Remarque à la Note de M. Banach »Sur une classe de fonctions continues«.

Par

Stanisław Ruziewicz (Lwów).

La présente Note concerne une question traitée par M. Banach dans sa Note „Sur une classe de fonctions continues" (ce volume, p. 166).

Dans cette Note M. Banach démontre qu'une fonction continue satisfaisant aux conditions qu'il appelle (N) et (T_1), ou, ce qui revient au même, à la condition (S), a une dérivée dans un ensemble de mesure positive.

Je donnerai ici un exemple d'une fonction continue satisfaisant aux conditions (N) et (T_1) qui ne possède pas de dérivée dans un ensemble de mesure positive. Cet exemple prouve que le théorème de M. Banach n'est pas susceptible d'une extension dans un certain sens (puisque d'une considération très facile il résulte, que la dérivée n'existe pas nécessairement dans une épaisseur pleine).

Déterminons une suite infinie de nombres positifs δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ de sorte qu'il subsiste l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\delta_n < 1, \tag{I}$$

et une suite infinie h_n $(n = 1, 2, \ldots)$ de nombres positifs tendant vers 0 et telle que

$$\lim_{n=\infty} 2^n h_n = \infty \tag{II}$$

Déterminons dans l'intervalle $(0, 1)$ un intervalle concentrique de longueur δ_1 et construisons sur lui, comme base, un triangle équilatéral de l'hauteur h_1. Dans les parties restantes de l'intervalle $(0, 1)$ (c'est-à-dire dans les intervalles $(0, (1-\delta_1)/2)$ et $((1+\delta_1)/2, 1)$ déterminons des intervalles concentriques de longueur δ_2 et construisons sur eux, comme bases, des triangles équilatéraux de l'hauteur h_2. Procédons ainsi de suite in infinitum, en construisant toujours sur les intervalles de longueur δ_n (dont le nombre est 2^{n-1}) comme bases des triangles équilatéraux de l'hauteur h_n.

Les côtés de nos triangles nous donnent l'image d'une fonction $f(x)$, définie dans un ensemble des intervalles, dense dans $(0, 1)$. En posant pour tous les autres points x de $(0, 1)$ $f(x)=0$, nous obtiendrons une fonction continue, définie dans $(0, 1)$, satisfaisant, comme on le voit sans peine, aux conditions (N) et (T_1). Notre fonction s'annule dans un ensemble parfait non dense P de mesure

$$|P|=1-\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\delta_n,$$

donc positive, d'après (I).

Je dis que $f(x)$ ne possède de dérivée dans aucun point $\xi \varepsilon P$.

En effet, parmi les 2^{n-1} intervalles de longueur δ_n il existe, d'après la construction de l'ensemble P, un et un seul dont le centre est le plus proche de ξ. En désignant par x_n l'abscisse de ce centre, nous avons, comme on voit sans peine, l'inégalité

$$0<|\xi-x_n|\leqslant\frac{1-\delta_1-2\delta_2-\ldots-2^{n-2}\delta_{n-1}}{2^n}<\frac{1}{2^n},$$

d'où, d'après $f(x_n)=h_n$ et $f(\xi)=0$:

$$\left|\frac{f(\xi)-f(x_n)}{\xi-x_n}\right|>2^n h_n,$$

ce qui croit indéfiniment pour $n\to\infty$, d'après (II) D'autre part ξ est un point d'accumulation des intervalles contigus à P. En désignant par x_n' l'abscisse de l'extremité d'un des intervalles δ_n la plus proche de ξ, nous aurons $x_n'\neq\xi$, $x_n'\to\xi$ pour $n\to\infty$ et

$$\frac{f(\xi)-f(x_n')}{\xi-x_n'}=0 \quad (\text{pour } n=1,2,\ldots),$$

ce qui prouve que $f(x)$ ne possède pas au point ξ une dérivée ni finie ni infinie.