О покрытии выпуклых тел гомотетичными

П. С. Солтан (Москва)

Пусть K-ограниченное выпуклое тело n-мерного эвклидова пространства E^n. Через $b(K)$ обозначим минимальное число тел, гототетичных телу K с положительными коэффициентами гототетии, меньшими единицы, и покрывающих все тело K. Г. Хадвигером [1], И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом [2] была высказана следующая гипотеза: для любого ограниченного выпуклого тела $K \subset E^n$ справедливы неравенства $n+1 \leqslant b(K) \leqslant 2^n$, причем равенство $b(K) = 2^n$ имеет место лишь в случае, если K-параллелепипед. Для $n \geqslant 2$ справедливость этого утверждения установлена (см. [2], [5], [9]). Усилия, приложенные для проверки этой гипотезы при $n \geqslant 3$, привели к постановке родственных задач и к новым результатам (см. [4]–[9], [11]–[16]). Заметим так же, что указанная гипотеза и относящиеся к ней рассмотрения находятся в кругу идей, связанных с проблемой К. Борсука о разбиении множеств из E^n на части меньшего диаметра (см. [5], [8]).

Цель настоящей заметки — подтверждение указанной гипотезы для специального класса многогранников пространства E^3.

Через $\operatorname{bd} K$ и $\operatorname{int} K$ мы будем обозначать соответственно границу и внутренность тела $K \subset E^n$. Точка $x \in \operatorname{bd} K$ называется *освещенной* (извне) некоторым направлением l пространства E^n, если луч, параллельный l и исходящий из точки x, проходит через некоторую точку $y \in \operatorname{int} K$. Множество $N \subset \operatorname{bd} K$ называется *освещенным* направлениями $l_1, l_2, \ldots, l_t$, если любая точка множества N освещена хотя бы одним из этих направлений. Пусть $c(K)$ — минимальное число направлений в E^n, освещающих всю границу $\operatorname{bd} K$ тела K. В. Г. Болтянский показал [4], что $b(K) = c(K)$ для любого ограниченного тела $K \subset E^n$. В связи с этим наши дальнейшие построения, в основном, будут описаны в терминах освещения.

Выпуклый многогранник $K \subset E^3$ будем называть *R-многогранником*, если он ограничен, центрально симметричен и ни одна грань его не освещается одним направлением.

Оказывается, что указанная выше гипотеза подтверждается для R-многогранников, т. е. справедлива.

Теорема. *Для любого R-многогранника K пространства E^3 выполняются неравенства*

$$4 \leqslant c(K) \leqslant 8,$$

причем, если $c(K) = 8$, то K-параллелепипед.

Доказательству предпошлем некоторые рассмотрения.

Через $\mathcal{F}(K)$ обозначим множество всех (двумерных) граней R-многогранника K, причем грани мы всегда будем считать замкнутыми. Два элемента $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(K)$ будем называть *смежными*, если $F_1 \neq F_2$ и $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Через $\mathfrak{I}(F)$, где $F \in \mathcal{F}(K)$, обозначим множество *всех* смежных граней для грани F, а через $\mathfrak{C}(F)$-семейство несущих плоскостей всех граней, входящих в $\mathfrak{I}(F)$. Несущую плоскость самой грани F обозначим через $\Gamma(F)$. Отметим, что $F \in \mathfrak{I}(F)$ и $\Gamma(F) \in \mathfrak{C}(F)$. Далее, если M-некоторый набор подмножеств пространства E^3, то через $\overline{M}$ будем обозначать набор, в который M переходит при симметрии относительно центра симметрии многогранника K. Например, если F-грань многогранника K, то $\overline{F}$-симметричная ей грань; далее $\overline{\mathfrak{I}(F)} = \mathfrak{I}(\overline{F})$, $\overline{\mathfrak{C}(F)} = \mathfrak{C}(\overline{F})$ и т. д.

Лемма 1. *Если $K \subset E^3$ является R-многогранником, то для любой его грани F справедливо соотношение*

$$\mathfrak{C}(\overline{F}) \cap \mathfrak{C}(\overline{F}) \neq \emptyset . \tag{1}$$

Иначе говоря, найдется такая грань $\overline{F}'$, что

$$F \cap F' \neq \emptyset , \quad \overline{F} \cap F' \neq \emptyset .$$

Доказательство. Пусть соотношение (1) для некоторой грани $F \in \mathcal{F}(K)$ не выполняется. Покажем, что в этом случае многогранник $K \subset E^3$ не является R-многогранником. Рассмотрим для каждой плоскости $L \in \mathfrak{C}(F) \cup \{\Gamma(F)\}$ то открытое полупространство $\Pi(L)$, определяемое плоскостью L, которое не содержит K. Прежде всего мы докажем, что существуют такие три элемента L_1, L_2, L_3 множества $\mathfrak{C}(F)$, что пересечение $\Pi(L_1) \cap \Pi(L_2) \cap \Pi(L_3) \cap \Pi(\Gamma(F))$ пусто. В самом деле, предположим противное:

$$\Pi(L_1) \cap \Pi(L_2) \cap \Pi(L_3) \cap \Pi(\Gamma(F)) \neq \emptyset \tag{2}$$

для любых $L_1, L_2, L_3 \in \mathfrak{C}(F)$.

Обозначим через L^* такую плоскость, параллельную $\Gamma(F)$ и расположенную в полупространстве $\Pi(\Gamma(F))$, что полоса P^*, заключенная между плоскостями L^* и $\Gamma(F)$, имеет непустое пересечение с каждым из множеств

$$\Pi(L_1) \cap \Pi(L_2) \cap \Pi(L_3) , \quad \text{где} \quad L_1, L_2, L_3 \in \mathfrak{C}(F) .$$

Такая плоскость L^* существует, так как по предположению все множества (2) непусты и их конечное число. Заметим теперь, что если

$$x \in \Pi(L_1) \cap \Pi(L_2) \cap \Pi(L_3) , \quad y \in K ,$$

то луч, исходящий из точки x, расположенный на прямой xy и не содержащий точки y, целиком содержится в множестве $\Pi(L_1) \cap \Pi(L_2) \cap \Pi(L_3)$. Из этого следует, что для любых $L_1, L_2, L_3 \in \mathfrak{C}(F)$ пересечение

$$L^* \cap \Pi(L_1) \cap \Pi(L_2) \cap \Pi(L_3)$$

непусто. Иначе говоря,

$$\big(L^* \cap \Pi(L_1)\big) \cap \big(L^* \cap \Pi(L_2)\big) \cap \big(L^* \cap \Pi(L_3)\big) \neq \emptyset , \quad L_1, L_2, L_3 \in \mathfrak{C}(F) .$$

Итак, конечное семейство всех множеств $L^* \cap \Pi(L)$, где $L \in \mathfrak{C}(F)$, обладает тем свойством, что все эти множества выпуклы, расположены в плоскости L^* и любые три из них имеют непустое пересечение. Из теоремы Хелли [8] следует теперь, что все эти множества имеют непустое пересечение, т. е. существует такая точка z, что

$$z \in L^* \subset \Pi(\Gamma(F)), \quad z \in \Pi(L) \text{ для любого } L \in \mathfrak{C}(F).$$

А это немедленно приводит к тому, что грань $F \in \mathcal{F}(K)$ освещается одним направлением; достаточно рассмотреть направление, идущее от точки z к произвольной внутренней точке многогранника K. Тем самым мы пришли к противоречию с тем, что K есть R-многогранник. Полученное противоречие и доказывает, что найдутся плоскости $L_1, L_2, L_3 \in \mathfrak{C}(F)$, удовлетворяющие соотношению

$$\Pi(L_1) \cap \Pi(L_2) \cap \Pi(L_3) \cap \Pi(\Gamma(F)) = \emptyset . \tag{3}$$

Соотношение (3) мы разобьем на два взаимно исключающих случая, которые и рассмотрим отдельно:

$$\Pi(L_1) \cap \Pi(L_2) \cap \Pi(L_3) = \emptyset , \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \Pi(L_1) \cap \Pi(L_2) \cap \Pi(L_3) \neq \emptyset , \\ \Pi(L_1) \cap \Pi(L_2) \cap \Pi(L_3) \cap \Pi(\Gamma(F)) \neq \emptyset. \end{gathered} \tag{5}$$

Предположим сначала, что имеет место случай (4), где L_1, L_2, L_3 некоторые элементы множества $\mathfrak{C}(F)$. В таком случае плоскости L_1, L_2, L_3 должны быть параллельны одной прямой (иначе, определяемые ими открытые полупространства $\Pi(L_1), \Pi(L_2), \Pi(L_3)$ имели бы непустое пересечение). Кроме того, плоскости L_1, L_2, L_3 не могут проходить все три через одну прямую (так как это — несущие плоскости трех граней многогранника). Следовательно, $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \emptyset$. Если бы какие-либо две из плоскостей L_1, L_2, L_3 были параллельными, то они были бы симметричны относительно центра многогранника K, и потому было бы выполнено соотношение (1). Так как мы предполагаем, что это соотношение не выполнено, то никакие две из плоскостей L_1, L_2, L_3 не параллельны, и потому $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, $L_1 \cap L_3 \neq \emptyset$, $L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$.

Итак, в рассматриваемом случае (т. е. (4)) существуют такие три опорные плоскости H_1, H_2, H_3 многогранника K (а именно, $H_1 = L_1, H_2 = L_2$, $H_3 = L_3$), которые обладают следующими четырьмя свойствами:

1° $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \emptyset$,

2° $H_j \cap F \neq \emptyset$, $j = 1, 2, 3$,

3° $\Pi(H_1) \cap \Pi(H_2) \cap \Pi(H_3) = \emptyset$,

4° $H_1 \cap H_2 \cap \Gamma(F) \neq \emptyset$, $H_1 \cap H_3 \cap \Gamma(F) \neq \emptyset$, $H_2 \cap H_3 \cap \Gamma(F) \neq \emptyset$.

Покажем, что и в случае (5) существуют три опорные плоскости H_1, H_2, H_3 многогранника K, обладающие свойствами 1°-4°. В самом деле, из соотношений (5) легко вывести, что $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$, т. е. $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ есть некоторая точка пространства E^3; обозначим ее через a. Точно так же каждое из пересечений $L_1 \cap L_2 \cap \Gamma(F)$, $L_1 \cap L_3 \cap \Gamma(F)$, $L_2 \cap L_3 \cap \Gamma(F)$ непусто, т. е. представляет собой точку. Эти точки мы обозначим соответственно через b, c, d. Таким образом,

$$a, b, c \in L_1, \quad a, b, d \in L_2, \quad a, c, d \in L_3, \quad b, c, d \in \Gamma(F).$$

Из второго соотношения (5) теперь легко следует, что тетраэдр $abcd$ (для которого $L_1, L_2, L_3, \Gamma(F)$ служат плоскостями граней) содержит многогранник K. Возьмем теперь некоторую внутреннюю точку e треугольника bcd и проведем три плоскости, параллельные прямой ca и проходящие, соответственно, через прямые bc, cd, db. Легко видеть, что эти три плоскости H_1, H_2, H_3 удовлетворяют условиям 1°-4°.

Итак, в любом случае ((4) или (5)) существуют плоскости H_1, H_2, H_3, удовлетворяющие условиям 1°-4°. Этим мы и воспользуемся для проведения дальнейшего доказательства. Каждое из пересечений $F \cap H_1$, $F \cap H_2$, $F \cap H_3$ представляет собой отрезок (возможно, вырождающийся в точку). Шесть точек, являющихся концами этих отрезков, мы обозначим (в порядке их следования на контуре треугольника bcd) через $y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3$, считая, что точки $y_j z_j$ лежат в плоскости H_j, $j = 1, 2, 3$. Из симметричности многогранника K вытекает (поскольку мы считаем условие (1) невыполненным), что для любых $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ выпуклая оболочка точек $y_i, z_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j$, лежит целиком, за исключением самих точек $y_i, z_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j$, в множестве $\operatorname{int} K$. Далее, точки

$$H_1 \cap \bar{H}_3 \cap \Gamma(F), \quad H_2 \cap \bar{H}_1 \cap \Gamma(F), \quad H_3 \cap \bar{H}_2 \cap \Gamma(F),$$
$$\bar{H}_1 \cap H_3 \cap \Gamma(F), \quad \bar{H}_2 \cap H_1 \cap \Gamma(F), \quad \bar{H}_3 \cap H_2 \cap \Gamma(F)$$

обозначим, соответственно, через $x_2, x_3, x_1, x_2^*, x_3^*, x_1^*$. Точки $x_1, x_2, x_3, x_1^*, x_2^*, x_3^*$ служат вершинами выпуклого центрального симметричного шестиугольника Q, содержащего целиком грань F. Если бы одна из точек y_j, z_j совпадала с вершиной этого шестиугольника, то она, во-первых, принадлежала бы грани F и, во-вторых, лежала бы в одной из плоскостей $\bar{H}_j$. Следовательно, эта плоскость $\bar{H}_j$ имела бы общую точку как с F, так и с $\bar{F}$, а это противоречит нашему предположению о невыполнении условия (1). Следовательно отрезки $[y_j, z_j]$ не содержат вершин шестиугольника Q. Отметим еще, что $F \cap \bar{H}_j = \emptyset$ (иначе было бы выполнено условие (1)).

Если отрезок $y_1 z_1$ не вырождается в точку, то существует единственная грань $G \in \mathfrak{I}(F)$, содержащая этот отрезок. Если же отрезок $y_1 z_1$, вырождается в точку, то может существовать несколько граней $G_1, G_2, \ldots, G_s \in \mathfrak{I}(F)$, содержащих этот отрезок. Мы покажем, что существует такая грань $G \in \mathfrak{I}(F)$, которая содержит отрезок $y_1 z_1$ (на своей границе) и освещается одним направлением.

Обозначим через m направление, параллельное плоскостям H_1, H_2, H_3 и идущее от плоскости $\Gamma(F)$ к плоскости $\Gamma(\bar{F})$, а через π-проекцию вдоль направления m на плоскость $\Gamma(\bar{F}) = \overline{\Gamma(F)}$.

Пусть $G \in \mathfrak{I}(F)$-некоторая грань, содержащая отрезок $y_1 z_1$ на своей границе и обладающая тем свойством, что ни одна ее точка не освещается направлением m (такая грань, очевидно, существует). Грань $\bar{F}$ так же обладает тем свойством, что ни одна ее точка не освещается направлением m. Из этого следует, что проекция $\pi(G)$ не имеет общих точек с внутренностью грани $\bar{F}$. Не может $\pi(G)$ иметь общие точки и с контуром грани $\bar{F}$, так как $G \cap \bar{F} = \emptyset$. Следовательно, $\pi(G) \cap \bar{F} = \emptyset$. А так как шестиугольник $\bar{y}_1\bar{z}_1\bar{y}_2\bar{z}_2\bar{y}_3\bar{z}_3$ содержится в $\bar{F}$, то $\pi(G)$ не пересекается с этим шестиугольником. Значит, прямая $\bar{y}_2\bar{z}_3$ *отделяет* проекцию $\pi(G)$ от отрезков $\bar{z}_3\pi(y_2)$ и $\pi(z_3)\bar{y}_2$, так что $\pi(G)$ *не пересекается* с этими отрезками. Отсюда вытекает, что $\pi(G)$ не пересекается и с прямыми $\bar{z}_3\pi(y_2)$, $\pi(z_3)\bar{y}_2$, т. е. $\pi(G)$ расположена строго *внутри* полосы между этими параллельными прямыми. Обозначим через l направление, идущее от точки $\bar{y}_2$ к точке $\pi(z_3)$ (или, что то же самое, от точки $\bar{z}_3$, к точке $\pi(y_2)$). Пусть Γ_1 и Γ_2—плоскости, параллельные направлению l и содержащие отрезки $y_2\bar{z}_3$ и $z_3\bar{y}_2$ соответственно. Тогда грань G лежит, по доказанному, *внутри* этой полосы, и потому каждая прямая, параллельная l и пересекающая грань G в точке, не принадлежащей отрезку $y_1 z_1$, пересекает параллелограм $y_2 z_3 \bar{y}_2 \bar{z}_3$ в его *внутренней* точке. (Напомним, что грань G с гранью $\bar{F}$ не пересекается.) Значит, направление l освещает всю грань G, кроме отрезка $y_1 z_1$. Остается немного наклонить направление l (а именно, взять направление l', определяемое вектором $\vec{v} + \varepsilon \cdot \overrightarrow{y_1\pi(y_1)}$, где $\vec{v}$ —вектор направления l, а ε—достаточно малое положительное число) и мы осветим всю грань G.

Но наличие грани, освещаемой одним направлением, противоречит тому, что K есть R-многогранник. Полученное противоречие и доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Если K является R-многогранником, то для каждой его грани F пересечение $\mathfrak{I}(F) \cap \mathfrak{I}(\bar{F})$ состоит, по крайней мере, из одной пары симметричных граней.*

В самом деле, существование одной грани $F' \in \mathfrak{I}(F) \cap \mathfrak{I}(\bar{F})$ доказано в лемме 1. Но тогда и $\bar{F}' \in \mathfrak{I}(F) \cap \mathfrak{I}(\bar{F})$.

Доказательно теоремы. Предварительно покажем, что достаточно доказать теорему для R-многогранников $K \subset E^3$, обладающих свойством (A): для любой прямой $l \subset E^3$, либо существует опорная прямая p многогранника K (т. е. $p \cap \operatorname{bd} K \neq \emptyset$, $p \cap \operatorname{int} K = \emptyset$), параллельная l и имеющая с $\operatorname{bd} K$ единственную общую точку, либо же K представляет собой призму, образующие которой параллельны l. Действительно. Если $K \subset E^3$-многогранник, не удовлетворяющий указанному условию, то существует такая прямая $l \subset E^3$, что всякая опорная прямая p многогранника K, параллельная l, имеет с $\operatorname{bd} K$ общий отрезок. Обозначим через τ минимум длин отрезок, высекаемых из $\operatorname{bd} K$ опорными прямымми многогранника K, параллельными l. Произведем параллельный перенос τ многогранника K параллельно l (в любом направлении) на расстоянии τ. Так как многогранник K не является призмой с образующими, параллельными l, то $K^* = K \cap \tau(K)$ есть снова многогранник, причем, очевидно, $c(K^*) \geqslant c(K)$. Так как число ребер у любого многогранника $K \subset E^3$ конечно, то повторное применение описанного приема приведет нас после конечного числа шагов к многограннику K', удовлетворяющему требуемому условию, причем $c(K) \leqslant c(K')$. К этому заметим, что если K'—параллелепипед, полученный указанным приемом из некоторого многогранника K, отличного от параллелепипеда, то верно соотношение $c(K) < c(K')$. Это непосредственно проверяется при помощи теоремы 1 работы [16].

Таким образом, будем полагать, что R-многогранник $K \subset E^3$ обладает свойством (A).

Теперь пусть $c'(K)$-минимальное число прямых пространства E^3, обладающих тем свойством, что для любой точки $x \in \operatorname{bd} K$ существует проходящая через x прямая, параллельная некоторой из них и пересекающаяся с $\operatorname{int} K$. Ясно, что

$$c(K) \leqslant 2c'(K) \tag{6}$$

(достаточно для каждой из выбранных прямых взять два противоположных направления, параллельных этой прямой). Далее, обозначим через P^2 двумерное проективное пространство, точками и прямыми которого являются прямые и плоскости пространства E^3, проходящие через центр симметрии многогранника K, а через K_d-двойственный для K многогранник, с тем же центром симметрии. На плоскости P^2 многогранник K_d реализует, как легко заметить, некоторое разбиение (клеточный комплекс [3]) $\mathcal{K} = \{K^0, K^1, K^2\}$, где K^i $(i = 0, 1, 2)$ — множество всех *проективно* выпуклых множеств [8] размерности i, соответствующим парам симметричных друг другу граней размерности i многогранника K_d (Множество $M \subset P^2$ называется проективно выпуклым, если в P^2 существует прямая p, обладающая свойством, что $p \cap M = \emptyset$ и в аффинной плоскости $P^2 \backslash p$ множество M является выпуклым). Пусть $s(\mathcal{K})$-наименьшее натуральное число таких прямых на плоскости P^2, что для любого $k^2 \in K^2$ найдется среди них прямая не пересекающая k^2. Из соображений двойственности имеем равенство:

$$s(\mathcal{K}) = c'(K)\,. \tag{7}$$

Покажем, что число $s(\mathcal{K})$ удовлетворяет неравенствам:

$$3 \leqslant s(\mathcal{K}) \leqslant 4\,, \tag{8}$$

причем равенство $s(\mathcal{K}) = 4$ возможно только в случае, когда $\mathcal{K}$ является реализацией октаэдра, т. е. многогранника двойственного параллелепипеду пространства E^3.

Действительно. Неравенство $s(\mathcal{K}) \geqslant 3$ следует из того, что для произвольных двух прямых p_1 и p_2 плоскости P^2 существует, очевидно, такая двумерная клатка $k^2 \in K^2$, что имеет место соотношение $k^2 \cap (p_1 \cap p_2) \neq \emptyset$. Докажем второе из неравенств (8) и утверждение, связанное с равенством $s(\mathcal{K}) = 4$. В силу леммы 2 и двойственности для каждой клетки $k_1^0 \in K^0$ существует такая $k_2^0 \in K^0$, что объединение замкнутых звезд [3] клеток k_1^0 и k_2^0 содержит в своем полиэдре [3] прямую p, инцидентную клеткам k_1^0 и k_2^0. При этом, очевидно, могут быть следующие случаи: 1) Существуют два элемента k_1^1 и k_2^1 из K^1, что $k_1^1 \subset p$, $k_2^1 \subset p$ и $k_1^1 \cup k_2^1 = p$. 2) Существует единственный элемент k^1 из K^1, что $k^1 \subset p$. 3) В K^1 не существует ни одного элемента, принадлежащего прямой. На основе того факта, что многогранник K
обладает свойством (A), случай 1) немедленно приводит к тому, что он со-
храняет силу для любых двух различных элементов множества K^0. Учи-
тывая свойства [17] проективной плоскости, это может быть только в слу-
чае, если множества K^0, K^1 и K^2 содержат соответственно три, шесть и че-
тыре элемента. А это значит, что в этом случае $\mathcal{K}$ представляет собой реа-
лизацию октаэдра, т. е. многогранника двойственного параллелепипеду
пространства E^3. Очевидно, что для этого случая $s(\mathcal{K}) = 4$. Теперь при-
ступим к доказательству того, что для случаев 2) и 3) справедливо нера-
венство

$$s(\mathcal{K}) \geqslant 3\,. \tag{9}$$

Искомыми прямыми в случае 2) являются следующие: прямая p_1, не пере-
секающая клетку $k^2 \in K^2$, для которой верно соотношение $p \backslash k^1 \subset k^2$,
прямые p_2 и p_3, обладающими теми свойствами, что $p_2 \cap p_3 \in k^2$ и одна из
замкнутых компонент связности множества $P^2 \backslash (p_1 \cup p_2)$ содержит из K^0
только клетки k_1^0 и k_2^0 (существование прямых p_1, p_2, p_3 доказывается не-
посредственным образом). В самом деле. Единственная клетка из K^2, не пе-
ресекаемая прямыми p_2 и p_3, есть клетка $k^2 \in K^2$ и она не пересекается
прямой p_1. Далее, если $k_1^2 \in K^2 \backslash \{k^2\}$ и пересекается прямой p_2, то в силу
выбора p_2 и p_3, она не может быть пересечена прямой p_2, и наоборот. Сле-
довательно, для случая 2) неравенство (9) доказано. В случае 3), как легко
заметить, существуют единственные две клетки k_1^2 и k_2^2 из K^2, для которых
верно соотношение $k_1^0 \cup k_2^0 \subset k_1^2 \cup k_2^2$. В самом деле. Этому условию удовле-
творяют двумерные клетки, внутренности которых пересекаются прямой p.
Других клеток, удовлетворяющих указанному условию, нет в силу того,
что двумерная клетка из K^2 является проективно выпуклым множеством,
а проективно выпуклое множество, очевидно, пересекается некоторой пря-
мой либо по пустому множеству, либо по проективно выпуклому множе-
ству. Далее, в рассматриваемом случае возможны, очевидно, два подслу-

чая: $3'$) пересечение $k_1^2 \cap k_2^2$ состоит в точности из двух элементов k_1^1 и k_2^1 множества K^1, причем $k_1^1 \cap k_2^1 = \emptyset$, $3''$) пересечение $k_1^2 \cap k_2^2$ содержит не более одного элемента из K^1. Для случая $3'$) немедленно устанавливается неравенство (9). Для этого достаточно рассмотреть прямые p_1 и p_2, не пересекающие соответственно клетки k_1^2 и k_2^2, а так же прямую p_3, пересекающую по внутренним точкам клетки k_1^1 и k_2^1, которые, очевидно, удовлетворяют искомым условиям. В случае $3''$), по крайней мере, одна из двух компонент пересечения $k_1^2 \cap k_2^2$ состоит из одной единственной нульмерной клетки. Пусть эта будет клетка k_1^0. Тогда вторая компонента содержит клетку k_2^0 и может быть еще одну нульмерную клетку k_3^0, а следовательно, ввиду её выпуклости, она просто представляет собой некоторую одномерную клетку $k^1 \in K^1$. Теперь, если существует клетка $k_3^2 \in K^2$, отличная от k_1^2 и k_2^2, содержащая в своей границе концы одномерной клетки k^1, то мы окажемся либо в случае 1), либо в случае 2) относительно клеток k_1^0 и k_2^0. Случай 1) не может иметь место ввиду того, что многогранник K обладает свойством (A). Случай 2) приводит нас к выполнимости неравенства (9). Следовательно, достаточно рассмотреть такой комплекс $\mathcal{K}$, для которого случаи 1), 2) и $3'$) не имеют места. Тогда и прямая, определяемая нульмерными клетками k_1^0 и k_3^0, пересекает по внутренности клетки k_1^2 и k_2^2. Отсюда получаем, что одномерные цепи c_1 и c_2, принадлежащие, например, границе клетки k_1^2 и обладающими свойством, что их пересечение $c_1 \cap c_2$ состоит либо только из клетки k_1^0, либо только из клеток k_1^0 и k_2^0 (случай совпадения k_2^0 и k_3^0), содержат кроме концевых нульмерных клеток, по крайней мере, еще по одной нульмерной клетке. Пусть это будут клетки k_3^0 и k_4^0, причем $k_3^0 \in c_1$ и $k_4^0 \in c_2$. Теперь достаточно просто доказывается при помощи свойств R-многогранника K, леммы 2 и предположений относительно комплекса $\mathcal{K}$, что клетки k_3^0 и k_4^0 могут быть подобраны таким образом, что k_4^0 является той нульмерной клеткой для k_3^0, существование которой следует из леммы 2. Пусть $k_3^2 \in K^2$-двумерная клетка, отличная от k_1^2 и содержащая в своей границе клетки k_3^0 и k_4^0. Из предположенного относительно комплекса $\mathcal{K}$ немедленно следует, что $k_3^2 \neq k_2^2$ и прямая, p', инцидентная клеткам k_3^0 и k_4^0, пересекает по внутренности клетки k_1^2 и k_3^2. Сейчас приступим к выбору искомых прямых для рассматриваемого случая. В качестве первой прямой p_1 возьмем одну из тех, которые не пересекают клетку k_1^2. Далее, прямые p_2 и p_3 должны соблюдать условия: а) $p_2 \cap p_3 = p \cap p'$; б) множества $p_2 \setminus \{p \cap p'\}$ и $p_3 \setminus \{p \cap p'\}$ принадлежат различным областям не связного множества $P^2 \setminus \{p \cap p'\}$ в) открытые области плоскости P^2, определяемые прямыми p и p_2, p' и p_3 и не содержащие соответственно клеток k_3^0, k_1^0, не содержат никаких элементов множества K^0. Существование прямых p_1, p_2, p_3 с указанными свойствами устанавливается непосредственным образом. Доказательство того, что прямые p_1, p_2 и p_3 являются искомыми проводится точно так же, как это было сделано для случая 2). Следовательно, неравенство (9) доказано и для случая 3).

Теперь, учитывая соотношения (6)–(9) и неравенство $c(K) < c(K')$, отмеченное в самом начале доказательства, очевидным образом получаем окончательное доказательство теоремы.

Литература

[1] H. Hadwiger, *Ungelöste Probleme, Nr 20*, Elem. der Math. 12 (1957), стр. 121.

[2] И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус, *Одна задача о покрытии выпуклых фигур подобными*, Изв. Молд. фил. АН СССР 10 (76) (1960), стр. 87–90.

[3] В. Г. Болтянский, *Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей*, Из-во АН СССР, Москва 1955.

[4] — *Задача об освещении границы выпуклого тела*, Изв. Молд. фил. АН СССР 10 (76) (1960), стр. 77–84.

[5] — И. Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Изд-во „Наука", Москва 1965.

[6] B. Grünbaum, *On a conjecture of Hadwiger*, Pacific J. Math. 11 (1951), стр. 215–219.

[7] — *Fixing systems and inner illumination*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 15 (1964), стр. 161–163.

[8] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли*, Изд-во „Мир", Москва 1968.

[9] L. Danzer und B. Grünbaum, *Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdös und von V. L. Klee*, Math. Zeitschrift 79 (1962), стр. 95–99.

[10] F. W. Lewi, *Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebungen seines offenen Kerns*, Archiv Math. 6 (1955), стр. 369–370.

[11] П. С. Солтан, *Освещение границы выпуклого тела изнутри*, Матем. Сорник (Нов. серия) 57 (99) (1962), стр. 433–448.

[12] — *Освещение изнутри для неограниченных выпуклых тел*, ДАН СССР 2 (1970), стр. 194.

[13] — *Относительно задач о покрытии и освещении выпуклых тел*, Ученые записки, КГУ, Кишинев 82 (1965), стр. 69–74.

[14] — *К задачам о покрытии и освещении выпуклых тел*, Изв. АН МССР 1 (1963), стр. 49–57.

[15] — *О покрытии многогранников гомотетами*, ДАН СССР 2 (1972), стр. 203.

[16] Х. С. М. Коксгер, *Действительная проективная плоскость*.

Reçu par la Rédaction le 2. 7. 1971