Sur une classe de fonctions continues.

Par

Stefan Banach (Lwów).

Introduction.

Le but de cette Note est d'établir quelques relations qui subsistent entre certaines classes de fonctions continues.

Précisons d'abord les notations.

E désignant un ensemble, $|E|$ désigne sa mesure extérieure.

$y = f(x)$ étant une fonction continue dans un intervalle (a, b) et E désignant un ensemble quelconque situé dans cet intervalle, E_y désigne l'ensemble de valeurs de $f(x)$ pour $x \varepsilon E$.

On dit, d'après M. Lusin [1]), que $f(x)$ vérifie dans (a, b) la condition (N), lorsque $|E| = 0$ implique toujours $|E_y| = 0$.

Je prouve dans ce travail que toute fonction continue satisfaisant à la condition (N) admet la dérivée unique et finie dans un ensemble de points de mesure positive. Or, M. Ruziewicz a montré que cet ensemble n'est pas nécessairement d'éppaisseur pleine: en effet, il a construit une fonction continue vérifiant la condition (N) et n'admettant pas de dérivée dans un ensemble de mesure non-nulle [2]).

Nous dirons qu'une fonction $y = f(x)$ continue dans (a, b) satisfait à la condition (S), lorsque à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\eta > 0$ de manière que $|E| < \eta$ entraîne $|E_y| < \varepsilon$.

[1]) *L'integrale et série trigonométrique*, (en russe). Moscou, 1915. p. 109. La même propriété a été traîtée par M. Rademacher qui a prouvé (*Monatsh. f. Math.* 27, (1916), 183) que la condition (N) est nécessaire et suffisante pour que la mesurabilité de E entraîne toujours celle de E_y.

[2]) *voir* ce volume, p, 173.

On voit de suite que la propriété (S) implique la propriété (N). La question réciproque ne paraît pas être resolue. L'exemple cité de M. Ruziewicz prouve de même qu'il y a de fonctions continues satisfaisant à la condition (S) et n'admettant pas de dérivée dans un ensemble de points de mesure positive.

Soit maintenant A_1, respectivement A_2, l'ensemble de valeurs que la fonction $y=f(x)$ admet une infinité resp. une infinité non dénombrable de fois dans l'intervalle (a, b). Nous dirons qu'elle jouit de la propriété (T_1), respectivement (T_2) lorsque $|A_1|=0$, resp. $|A_2|=0$.

Je prouve que $f(x)$ étant continue dans (a, b), l'ensemble de conditions (N) et (T_1) est équivalent à la condition (S) et que la condition (N) entraîne la propriété (T_2).

On peut remarquer encore que toute fonction *à variation bornée* jouit des propriétés (T_1) et (T_2) [1], mais ne vérifie pas, en général, la condition (N) et, à plus forte raison, (S). Inversement, toute fonction *absolument continue* satisfait évidemment à la condition (S), donc aussi à tous les autres conditions ici considérées.

Nous commencerons par prouver un théorème du à M. Mazurkiewicz.

Théorème 1 [2]. *$f(x)$ étant une fonction continue dans un intervalle (a, b) et H désignant un ensemble F_σ situé dans cet intervalle, l'ensemble H^* de points $x \varepsilon H$, tels que*

$$f(x') \neq f(x), \quad \text{pour } x' \varepsilon H,\ x' < x,$$

est un ensemble $F_{\sigma\varrho}$ [3].

Démonstration: H étant un F_σ, on peut le mettre sous la forme:

$$H=\sum_{n=1}^{\infty} F_n,$$

$\{F_n\}$ désignant une suite d'ensembles fermés non-décroissants.

[1]) *voir* mon travail: *Sur les lignes réctifiables etc. Fund. Math.* 1925. vol. VII. p. 229.

[2]) ce théorème n'a pas été publié; il m'a été communiqué obligeamment par M. Mazurkiewicz.

[3]) on appelle F_σ tout ensemble — somme d'une suite infinie d'ensembles fermés (Hausdorff); $F_{\sigma\varrho}$ désigne tout ensemble qui est une différence de deux en-

Soit $P_n\,(n=1,2,\ldots)$ l'ensemble de points $x\,\varepsilon\,F_n$ tels que, pour chacun d'eux, il y a des points x' vérifiant les relations:

$$x'\,\varepsilon\,P_n, \quad x' \leqslant x - \frac{1}{n}, \quad f(x') = f(x).$$

$f(x)$ étant continue et F_n fermés, on voit de suite que les ensembles P_n ainsi déterminés sont aussi fermés; or, d'autre part:

$$H^* = H - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n,$$

ce qui revient à notre énoncé.

Théorème 2. *$f(x)$ étant une fonction continue dans un intervalle (a, b) et E désignant un ensemble quelconque situé dans cet intervalle, il existe toujours un ensemble A_E vérifiant les conditions suivantes:*

1°. *A_E est mesurable,*

2°. *$A_E \subset E$,*

3°. *$(A_E)_y = E_y$,*

4°. *$x_1, x_2\,\varepsilon\,A_E$ et $x_1 \neq x_2$ impliquent: $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

D é m o n s t r a t i o n: On peut mettre E sous la forme:

$$E = H + R,$$

H étant un ensemble F_σ et R étant de mesure nulle. D'après le théorème de M. M a z u r k i e w i c z il existe un ensemble $H^* = A_H$ qui vérifie relativement à H tous les conditions de la proposition précédente, donc, à plus forte raison, du théorème à prouver. On voit, d'autre part, que R contient un sous ensemble R_E satisfaisant, par rapport à R, aux conditions (1°, 2°, 3°, 4°). Supprimons de R_E les points où la fonction $f(x)$ admet des valeurs contenues déjà dans H_y, et désignons par S l'ensemble de points restant. L'ensemble

$$A_E = H^* + S$$

vérifie évidemment les conditions de notre théorème.

Remarque 1. Dans ce qui suit nous aurons besoin du théorème suivant qui résulte immédiatement des théorèmes démontrés par

---

sembles F_σ. Remarquons que, dans le cas où H est un ensemble fermé, H^* est un ensemble G_δ (ensemble produit d'une suite infinie d'ensembles ouverts).

M. Saks [1]). Si E est l'ensemble dans lequel une fonction $f(x)$, définie dans (a, b) a en tout point tous les quatre dérivés du même signe, il existe presque dans tous les points de E une dérivée finie.

Théorème 3. *Si une fonction continue $f(x)$, définie dans un intervalle (fermé) (a, b) satisfait à la condition (N) [2]), alors*

1) *$f(x)$ jouit de la propriété (T_2),*

2) *$f(x)$ a dans un ensemble de mesure positive une dérivée finie.*

Démonstration. Faisons correspondre à tout ensemble mesurable E contenu dans (a, b) un ensemble A_E satisfaisant aux conditions du théorème 2. Or, faisons correspondre à tout nombre ordinal ξ de la première ou de la deuxième classe un ensemble mesurable M_ξ comme il suit:

$$a)\ M_1 = A_\delta \qquad (\delta \text{ désigne l'intervalle } (a, b))$$

$$b)\ \text{pour } \xi > 1: \quad M_\xi = A_E, \quad \text{où } E = \delta - \sum_{\xi' < \xi} M_{\xi'}$$

(si E était un ensemble vide, M_ξ serait aussi vide).

On démontre sans peine par l'induction transfinie qu'une telle correspondance est possible.

Les ensembles M_ξ étant mesurables, disjoints, en quantité non dénombrable, il existe nécessairement un nombre ordinal ξ_0, tel que $|M_{\xi_0}| = 0$. La fonction $f(x)$ jouissant, d'après l'hypothèse, de la condition (N); nous en concluons que

$$(1) \qquad |(M_{\xi_0})_y| = 0.$$

Si, maintenant, l'ensemble A_2 (c'est-à-dire l'ensemble de valeurs que notre fonction prend une infinité non dénombrable de fois) est non vide, nous avons, pour tout $\xi < \Omega$, $(M_\xi)_y \supset A_2$, donc aussi $(M_{\xi_0})_y \supset A_2$, ce qui prouve, d'après (1), que $|A_2| = 0$.

La première partie de notre théorème est ainsi démontré. Pour prouver la seconde, désignons par B l'ensemble de valeurs de $f(x)$

[1]) *Fund. Math.* t. V, p. 98—104. Ce sont les théorèmes 1 (p. 102) et 3, (p. 104), Pour en déduire notre théorème, il suffit de remarquer, qu'en désignant par E_1 la partie de l'ensemble, où les nombres dérivés sont $\geqslant 0$, les dérivés inférieures gauche et droite seront en tout point de E_1 distinctes de $-\infty$, d'où résulte que les nombres dérivés opposés sont dans E_1 presque partout égaux et finis, et parsuite il existe presque partout dans E_1. la dérivée. Le même peut être démontré pour le complémentaire de E_1 par rapport à E, d'où résulte notre théorème.

[2]) Quant aux définitions des conditions (N), (S), (T_1), (T_2) — voir l'introduction.

n'appartenant pas à A_2. Nous aurons donc $B = \delta_u - A_2$ et, d'après $|A_2| = 0$:

$$(2) \qquad |B| = |\delta_u| > 0.$$

Toute valeur z de l'ensemble B la fonction $f(x)$ prend dans un ensemble fermé $C(z)$ au plus dénombrable, donc dans un ensemble possédant des points isolés. Désignons par $D(z)$ l'ensemble de tous les points isolés de l'ensemble $C(z)$. Posons $D = \sum_z D(z)$, la sommation s'étendant à tous les points z de l'ensemble B. Il est évident qu'aucun des ensembles $D(z)$ n'est vide, donc $D_y = B$. Donc, de (3) et de l'hypothèse que $f(x)$ satisfait à la condition (N) résulte que l'ensemble D ne peut être de mesure nulle. Supprimons dans D tous les points dans lesquels $f(x)$ atteint son maximum ou son minimum propre. Soit E l'ensemble qui restera. L'ensemble E diffère de D dans un ensemble au plus dénombrable de points [1]): donc E n'est pas de mesure nulle. De la définition de l'ensemble E résulte que pour tout point x de E existe un nombre positif ε_x, tel que les inégalités $0 < h < \varepsilon_x$, $0 < k < \varepsilon_x$ entraînent

$$[f(x+h) - f(x)]\,[f(x-k) - f(x)] < 0,$$

ce qui prouve que les nombres dérivés au point x ont même signe, donc, d'après la remarque 1, $f(x)$ a en presque tous les points de E une dérivée finie. Or, l'ensemble de tous les points où la fonction continue $f(x)$ a une dérivée étant mesurable et contenant E, et l'ensemble E n'étant pas de mesure nulle, nous concluons que l'ensemble de points où $f(x)$ a une dérivée finie est de mesure positive, c. q. f. d.

Il se pose maintenant le problème si dans le théorème 3 l'assertion 2) peut être remplacée par celle-ci: „$f(x)$ a une dérivée dans une épaisseur pleine". C'est M. S. Ruziewicz qui a montré que le théorème généralisé ainsi n'est pas vrai.

Théorème 4. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $f(x)$, définie dans un intervalle (fermé) (a, b) jouisse de la propriété (S) est qu'elle jouisse des propriétés (N) et (T_1).*

[1]) Voir p. e. W. Sierpiński *Analiza* t. I, 4me partie, p. 218, th. 218, (Varsovie 1925, en polonais); aussi A. Schoenflies: *Die Entw. d. Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* (Jahresb d. deutsch. Math.-Verein. Bd. VIII, 2) p. 158. (La condition de M. Schoenflies que la fonction soit continue, n'est pas nécessaire, comme l'a montré M. Sierpiński).

D é m o n s t r a t i o n.

La nécessité. Soit $f(x)$ une fonction jouissant de la propriété (S). En conservant la notation utilisée dans la démonstration du théorème 3, nous aurons, comme on voit sans peine, pour tout indice ξ fini:

(3) $$(M_\xi)_y \supset A_1.$$

Les ensembles M_ξ étant mesurables et disjoints, contenus dans l'intervalle fini (a, b), nous avons

$$\lim_{\xi=\infty} |M_\xi| = 0,$$

d'où, d'après l'hypothèse que $f(x)$ jouit de la propriété (S):

$$\lim_{\xi=\infty} |(M_\xi)_y| = 0,$$

donc, d'après (3), $|A_1| = 0$, ce qui prouve que $f(x)$ jouit de la propriété (T_1).

Or, il est évident que la propriété (S) entraîne la propriété (N). La nécessité de notre condition est donc démontrée.

La suffisance. Supposons que la fonction $f(x)$ jouit des propriétés (N) et (T_2) et admettons qu'elle ne jouit pas de la propriété (S). Il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ et une suite infinie d'ensembles $\{E_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ vérifiant les conditions suivantes:

1) La somme $|E_1| + |E_2| + |E_3| + \ldots$ est finie.

2) $|(E_i)_y| \geqslant \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Posons

$$E = \overline{\lim}\, E_i$$

(en désignant par $\overline{\lim}$ l'ensemble-limite complet de la suite $E_1, E_2, \ldots$). Il est clair que, d'après 1):

(4) $$|E| = 0$$

(ou bien E est vide). Posons

(5) $$E^* = \overline{\lim}\, (E_i)_y\,;$$

d'après 2) nous avons

(6) $$|E^*| \geqslant \varepsilon > 0.$$

Je dis que $E_y \supset E^* - A_1$. En effet, si $z \,\varepsilon\, (E^* - A_1)$, l'ensemble $C(z)$ des points de (a, b) en lesquels $f(x)$ prend la valeur z est fini. Or, de $z \,\varepsilon\, E^*$ résulte, d'après (5), que z appartient à une infinité des ensembles $(E_i)_y$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$; par conséquent une infinité d'ensembles E_i $(i = 1, 2, \dots)$ contient des points de $C(z)$: l'ensemble $C(z)$ étant fini, il en résulte l'existence d'un nombre x de $C(z)$ qui appartient a une infinité des ensembles E_i $(i = 1, 2, \dots)$, et parsuite appartient à E. Donc $z \varepsilon E_y$, c. q. f. d.

Or, de $E_y \supset E^* - A_1$ résulte que $E^* \subset E_y + A_1$. La fonction $f(x)$ jouissant de la propriété (T_1), nous avons $|A_1| = 0$; la fonction $f(x)$ satisfaisant à la condition (N), nous trouvons, d'après (4): $|E_y| = 0$. La formule $E^* \subset E_y + A_1$ donne donc $|E^*| = 0$, ce qui est incompatible avec (6).

La fonction $f(x)$ jouit donc de la propriété (S) et notre théorème est démontré.

Lwów, Février 1924,