lunghezze dei segmenti di H_r, e quindi $>$ di $\mu_r - \frac{\varepsilon}{2^r}$, inoltre

$$\sum_1^n{}_r \sum_{\omega_r} |f(\beta) - f(\alpha)|$$

è $\leqq$ della variazione V di $f(x)$ in (a, b), dunque

$$V > \sum_1^n{}_r \Big(\mu_r - \frac{\varepsilon}{2^r}\Big) > \sum_1^n{}_r \mu_r - \varepsilon,$$

e poichè ε può essere scelto piccolo a piacere,

$$V \geqq \sum_1^n{}_r \mu_r.$$

[1]) Poichè contiene almeno tutti i segmenti di Δ_r'.

Questa limitazione vale qualunque sia l'intero positivo n, dunque se V è finito, la serie $\Sigma_1^\infty{}_r\, \mu_r$ deve essere convergente.

La disuguaglianza precedente ci dice anche che sarà sempre

$$\sum_1^\infty \mu_r \leqq V.$$

É dunque intanto provato che la convergenza di $\Sigma_1^\infty{}_r\, \mu_r$ è necessaria perchè $f(x)$ sia a variazione limitata. Dico ora che essa è anche sufficiente.

Infatti, qualunque sia V (finito od infinito) e qualunque sia il numero reale N finito e $<$ di V, è possibile dividere (a, b) in parti in modo che la somma dei moduli degli incrementi di $f(x)$ relativi a queste parti sia maggiore di N.

Indicando con

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$$

i punti di divisione, e ponendo

$$a_0 = a, \quad a_n = b,$$

si ha

$$\sum_1^n{}_i\, |f(a_i) - f(a_{i-1})| > N.$$

Allora, posto

$$\alpha_i = f(a_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n)$$

si considerino i segmenti

(5) $$(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n)$$

che fanno parte del segmento (c, d) in cui varia la $y = f(x)$. Questi segmenti (5) possono essere distinti od in parte sovrapposti. In generale qualcuno di questi segmenti risulterà diviso dagli estremi degli altri in parti più piccole. Si otterranno così dei segmenti distinti

(6) $$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_t$$

in numero finito, tali che ogni segmento (5) risulterà la somma di alcuni di essi.

Un segmento (6) può appartenere ad uno o più segmenti (5).

Indico con T_r l'insieme dei segmenti (6) che appartengono ad almeno r segmenti (5). Naturalmente T_1 è l'insieme di tutti i segmenti (6).

É evidente poi che la somma τ_r delle lunghezze dei segmenti T_r è $\leqslant \mu_r$ perchè tutti i punti interni dei segmenti di T_r appartengono a Γ_r [1]).

Ma

$$\begin{aligned}\sum_1^n{}_i |f(a_i) - f(a_{i-1})| &= \sum |\alpha_i - \alpha_{i-1}| \\ &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots \\ &\leqslant \sum_1^\infty{}_r \mu_r,\end{aligned}$$

inoltre

$$N < \sum_1^n{}_i |f(a_i) - f(a_{i-1})|,$$

dunque

$$N < \sum_1^\infty{}_r \mu_r.$$

Ciò per qualunque numero reale N minore di V, dunque

$$V \leqslant \sum_1^\infty{}_r \mu_r.$$

Consegue che, se V è infinita, la serie $\sum_1^\infty{}_r \mu_r$ è divergente. Così è provato che, se la serie $\sum_1^\infty{}_r \mu_r$ converge, la $f(x)$ è a variazione limitata.

La limitazione

$$V \leqslant \sum_1^\infty{}_r \mu_r.$$

insieme colla

$$V \geqslant \sum_1^\infty{}_r \mu_r$$

[1]) Infatti un valore interno ad un segmento (6) appartenente ad r segmenti (5) é assunto da $f(x)$ almeno una volta in ciascuno dei corrispondenti segmenti (a_{i-1}, a_i).

precedentemente trovata ci dà poi

$$V = \sum_{1}^{\infty}{}_r \mu_r.$$

13. Indicando con m_r la misura del gruppo G_r e supposto che G_∞ abbia misura nulla si ha per la (2)

$$\mu_r = \sum_{r}^{\infty}{}_i m_i$$

e quindi

$$\sum_{1}^{\infty}{}_r \mu_r = \sum_{1}^{\infty}{}_r r \cdot m_r,$$

e si può concludere che *condizione necessaria e sufficiente perchè la $y = f(x)$ sia a variazione limitata è che G_∞ abbia misura nulla e che la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_r r \cdot m_r$ converga. Quando queste condizioni sono soddisfatte la variazione di $f(x)$ è uguale alla somma della serie $\sum_{1}^{\infty}{}_r \cdot m_r$.*

14. Al N⁰ 12 abbiamo visto che *variazione totale di una funzione continua si potrebbe definire come la somma della serie $\sum_{1}^{\infty}{}_r \mu_r$.*

Però per le funzioni discontinue questa definizione non sarebbe equivalente a quella ordinaria, perchè per esempio la $y = f(x)$ che è 1 nei punti razionali e *zero* negli irrazionali avrebbe con questa nuova definizione variazione nulla, e colla definizione ordinaria variazione infinita. Inoltre per una funzione crescente la variazione secondo la nuova definizione risulterebbe uguale alla antica diminuita del l'ultimo valore della funzione dei salti.

Definendo la variazione totale di una funzione $y = f(x)$ come la somma della serie $\sum_{1}^{\infty}{}_r \mu_r$ non solo quando il campo di variabilità della x è un intervallo, ma anche quando questo campo è un qualunque gruppo misurabile, ecco come potrebbe essere definita la *assoluta continuità* delle funzioni [1]).

Una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo (a, b), si dice

[1]) G. Vitali, *Sulle funzioni integrali*, (Accademia reale delle scienze di Torino. Vol. XL. 1904—05, pp. 1021—1034).

assolutamente continua in (a, b), se è continua in (a, b) e se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero reale μ tale che in ogni sottogruppo misurabile di (a, b) di misura $< \mu$, la variazione totale di $f(x)$ sia $< \varepsilon$.

È ovvio che questa definizione è equivalente a quella ordinaria.

15. Ed ecco come penso che potrebbe essere esteso il concetto di variazione totale al caso di due variabili.

Siano

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y)$$

due funzioni continue in un campo chiuso [1]) H del piano (x, y). Ad ogni punto P di H esse fanno corrispondere un punto Q di un campo chiuso K del piano (X, Y). Diremo che definiscono una funzione Q di P, $Q = f(P)$.

Se si riesce a dimostrare che il gruppo Γ_r dei punti di K che corrispondono ad almeno r punti di H è misurabile [2]), si può assumere come variazione totale di $Q = f(P)$ in K la somma della serie $\sum_1^\infty{}_r\, \mu_r$ dove μ_r indica la misura superficiale di Γ_r.

Può darsi che una tale estensione della nozione di variazione e conseguentemente di assoluta continuità permetta di estendere alla determinazione delle aree delle superficie alcuni eleganti risultati relativi alla rettificazione delle curve [3]), quando nell' esaminare una superficie

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v) \tag{7}$$
$$z = z(u, v),$$

anzichè le singole funzioni si considerino le coppie di funzioni (7), cioè le funzioni

$$P_1 = f_1(P), \quad P_2 = f_2(P), \quad P_3 = f_3(P),$$

dove P indica il punto variabile (u, v) e P_1, P_2, P_3 i corriespondenti punti (y, z), (z, x) ed (x, y).

[1]) Cioè contenente ogni suo punto limite.

[2]) Superficialmente secondo *Lebesgue*.

[3]) Leonida Tonelli. *Sulla rettificazione delle curve.* (Reale Accademia delle scienze di Torino, Anno 1907—08. Vol. XLIII.) *Sulla lunghezza di una curva* (ibidem, Anno 1911—12. Vol. XLVII).

25 Settembre 1925.