We do not know whether either (b) or (c) can be extended to larger n — that is whether for any $n>1$ and all monotone Φ,

$$(17)\quad \begin{array}{l} \Phi \text{ is weakly } R_n \to \Phi \text{ is } R^0_{n+1}, \text{ or} \\ \Phi \text{ is weakly } R_n \to \Phi \text{ is } R_n. \end{array}$$

Either would suffice to extend (15) to such n, since either would imply that if Φ is weakly R_n, the f defined from Φ in the proof of Theorem 5 is partial recursive in $r^{\#}_n$.

References

[Ac] P. Aczel, *Representability in some systems of second order arithmetic*, Israel J. Math. 8 (1970), pp. 309–328.

[Am 1] V. I. Amstislavskiĭ, *Effective R-sets and transfinite extensions of recursive hierarchies* (Russian), Fund. Math. 68 (1970), pp. 61–86. English summary in Soviet Math. Dokl. 9 (1968), pp. 703–706.

[Am 2] — *On the decomposition of a field of sets obtained by an R-operation over recursive sets* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 191 (1970), pp. 743–746. English translation in Soviet Math. Dokl. 11 (1970), pp. 419–422.

[En] H. B. Enderton, *Hierarchies in recursive function theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1964), pp. 457–471.

[Hi 1] P. G. Hinman, *Hierarchies of effective descriptive set theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969), pp. 111–140.

[Hi 2] Review of [Am 2], Jour. Symb. Log. 37 (1972), pp. 409–410.

[Kl] S. C. Kleene, *On the forms of predicates in the theory of constructive ordinals* (second paper), Amer. Jour. Math. 77 (1955), pp. 405–428.

[Kr–Ro] D. Kreider and H. Rogers, Jr., *Constructive versions of ordinal number classes*, Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961), pp. 325–369.

UNIVERSITY OF MICHIGAN
Ann Arbor, Michigan

Reçu par la Rédaction le 10. 5. 1971

Ordres "C.A.C."

par

B. Leclerc et **B. Monjardet** (Paris)

Résumé. Les ordres "C.A.C." (chain-antichain complete) ont été définis par Grillet dans [5]; ce sont les ordres où toute partie libre maximale rencontre toute chaine maximale; on peut aussi énoncer cette propriété en termes d'hypergraphe ([2]): l'hypergraphe défini par les chaines maximales d'un ordre "C.A.C." appartient à la classe des hypergraphes dont l'ensemble des transversales fortement stables égale l'ensemble des parties fortement stables maximales. Ici, nous développons l'étude des ordres "C.A.C.", dans le cas fini.

Au premier paragraphe, nous en donnons une caractérisation du type Kuratowski (théorème 1). Au paragraphe 2, nous caractérisons les ordres gradués C.A.C. et nous donnons quelques résultats sur leur dimension. Au troisième paragraphe, nous étudions les treillis C.A.C., nous caractérisons ces treillis et les treillis gradués C.A.C.; nous donnons plusieurs caractérisations des treillis modulaires C.A.C. (théorème 2); on déduit immédiatement de ces résultats que ces ordres sont de dimension deux.

0. Définitions et notations. Nous considérons un ensemble E ordonné; la *relation d'ordre* sur E sera notée O ou $\leqslant$; nous noterons $x\,O\,y$ ou $x\leqslant y$; la *relation de couverture associée à l'ordre* sera notée $\prec$: $x \prec y$ s'il n'existe pas z tel que $x<y<z$; la *relation d'incomparabilité associée à l'ordre* sera notée I: $x\,I\,y$ si $x \nleqslant y$ et $y \nleqslant x$; x est comparable à y si $x\leqslant y$ ou $y\leqslant x$.

Une *partie libre* L de l'ensemble ordonné $(E,\leqslant)$ est une partie de E dont les éléments sont deux à deux incomparables (on dit aussi *partie indépendante*, *sous-ensemble stable intérieurement*, *antichaine*); une *chaine de l'ensemble ordonné* est une partie de E dont les éléments sont deux à deux comparables (c'est à dire un *sous-ensemble totalement ordonné*). Nous notons $\mathcal{L}$ *l'ensemble des parties libres*, $\mathcal{L}^m$ *l'ensemble des parties libres maximales*; nous notons $\mathcal{C}$ *l'ensemble des chaines*, $\mathcal{C}^m$ *l'ensemble des chaines maximales*.

La *dimension* (au sens de Dushnik–Miller) *d'un ordre O* est le nombre minimum d'ordres totaux dont O est intersection; nous la notons $\dim(O)$ ([4] ou [1] chapitre VI).

Un *hypergraphe* (*simple*) $H=(E,\mathcal{A})$ est le couple formé d'un ensemble fini E et d'un ensemble de parties non vides de E appelées arêtes: $\mathcal{A}=\{A_i,\ i\in I\}$; une *transversale de H* est une partie de E rencontrant toutes les arêtes; une *partie fortement stable de* H est une partie de E ayant au plus un élément commun avec toute arête; une *transversale fortement stable de* H est donc une partie B de E telle que $|B \cap A_i| = 1$, pour tout $i \in I$. On montre aisément que les transversales fortement stables de H sont les parties de E qui sont à la fois transversales minimales et fortement stables maximales; par contre, une *transversale minimale* (ou une *partie fortement stable maximale*) n'est pas en général une transversale fortement stable. A l'ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ nous associons l'hypergraphe $H_1 = (E, \mathcal{E}^m)$ de ses chaines maximales; les parties fortement stables de H_1 sont les parties libres de $(E, \leqslant)$; l'ensemble $\mathcal{L}^0$ des transversales fortement stables de H_1 est donc contenu dans l'ensemble $\mathcal{L}^m$ des parties libres maximales de $(E, \leqslant)$; on dit que *l'ensemble ordonné est* C.A.C. (*chain-antichain complete*) si $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}^m$; il revient au même de dire que l'ensemble $\mathcal{E}^0$ des transversales fortement stables de l'hypergraphe $H_2 = (E, \mathcal{L}^m)$ égale l'ensemble $\mathcal{E}^m$ des parties fortement stables maximales de H_2 ou encore que toute chaine maximale rencontre toute partie libre maximale ([5]).

1. Caractérisation des ordres finis C.A.C. Dans [5], Grillet a montré qu'un ordre est C.A.C. si et seulement si il ne contient pas de sous-ordre du type N': un tel sous-ordre est composé de quatre éléments a, b, c, d, avec $a < b$, $c \lesssim b$, $c < d$, $a\, I\, c$, $a\, I\, d$, $b\, I\, d$.

En fait, on peut améliorer cette caractérisation en donnant une caractérisation du type Kuratowski des ordres C.A.C. Le plus petit ordre

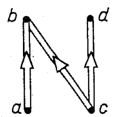

Fig. 1

non C.A.C. est l'ordre à quatre éléments, noté N_4, et représenté figure 1 (les deux traits parallèles représentent la relation de couverture).

$$N_4 \text{ est un } N' \text{ avec } a \lesssim b \text{ et } c \lesssim d\,.$$

Le Théorème suivant donne la caractérisation du type Kuratowski des ordres C.A.C.; nous en donnons une démonstration directe.

THEOREME 1. *Un ordre fini est* C.A.C. *si et seulement si il ne contient pas comme sous-ordre le plus petit ordre non* C.A.C. (*ordre* N_4) (*).

Condition nécessaire. Soit un ordre C.A.C. admettant un N_4 comme sous-ordre, soient a, b, c, d, les éléments de ce N_4 (fig. 1); soient L

(*) Ce résultat reste valable dans le cas des ordres infinis mais "réguliers" tels qu'ils sont définis par Grillet dans [5].

une partie libre maximale contenant $\{a, d\}$, C une chaine maximale contenant $\{b, c\}$; on vérifie aisément que C et L ont une intersection vide, d'où la contradiction.

Condition suffisante. Soit un ordre n'admettant pas de N_4 comme sous-ordre; supposons cet ordre non C.A.C.; il existe donc L partie libre maximale et C chaine maximale telles que l'intersection de L et C soit vide.

La chaine C a n éléments: $x_1 \lesssim x_2 \lesssim \ldots x_i \ldots \lesssim x_n$.

Soit x_i un élément quelconque de cette chaine; il existe y_i élément de L tel que x_i comparable à y_i (sinon L non maximale). On va montrer qu'on a pour tout i, $x_i < y_i$ donc qu'on a $x_n < y_n$ ce qui contredit la maximalité de C. On raisonne par récurrence.

On a $x_1 < y_1$ (sinon C non maximale).

Supposons $x_k < y_k$, et considérons les éléments x_{k+1} et y_{k+1}.

Si $y_{k+1} = y_k$ on a $x_{k+1} < y_k$ (sinon C non maximale).

Si $y_{k+1} \neq y_k$ avec $y_{k+1} < x_{k+1}$, considérons les quatre éléments x_k, y'_k, y'_{k+1}, x_{k+1}, avec $x_k \lesssim y'_k$ dans la chaine de x_k à y_k et $y'_{k+1} \lesssim x_{k+1}$ dans la chaine de y_{k+1} à x_{k+1}.

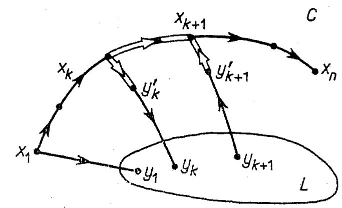

Fig. 2

On ne peut avoir $x_k < y'_{k+1}$ ou $y'_k < y'_{k+1}$ ou $y'_k < x_{k+1}$ (sinon C n'est pas maximale); on ne peut avoir $y'_{k+1} < x_k$ ou $y'_{k+1} < y'_k$ ou $x_{k+1} < y'_k$ (sinon L n'est pas libre). Donc les quatre éléments x_k, y'_k, y'_{k+1}, x_{k+1} forment un N_4, ce qui est impossible. Donc $x_{k+1} < y_{k+1}$ ce qui démontre la récurrence et le théorème.

COROLLAIRE. *Un ordre est* C.A.C. *si et seulement si pour tout quadruplet* a, b, c, d, *d'éléments de* E,

$$a \lesssim b,\ c \lesssim b,\ c \lesssim d \Rightarrow a = c \text{ ou } b = d \text{ ou } a \lesssim d\,.$$

Cette condition entraine évidemment l'inexistence de N_4.

Inversement soit un ordre ne comptant pas de N_4 (donc C.A.C.); soient quatre éléments a, b, c, d, avec $a \lesssim b$, $c \lesssim b$, $c \lesssim d$. Supposons a différent de c, b différent de d, a non couvert par d.

On ne peut avoir a comparable à c, b comparable à d, d inférieur à a (sinon on contredit une relation de couverture).

Si a incomparable à d, a, b, c, d, forment un N_4 ce qui est impossible; si a inférieur à d, soit e l'élément couvert par d dans la chaine entre a et d; on vérifie aisément que les 4 éléments b, c, d, e, forment un N_4 ce qui est impossible. Donc on aura bien soit $a = c$, soit $b = d$, soit $a \prec d$, et le corollaire est démontré.

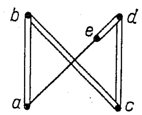

Fig. 3

2. Caractérisation des ordres gradués C.A.C.; **dimension.** Un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ est *gradué* si et seulement si il existe une application r de cet ensemble dans l'ensemble ordonné des entiers, conservant la relation de couverture

$$x \prec y \Rightarrow r(x) \prec r(y) .$$

L'application r est appelée une *graduation* ou une *fonction de rang*. L'équivalence quotient de l'application r a pour classes les "niveaux" de l'ensemble E, c'est à dire les éléments de rang k:

$$N_k = \{x \in E:\ r(x) = k\} .$$

On pose r (élément minimal de $E) = 0$.

Le *rang* $r(E)$ *de l'ensemble ordonné gradué* E est par définition le rang d'un élément maximal de E, c'est à dire la longueur d'une chaine maximale de E.

On appelle *ordres bipartites* les ordres gradués de rang 1, c'est à dire les ordres où l'ensemble E est partitionné en deux sous-ensembles A et B avec $x < y$ implique $x \in A$, $y \in B$; nous notons $K_{n,m}$ un *ordre bipartite "complet"* c'est à dire un ordre où $|A| = n$, $|B| = m$ et où $x \in A$, $y \in B$ implique $x < y$ (l'ordre $K_{1,0}$ ou $K_{0,1}$ est l'ordre réduit à un élément).

Si O est une ordre gradué, nous notons $O_{k,h}$ la restriction de cet ordre aux deux niveaux N_k et N_h.

Proposition 1. *Un ordre gradué est* C.A.C. *si et seulement si tout ordre $O_{k,k+1}$ (restriction à deux niveaux consécutifs N_k et N_{k+1} de cet ordre) est une réunion disjointe (au sens des sommets) d'ordres bipartites complets $K_{n,m}$.*

Soit O un ordre gradué C.A.C.; les ordres $O_{k,k+1}$ restrictions à deux niveaux consécutifs de O sont C.A.C. (sinon O contiendrait un N_4); un tel ordre $O_{k,k+1}$ est un ordre bipartite C.A.C.; il est réunion de ses composantes connexes; et un ordre bipartite C.A.C. connexe est complet (d'après le corollaire du théorème 1). Réciproquement si un ordre gradué est tel que les restrictions $O_{k,k+1}$ sont des réunions disjointes d'ordres bipartites complets $K_{m,n}$, cet ordre ne contient pas de N_4, donc est C.A.C.

La structure des ordres gradués C.A.C. est donc déterminée; ceci ne suffit pas cependant à calculer leur dimension (au sens de Dushnik–Miller). Nous donnons ci-dessous quelques résultats, valables pour les ordres gradués quelconques et qui permettent de ramener le problème de leur dimension à celui d'une classe particulière d'ordres gradués. Rappelons d'abord que d'après un résultat de Ducamp [3], il suffit de considérer les ordres gradués connexes. Nous utiliserons un autre résultat de Ducamp et le lemme suivant:

Lemme. *Soient (E, O) un ensemble ordonné, I la relation d'incomparabilité associée à O; les composantes fortement connexes du graphe $G = (E, O \cup I)$ sont les composantes connexes du graphe d'incomparabilité (E, I).*

Si deux sommets sont reliés par une chaine dans le graphe d'incomparabilité, ils sont sur un même circuit du graphe G. Il faut montrer la réciproque; soient donc x et y appartenant à un circuit du graphe G et supposons qu'il n'existe pas de chaine entre x et y dans le graphe d'incomparabilité.

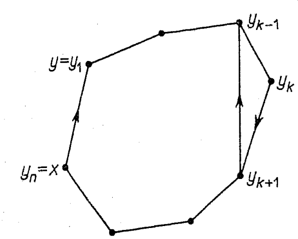

Fig. 4

On a donc, par exemple, $x\,O\,y$. Dans ce cas, les hypothèses impliquent qu'il existe dans le graphe G au moins un chemin de y à x, ce chemin comportant au moins un arc de O. On considère le chemin de longueur minimum vérifiant ces conditions:

$$y = y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n = x .$$

Soit (y_k, y_{k+1}) le premier arc de O dans ce chemin. Considérons les sommets y_{k-1} et y_{k+1}: $y_{k-1}\,O\,y_{k+1}$ et $y_{k-1}\,I\,y_{k+1}$ sont impossibles d'après l'hypothèse de minimalité; on a donc $y_{k+1}\,O\,y_{k-1}$, ce qui entraine $y_k\,O\,y_{k-1}$, donc une contradiction. Le lemme est donc démontré.

Proposition 2. *Soit (E, O) un ensemble ordonné, soient $C_1, \ldots, C_i, \ldots \ldots, C_p$ les ordres restrictions de O aux composantes connexes du graphe (E, I). On a*

$$\dim(O) = \max_i \{\dim(C_i)\} .$$

Ceci est la reformulation à l'aide du lemme d'un résultat de Ducamp [3].

La proposition précédente montre que l'étude de la dimension des ordres gradués connexes se ramène à celle de ceux dont la relation d'incomparabilité est connexe; dans le cas trivial où un tel ordre est de rang O, il est réduit à un élément et est donc de dimension un; sinon il est tel que les ordres bipartites restrictions de deux de ses niveaux consécutifs ne soient pas complets; en particulier dans le cas des ordres de rang un (à deux niveaux), on est amené à étudier la dimension des ordres bipartites non complets; la dimension de ces ordres est comprise entre deux et le nombre d'éléments de rang zéro, mais elle n'a été déterminée exactement que dans quelques cas.

Considérons maintenant le cas des ordres gradués C.A.C. connexes. Nous distinguons deux cas suivant que la relation d'incomparabilité est connexe ou non. Dans le premier cas, on a des ordres gradués dont les ordres bipartites restrictions de deux niveaux consécutifs sont réunion (disjointe) d'au moins deux ordres bipartites complets $K_{n,m}$; la figure 5 montre deux exemples de tels ordres.

Le premier est de dimension 2, le second de dimension 3.

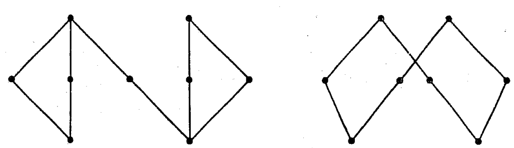

Fig. 5

Si l'ordre gradué est, de plus, de rang un (deux niveaux), il est réunion d'ordres bipartites complets de dimension deux et il est donc de dimension deux.

Si la relation d'incomparabilité I n'est pas connexe, on considère les ordres restrictions aux composantes connexes de I; les composantes connexes de I sont des réunions de niveaux de l'ensemble ordonné gradué. Un cas particulier intéressant est celui où les composantes connexes de I sont les niveaux de l'ordre, ce qui signifie que tous les ordres restrictions de deux niveaux sont complets; on obtient ainsi la classe des "ordres associés aux préordres totaux"; ces ordres sont évidemment de dimension 2 ou 1 (pour les ordres totaux). La proposition suivante en donne plusieurs caractérisations.

Pour cette proposition, nous utilisons les notations suivantes:
O est une relation d'ordre strict sur l'ensemble E.
O^* est la relation complémentaire dans E de O $\big((x, y) \in O^* \Leftrightarrow (x, y) \notin O\big)$.
$\bar{O}$ est la relation réciproque de O $\big((x, y) \in \bar{O} \Leftrightarrow (y, x) \in O\big)$.
$O^d = \overline{O^*} = \bar{O}^*$ est la relation duale de O $\big((x, y) \in O^d \Leftrightarrow (y, x) \notin O\big)$.
$I = O^* \cap O^d$ est la relation d'incomparabilité associée à l'ordre O.
Remarquons que O étant une relation antisymétrique on a

$$\bar{O} \subset O^* .$$

Proposition 3. *Soit O un ordre strict sur E.*
Les propriétés suivantes sont équivalentes:
1. *$P = O^d$ est une relation de préordre total sur E.*
2. *La relation d'incomparabilité associée à O, $I = O^* \cap O^d$ est une relation d'équivalence.*
3. *Il existe une relation de préordre total P telle que $P = O + S$, S étant une équivalence (disjointe de O).*
4. *L'ensemble $\mathcal{E}$ des chaines de l'ordre O est l'ensemble des parties libres d'un matroide sur E.*
5. *Pour tout x, y, z de E, $(x, y) \in O$ implique $x I z$ et $z I y$ incompatibles.*

Démonstration.

$1 \Rightarrow 2$. P étant un préordre, $P \cap \bar{P}$ est une relation d'équivalence notée S; si $P = O^d$ on a $\bar{P} = O^*$ et $S = O^d \cap O^* = I$.

$2 \Rightarrow 3$. Par hypothèse I est une relation d'équivalence disjointe de O; on pose $P = O + I$; on a donc $P^* = O^* \cap (O \cup \bar{O}) = O^* \cap \bar{O} = \bar{O}$. P est réflexive; elle est transitive car si, par exemple, $(x, y) \in O$, $(y, z) \in I$ et $(x, z) \notin P$, on a $(x, z) \in \bar{O}$, $(z, x) \in O$, donc $(z, y) \in O$, et il y a contradiction. De plus $(x, y) \in P^*$ implique $(y, x) \in P$; donc P est un préordre total.

$3 \Rightarrow 4$. Pour montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des chaines de O constitue l'ensemble des parties libres (ou ensembles indépendants) d'un matroide sur E, on doit vérifier trois axiomes (cf. [2], chapitre 21).

Pour tout x de E, $\{x\} \in \mathcal{E}$; vérifié par convention.

Pour tout C de $\mathcal{E}$, $C' \subset C \Rightarrow C' \in \mathcal{E}$: évident.

Pour tout $A \subset E$, les chaines maximales de l'ordre O_A restreint à A ont même cardinal ($O_A = O \cap A^2$).

Or soit P le préordre total $O + S$; la restriction P_A de P à l'ensemble A est un préordre total sur A dont l'ordre associé est O_A et dont l'équivalence associée est S_A; si cette équivalence a k classes, toutes les chaines de O_A ont pour cardinal k.

$4 \Rightarrow 5$. Soient x, y, z éléments de E avec $(x, y) \in O$; considérons l'ordre restreint à $A = \{x, y, z\}$; ses chaines maximales devant avoir même cardinal, le cas $x I z$ et $y I z$ est exclu.

$5 \Rightarrow 1$. Considérons la relation O^*; elle est réflexive; elle est transitive: si en effet $(x, y) \notin O$, $(y, z) \notin O$ et $(x, z) \in O$ on a par exemple $(y, x) \in O$ d'où $(y, z) \in O$ et il y a contradiction; enfin O^* est totale, car $(x, y) \notin O^*$ implique $(y, x) \in O^*$. Donc O^* est un préordre total noté $\bar{P}$; donc $P = O^d$ est un préordre total.

3. Treillis finis C.A.C. Soit T un treillis fini, nous notons $x \vee y$ le supremum de x et y, $x \wedge y$ leur infimum. Puisque pour un treillis, on ne peut avoir à la fois $a \prec b$, $c \prec b$, $c \prec d$ et $a \prec d$, le corollaire du théorème 1 nous donne la caractérisation suivante:

PROPOSITION 4. *Un treillis fini est* C.A.C. *si et seulement si*

$$a \prec b,\ c \prec b,\ c \prec d \Rightarrow a = c \text{ ou } b = d\,.$$

Soit maintenant un treillis gradué C.A.C.; considérons la restriction de ce treillis à deux niveaux consécutifs N_k, N_{k+1}; d'après la proposition 1, cette restriction est une réunion disjointe d'ordres $K_{n,m}$; mais les seuls ordres $K_{n,m}$ vérifiant la condition de la proposition 4 sont les ordres $K_{1,m}$ et $K_{n,1}$. On a donc le résultat suivant:

PROPOSITION 5. *Un treillis fini gradué est* C.A.C. *si et seulement si les ordres restrictions à deux niveaux consécutifs du treillis sont des réunions disjointes (au sens des sommets) d'ordres* $K_{n,1}$ *ou* $K_{1,m}$.

Deux exemples de tels treillis sont montrés figure 6

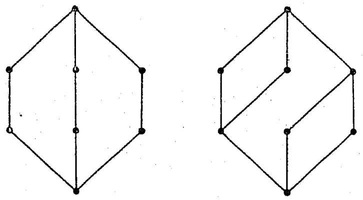

Fig. 6

On étudie maintenant les treillis modulaires C.A.C. Le théorème suivant donne plusieurs caractérisations des treillis modulaires C.A.C.

THÉORÈME 2. *Soit* T *un treillis fini. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes*

(i) T *est modulaire et* C.A.C.

(ii) T *est semi-modulaire et* C.A.C.

(iii) T *est gradué et si le niveau* k *de* T *a plus d'un élément, les niveaux* $k-1$ *et* $k+1$ *n'ont chacun qu'un élément.*

(iv) T *est semi-modulaire et* $a, b, c \in T$, $a\, I\, b$ *et* $b\, I\, c \Rightarrow a \vee b = b \vee c$ *et* $a \wedge b = b \wedge c$.

(v) $I \cup D$ *est une équivalence* (D *est la relation "diagonale" définie sur les éléments de* T *par* $x\, D\, y \Leftrightarrow x = y$; I *est la relation d'incomparabilité du treillis*).

(i) $\Rightarrow$ (ii) est évident.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Si T est semi-modulaire, il est gradué.

Supposons T semi-modulaire supérieurement, c'est à dire $a, b \in T$, $a \succ a \wedge b$ et $b \succ a \wedge b \Rightarrow a \vee b \succ a$ et $a \vee b \succ b$ (la démonstration sera duale pour T semi-modulaire inférieurement).

Considérons le niveau i et supposons que le niveau $i-1$ a un seul élément e. Si le niveau i contient deux éléments distincts a et b, tous deux couvrent $e = a \wedge b$; donc $a \vee b$ appartient au niveau $i+1$.

Soit c un autre élément du niveau $i+1$. Si c couvre a, on a le N_4 $(b, a \vee b, a, c)$. Si c couvre b, on a le N_4 $(a, a \vee b, b, c)$. Si c ne couvre ni a ni b, il existe d tel que $c \succ d \succ e$. On a donc $a \wedge d = e$, $a \succ e$ et $d \succ e$, donc $a \vee d \succ a$ et $a \vee d \succ d$. Puisque c et $a \vee d$ sont distincts (c ne couvre pas a), $(a, a \vee d, d, c)$ forment un N_4. Donc, si T est C.A.C., il n'y a pas d'autre élément que $a \vee b$ dans le niveau $i+1$.

Soit k un niveau de T contenant plusieurs éléments, $l < k$ tel que le niveau l a un seul élément, et qu'il n'y a pas de l', $k < l' < l$ avec la même propriété. k existe puisque le niveau zéro a un élément unique noté Λ et que T est fini. Par définition de l, le niveau $l+1$ a plus d'un élément et d'après ce qui précède le niveau $l+2$ n'en a qu'un, ce qui ne s'accorde avec cette même définition que pour $l = k-1$.

L'implication est démontrée.

Remarque. Si deux éléments d'un treillis vérifiant (iii) ont même niveau, ils ont les mêmes majorants (tous les éléments de niveau supérieur) et les mêmes minorants (tous les éléments de niveau inférieur).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Si $a \wedge b = c$, avec $a \succ c$ et $b \succ c$, ceci signifie que a et b sont de même niveau k, et que c est l'élément unique de niveau $k-1$. Alors $a \vee b$ est l'élément unique de niveau $k+1$, et l'on a $a \vee b \succ a$ et $a \vee b \succ b$. T est semi-modulaire supérieurement (également T est semi-modulaire inférieurement, et donc modulaire).

De même, $a\, I\, b$ et $b\, I\, c$ implique que a, b et c sont de même niveau, d'après la remarque précédente. $a \vee b = b \vee c$ est l'élément unique du niveau immédiatement supérieur et $a \wedge b = b \wedge c$ est l'élément unique du niveau immédiatement inférieur.

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Montrons que si T est semi-modulaire supérieurement et contient un N_4, la seconde partie de (iv) n'est pas vraie.

Soit (a, b, c, d) ce N_4: $a \prec b$, $c \prec b$, $c \prec d$, $a\, I\, c$, $a\, I\, d$, $b\, I\, d$. On a évidemment $a \vee c = b$ et $b \wedge d = c$. De $b \succ c$ et $d \succ c$, on déduit $b \vee d \succ b$ et $b \vee d \succ d$ par semi-modularité supérieure. Comme on a $d < a \vee d \leqslant b \vee d$, ceci entraine $a \vee d = b \vee d \neq b$. On a donc $a\, I\, c$

et $a\,I\,d$, avec $a \vee c = b$ et $a \vee d \neq b$. Pour un treillis semi-modulaire inférieurement, on a de même $d\,I\,b$ et $d\,I\,a$ avec $d \wedge b = c$ et $d \wedge a \neq c$.

(iii) $\Rightarrow$ (v). Si (iii) est vérifiée, $x\,I\,y$ si et seulement si x et y appartiennent au même niveau.

(v) $\Rightarrow$ (i). Si T n'est pas modulaire, il contient un sous-treillis de la forme indiquée figure 7. On a alors $x\,I\,y$ et $x\,I\,z$, mais non $y\,I\,z$. I n'est donc pas transitive. De même si T n'est pas C.A.C., il contient un N_4 (a, b, c, d) pour lequel on a $a\,I\,c$ et $b\,I\,c$, mais non $a\,I\,b$.

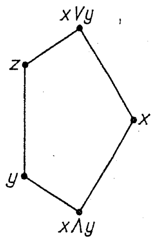

Fig. 7

Le théorème est démontré. Les propositions (i) et (ii) établissent l'équivalence pour les treillis finis C.A.C. de la modularité et de la semi-modularité. La proposition (iii) permet de caractériser la forme de ces treillis: ce sont ceux pour lesquels les ordres restrictions à deux niveaux consécutifs sont connexes; ils sont donc de la forme $K_{n,1}$ ou $K_{1,m}$; on voit qu'il s'agit d'une classe assez restreinte.

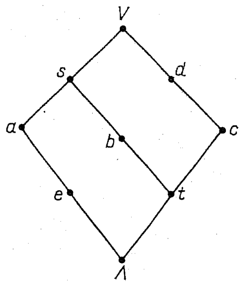

Fig. 8

La proposition (v) donne une caractérisation par l'exclusion d'une seule configuration minimale: elle revient à dire que I est transitive, donc qu'il n'existe pas $a, b, c \in T$ tels que $a\,I\,b$, $b\,I\,c$ et $a > b$. La proposition (iv) présente une caractérisation algébrique de ces treillis, pour laquelle l'hypothèse de semi-modularité ne peut être levée. Ainsi le treillis gradué non semi-modulaire de la figure 8 est C.A.C. et ne vérifie pas la seconde partie de (iv).

La caractérisation (v) permet également de montrer aisément que les treillis semi-modulaires C.A.C. sont de dimension 2 ou 1 (pour les ordres totaux): Il suffit pour cela de remarquer qu'ils sont, parmi la classe des ordres associés aux préordres totaux, les ordres de treillis.

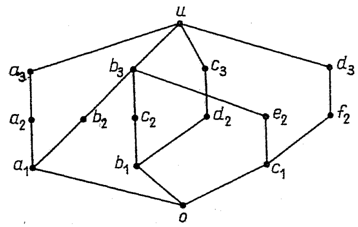

Fig. 9

Par contre, nous donnons ci-dessous un exemple de treillis gradué C.A.C. de dimension supérieure à deux.

PROPOSITION 6. *Le treillis gradué* C.A.C. *de la figure* 9 *est de dimension trois.*

LEMME. *Soit O un ordre de dimension deux: $O = T_1 \cap T_2$; soient x, y, z, t avec $x\,O\,y$, $z\,O\,t$, $x\,I\,t$, $y\,I\,z$;*

$$z\,T_1\,y \Rightarrow t\,T_1\,x.$$

En effet

$$z\,I\,y \text{ et } z\,T_1\,y \Rightarrow y\,T_2\,z,$$
$$x\,O\,y,\ y\,T_2\,z,\ z\,O\,t \Rightarrow x\,T_2\,t,$$
$$x\,I\,t \text{ et } x\,T_2\,t \Rightarrow t\,T_1\,x.$$

Soit O le treillis représenté figure 9 et supposons que O soit de dimension deux: $O = T_1 \cap T_2$. Supposons, par exemple, $b_1\,T_1\,a_3$;

$$\begin{aligned} b_1\,T_1\,a_3 &\Rightarrow b_3\,T_1\,a_2 \text{ (lemme)} \Rightarrow c_1\,T_1\,a_2 \text{ (transitivité)} \\ &\Rightarrow d_3\,T_1\,a_1 \text{ (lemme)} \Rightarrow f_2\,T_1\,b_3 \text{ (transitivité)} \\ &\Rightarrow f_2\,T_1\,b_1 \text{ (lemme)} \Rightarrow c_1\,T_1\,c_3 \text{ (transitivité)} \\ &\Rightarrow c_3\,T_2\,c_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1\,T_1\,a_3 &\Rightarrow d_2\,T_1\,a_1 \text{ (lemme)} \Rightarrow d_2\,T_1\,b_3 \text{ (transitivité)} \\ &\Rightarrow c_3\,T_1\,b_3 \text{ (lemme)} \Rightarrow b_3\,T_2\,c_3, \end{aligned}$$

$$b_3\,T_2\,c_3 \text{ et } c_3\,T_2\,c_1 \Rightarrow b_3\,T_2\,c_1 \text{ impossible puisque } c_1\,O\,b_2.$$

O est donc de dimension supérieure à deux; il est de dimension trois car il est intersection des trois ordres totaux suivants (écrits sous forme de permutations):

$$T_1: \; o\, a_1 a_2 a_3 b_2 b_1 c_2 d_2 c_3 c_1 f_2 d_3 e_2 b_3 u \, ,$$
$$T_2: \; o\, c_1 e_2 f_2 d_3 b_1 d_2 c_3 c_2 a_1 b_2 b_3 a_2 a_3 u \, ,$$
$$T_3: \; o\, a_1 b_1 c_1 b_2 c_2 e_2 b_3 a_2 a_3 d_2 c_3 f_2 d_3 u \, .$$

On vérifie que $O = T_1 \cap T_2 \cap T_3$.

References

[1] M. Barbut et B. Monjardet, *Ordre et Classification*, Algèbre et Combinatoire, Paris 1970.
[2] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Paris 1970.
[3] A. Ducamp, *Sur la dimension d'un ordre partiel*, Théorie des Graphes, Journées Internationales d'Études, Paris 1967, pp. 103–112.
[4] B. Dushnik and E. W. Miller, *Partially ordered sets*, Amer. J. Math. 63 (1941), pp. 600–610.
[5] P. A. Grillet, *Maximal chains and antichains*, Fund. Math. 65 (1969), p. 157–167.

CENTRE DE MATHÉMATIQUE SOCIALE
Paris

Reçu par la Rédaction le 30. 5. 1971

Retracts of Tychonoff and normal spaces

by

Stephen E. Rodabaugh [1] (Columbia, Mo)

Abstract. Let $\mathcal{C}$ be a class of topological spaces. A space X is called an *absolute retract for the class* $\mathcal{C}$ (written $X \in \mathrm{AR}(\mathcal{C})$) if

(1) X can be embedded as a closed subset of some element of $\mathcal{C}$ and

(2) if $h: X \to Y$, where $Y \in \mathcal{C}$, is an embedding such that $h[X]$ is closed in Y, then $h[X]$ is a retract of Y.

If the word retract in the above definition is replaced by the word neighborhood retract, then X is called an *absolute neighborhood retract for the class* $\mathcal{C}$ (written $X \in \mathrm{ANR}(\mathcal{C})$). A neighborhood retract of a space is always assumed to be a closed subset of that space. Let $\mathcal{T}$ denote the class of Tychonoff spaces and $\mathcal{N}$ the class of normal spaces. $\mathrm{ANR}(\mathcal{T})$ $[\mathrm{AR}(\mathcal{T})]$ are precisely the "almost" neighborhood retracts [resp., "almost" retracts] of Tychonoff cubes. In a compact Hausdorff setting, $\mathrm{ANR}(\mathcal{T})$ $[\mathrm{AR}(\mathcal{T})]$ are precisely the neighborhood retracts [resp., retracts] of Tychonoff cubes. Similar statements hold for the normal case. In a locally compact Hausdorff setting, $\mathrm{ANR}(\mathcal{T})$ are precisely the retracts of open subsets of Tychonoff cubes. Results are obtained concerning contractibility of $\mathrm{ANR}(\mathcal{T})$ $[\mathrm{AR}(\mathcal{T})]$, and subsets and products of $\mathrm{ANR}(\mathcal{T})$ and $\mathrm{ANR}(\mathcal{N})$.

1. Introduction. Let $\mathcal{C}$ be a class of topological spaces. A space X is called an *absolute retract for the class* $\mathcal{C}$ (written $X \in \mathrm{AR}(\mathcal{C})$) if

(1) X can be embedded as a closed subset of some element of $\mathcal{C}$ and

(2) if $h: X \to Y$, where $Y \in \mathcal{C}$, is an embedding such that $h[X]$ is closed in Y, then $h[X]$ is a retract of Y.

If the word retract in the above definition is replaced by the word neighborhood retract, then X is called an *absolute neighborhood retract for the class* $\mathcal{C}$ (written $X \in \mathrm{ANR}(\mathcal{C})$). Note that a neighborhood retract of a space is always assumed to be a closed subset of that space. Note also in the above definition that if $\mathcal{C}$ is a weakly hereditary class, then condition (1) is equivalent to $X \in \mathcal{C}$. Finally note that if $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$, $\mathcal{C}$ is a weakly hereditary class, and $X \in \mathcal{C}$, then $X \in \mathrm{ANR}(\mathcal{C}')$ implies $X \in \mathrm{ANR}(\mathcal{C})$.

In order to determine whether or not a space is an absolute retract, one must check all embeddings of X into each element of $\mathcal{C}$. One of the

[1] The author is indebted to Professor R. Richard Summerhill for bringing this problem to his attention and for helpful discussions relating to this problem.