increasing, but f_4 fails to satisfy the condition (c_1). Example: Let $G = R_0 \times R_0$, $g_0 = (0, 0)$, $g_1 = (1, 0)$, $g_2 = (0, 1)$. Clearly, $f_4[g_0, g_1] = f_4[g_0, g_2] = \aleph_0$ and the intervals $[g_0, g_1]$, $[g_0, g_2]$ are f_4-homogeneous. Let L_1 be a dense subset of $[g_0, g]$, $g = g_1 + g_2 = (1, 1)$. Let $r \in [0, 1]$, $h_1 = (0, r)$, $h_2 = (1, r)$. Then there exists $g_r \in L_1 \cap [g_1, g_2]$ and $g_r = (x_r, r)$, $x_r \in [0, 1]$. Thus $g_{r_1} \neq g_{r_2}$ whenever $r_1 \neq r_2$ and therefore $\operatorname{card} L_1 = c = f_4[0, g_1 + g_2] \neq f_4[0, g_1]$.

References

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. 25, Third Edition, 1967.

[2] L. Fuchs, *Частично упорядоченные алгебраические системы*, Москва 1965.

[3] C. Goffman, *Remarks on lattice ordered groups and vector lattices. I. Carathéodory functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958), pp. 107–120.

[4] J. Jakubík, *Remark on the Jordan-Dedekind condition for Boolean algebras*, Časopis pěst. mat. 82 (1957), pp. 44–46.

[5] J. Jakubík, *Konvexe Ketten in l-Gruppen*, Časopis pěst. mat. 84 (1959), pp. 53–63.

[6] R. S. Pierce, *A note on complete Boolean algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), pp. 892–896.

[7] R. S. Pierce, *Some questions about complete Boolean algebras*, Proceedings of Symposia in pure matematics, Vol. II, Lattice Theory, Amer. Math. Soc., 1961.

[8] B. Z. Vulich, *Введение в теорию полуупорядоченных пространств*, Москва 1961.

Reçu par la Rédaction le 28. 4. 1969

Algèbre du calcul propositionnel trivalent de Heyting

par

Luiz Monteiro (Bahia Blanca)

1. Introduction. Nous nous proposons dans cette note de déterminer le nombre d'éléments de l'algèbre H_3 avec un nombre fini de générateurs libres (1).

1.1. Définition. Une algèbre de Heyting (2) A sera dite une *algèbre H_3* si l'égalité suivante est vérifiée:

(T) $$\big((a \to c) \to b\big) \to \Big(\big((b \to a) \to b\big) \to b\Big) = 1$$

quels que soient les éléments a, b et c de A.

Ces algèbres jouent dans l'étude du calcul propositionnel trivalent de Heyting (A. Heyting [5], J. Łukasiewicz [6], I. Thomas [16]) un rôle analogue à celui des algèbres de Boole dans le calcul propositionnel classique.

Il est évident que toute algèbre de Boole, est une algèbre H_3, car dans les algèbres de Boole est valable l'égalité $(b \to a) \to b = b$, qui implique (T).

Indiquons l'exemple le plus simple d'une algèbre H_3, qui n'est pas une algèbre de Boole: Soit $T = \{0, a, 1\}$ l'ensemble formé par trois éléments distincts sur lequel on définit les opérations $\wedge$, $\vee$ et $\to$ au moyen des tables suivantes (auxquelles nous ajoutons la table de l'opération de négation $\neg$ définie par $\neg x = x \to 0$).

$\wedge$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	a	a
1	0	a	1

$\vee$	0	a	1
0	0	a	1
a	a	a	1
1	1	1	1

$\to$	0	a	1	$\neg x$
0	1	1	1	1
a	0	1	1	0
1	0	a	1	0

Cette algèbre a été considérée pour la première fois par A. Heyting (1930).

L'algèbre de Boole $B = \{0, 1\}$ est une sous-algèbre de T que nous aurons à utiliser par la suite.

(1) Un résumé de cette note a été publié dans Notas de Lógica Matemática № 19 (1964).

(2) Voir: T. Skolem [14], G. Birkhoff [1], p. 459, [3], p. 147, M. Ward [17] et A. Monteiro [8]. Nous avons adopté la terminologie de H. Rasiowa et R. Sikorski [11].

Le produit cartésien d'algèbres H_3 et les sous-algèbres d'un tel produit sont des algèbres de la même nature. Nous montrerons plus loin que toute algèbre H_3 peut être obtenue comme une sous-algèbre d'un produit cartésien d'un certain nombre d'algèbres T.

Nous avons à utiliser le résultat suivant qui est facile à démontrer:

1.2. THÉORÈME. *Dans une algèbre de Heyting A l'axiome T est équivalent à chacun des axiomes suivants (quels que soient les éléments a, b et c de A)*:

Axiome T1. $(\neg a \to b) \to \big(((b \to a) \to b) \to b\big) = 1$.

Axiome T2. $\big((b \to a) \to b\big) \to \big((\neg a \to b) \to b\big) = 1$.

Axiome T3. $b = (\neg a \to b) \wedge \big((b \to a) \to b\big)$.

Axiome T4. $b = \big((a \to c) \to b\big) \wedge \big((b \to a) \to b\big)$.

On démontre sans difficulté que dans une algèbre H_3 la condition suivante est vérifiée:

(T5) $$(x \to y) \vee (y \to x) = 1.$$

2. Homomorphismes et théorème de représentation. La théorie des homomorphismes dans les algèbres de Heyting a été étudiée par L. Rieger [13] et aussi par A. Monteiro [7], [9], [10]; H. Rasiowa–R. Sikorski [12].

Étant donné un filtre D d'une algèbre de Heyting A, posons $a \sim b (\operatorname{mod} D)$ si $\big((a \to b) \wedge (b \to a)\big) \in D$. La relation ainsi définie est une relation d'équivalence compatible avec les opérations $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$. L'algèbre quotient correspondante sera représentée par la notation $A' = A/D$. Si $h(a)$ est la classe d'équivalence $(\operatorname{mod} D)$ qui contient l'élément $a \in A$ alors h est un homomorphisme de A sur A' ayant pour noyau D. Toutes les images homomorphes de A peuvent être obtenues de cette manière. Tous ces résultats sont encore valables dans les algèbres H_3.

2.1. DÉFINITION. Un *filtre D d'une algèbre de Heyting A* sera dit: 1° *bivalent* si $A/D = B$; 2° *trivalent* si $A/D = T$.

Il est facile de démontrer les deux résultats suivants:

2.2. THÉORÈME. *Pour qu'un filtre D soit bivalent il faut et il suffit que D soit un ultrafiltre.*

2.3. THÉORÈME. *Pour qu'un filtre D de A soit trivalent il faut et il suffit qu'il existe un et un seule filtre propre U contenant D comme partie propre.*

Nous allons maintenant caractériser les algèbres H_3 au moyen de propriétés de la famille des filtres premiers.

2.4. THÉORÈME. *Pour qu'une algèbre de Heyting A soit une algèbre H_3 il faut et il suffit que tout filtre premier P de A soit bivalent ou trivalent.*

Ce résultat est équivalent au suivant:

2.5. THÉORÈME. *Pour qu'une algèbre de Heyting A soit une algèbre H_3 il faut et il suffit que tout filtre premier de A soit ou bien un ultrafiltre ou bien un filtre premier minimal et que chaque filtre premier soit contenu dans un seul ultrafiltre.*

Pour démontrer le théorème 2.5, nous démontrerons une série de lemmes.

2.6. LEMME. *Tout filtre complètement irréductible C d'une algèbre H_3 est bivalent ou trivalent.*

Démonstration. Si C est un ultrafiltre, alors C est bivalent. Supposons que C n'est pas un ultrafiltre, alors il existe un filtre propre F qui contient C comme partie propre.

Par hypothèse G. Birkhoff and O. Frink Jr. [4]: (i) C est un filtre lié [3] à un élément b, alors (1) $b \in F$. Nous allons démontrer que F est un ultrafiltre.

Si F n'est pas un ultrafiltre alors il existe un ultrafiltre U tel que $F \subset U$. Soit a un élément tel que (2) $a \in U$, (3) $a \notin F$. D'après (2) on a $\neg a \notin U$, d'où (4) $\neg a \notin C$ et alors d'après (i) on a (5) $(\neg a \to b) \in C$.

Comme (6) $a \leqslant b \to a$, de (2) et (6) on déduit (7) $b \to a \in U$. Voyons que (8) $b \to a \notin F$. En effet si $b \to a \in F$ alors d'après (1) on tire $a \in F$, ce qui est impossible. De (8) et (i) on déduit que (9) $\big((b \to a) \to b\big) \in C$. De (9) et (5) en tenant compte de l'axiome T3 on a: $b = (\neg a \to b) \wedge \big((b \to a) \to b\big) \in C$ ce qui est impossible par hypothèse. Nous avons ainsi démontré que F est un ultrafiltre.

Si nous supposons que U_1 et U_2 sont deux filtres propres tels que $C \subset U_1$ et $C \subset U_2$, alors d'après le resultat précédent U_1 et U_2 sont des ultrafiltres et en outre $b \in U_1$, $b \in U_2$. Alors $b \in U_1 \cap U_2 = F'$ et $C \subset F'$, d'où on déduit que F' est un ultrafiltre, et comme $F' \subseteq U_1$ et $F' \subseteq U_2$ on a $F' = U_1$ et $F' = U_2$, c'est-à-dire $U_1 = U_2$. Nous avons ainsi démontré que si C n'est un ultrafiltre il existe un seul filtre propre (qui est un ultrafiltre) qui contient à C comme partie propre.

2.7. LEMME. *Si A est une algèbre de Heyting qui vérifie la condition suivante: "Tout filtre complètement irréductible est bivalent ou trivalent" alors dans A est valable la formule suivante (quels que soient les éléments a et b de A)*:

(T3) $$(\neg a \to b) \wedge \big((b \to a) \to b\big) = b\,.$$

Démonstration. Supposons qu'il existent deux éléments a et b de A tels que $b \neq (\neg a \to b) \wedge \big((b \to a) \to b\big) = f$. Comme $b \leqslant f$, nous supposons donc que (1) $b < f$. Considérons le filtre principal $F = F(f)$, alors

[3] Un filtre maximal C parmi ceux que ne contiennent pas un élément $C \in A$ sera dit lié à c. D'après A. Monteiro [10] pour que C soit lié à c il faut et il suffit que pour tout $x \notin C$ l'on ait $x \to c \in C$.

d'après (1) on a (2) $b \notin F$, et par conséquent il existe un filtre complètement irréductible C qui contient à F et lié à l'élément b, en particulier (3) $b \notin C$.

Comme $f \leqslant ((b \to a) \to b)$, $f \leqslant (\neg a \to b)$ et $f \in C$ nous pouvons affirmer que: (4) $((b \to a) \to b) \in C$ et (5) $(\neg a \to b) \in C$.

Démontrons que (6) $b \to a \notin C$. En effet si (7) $b \to a \in C$, de (7) et (4) on tire $b \in C$ ce qui est impossible d'après (3). De (6) et (8) $a \leqslant b \to a$ on déduit (9) $a \notin C$.

Soient $P = F(G)$, $Q = F(H)$ les filtres engendrés par les ensembles $G = C \cup \{a\}$ et $H = C \cup \{b\}$. Montrons que (10) P est propre. Comme $P = F(G) = \{x \in A\colon a \to x \in C\}$, alors si $0 \in P$, c'est-à-dire si (11) $\neg a = a \to 0 \in C$, d'après (11) et (5) on déduit que $b \in C$, ce qui est en contradiction avec (3).

D'après (6) on peut affirmer que $a \notin Q$ et alors (12) Q est propre.

Comme $C \subseteq P$, $a \in P$ et (9) on a (13) $C \subset P$. Analoguement de $b \in Q$ et (3) on a (14) $C \subset Q$. De $a \in P$ et $a \notin Q$ on tire (15) $P \neq Q$. Remarquons que d'après (13) ou (14) on peut affirmer que (16) C n'est pas un ultrafiltre.

Les résultats (16), (10), (12), (15), (13) et (14) montrent que le filtre complètement irréductible C n'est pas un ultrafiltre et qu'il existent deux filtres propres distincts qui contiennent C comme une partie propre, ce qui est impossible par hypothèse.

2.8. Théorème. *Dans une algèbre H_3 tout filtre premier est complètement irréductible.*

Démonstration. Si P est un filtre premier alors $P = \bigcap_{i \in I} C_i$ où les C_i $(i \in I)$ sont des filtres complètement irréductibles. Comme dans une algèbre H_3 on a $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$ alors d'après A. Monteiro [7] la famille $\mathcal{K} = \{C_i\}_{i \in I}$ est une chaîne. $\mathcal{K}$ ne peut avoir plus de deux éléments, parce que si C_1, C_2, C_3 sont trois filtres distants de $\mathcal{K}$ tels que $C_1 \subset C_2 \subset C_3$, alors le filtre complètement irréductible C_1 est contenu proprement dans deux filtres propres distants, ce qui est impossible. Alors $\mathcal{K}$ contient au plus deux filtres C_1, C_2 et comme $P = C_1 \cap C_2$, et $C_1 \subset C_2$ ou $C_2 \subset C_1$ on a $P = C_1$ ou $P = C_2$ ce qui montre que P est complètement irréductible.

2.9. Corolaire. *Dans une algèbre H_3 les notions de filtre irréductible et complètement irréductible sont équivalentes.*

De 2.6 et 2.8 on déduit que: *Tout filtre premier d'une algèbre H_3 est bivalent ou trivalent.*

Si A est une algèbre de Heyting telle que tout filtre premier est bivalent ou trivalent, en particulier tout filtre complètement irréductible est bivalent ou trivalent, et alors d'après 2.7 on a: "A est H_3". Nous avons ainsi démontré le théorème 2.4.

Comme dans toute algèbre de Heyting A l'ensemble $\{1\}$, est l'intersection de tous les filtres premiers minimaux de A, on montre facilement, en tenant compte de 2.1 et 2.4 que:

2.10. Théorème. *Toute algèbre H_3, ayant au moins deux éléments (c'est-à-dire non triviale), est isomorphe à une sous-algèbre d'un produit cartésien d'algèbres T.*

Indiquons la démonstration dans ses lignes générales. Soit A une algèbre H_3 non triviale et E la famille de tous les filtres premiers minimaux de A et considérons la famille $\mathcal{F} = T^E$ de toutes les fonctions définies sur E et prenant ses valeurs dans T, algébrisées point par point. Il est clair que $\mathcal{F}$ est une algèbre H_3, car si nous posons $T_i = T$ pour tout $i \in E$ alors: $\mathcal{F} = \prod_{i \in E} T_i$.

Étant donné un filtre premier minimal $M \in E$ soit m l'homomorphisme naturel de A sur A/M. Dans ces conditions à chaque élément $f \in A$ faisons correspondre la fonction F définie par l'égalité $F(M) = m(f)$.

Comme $m(f) \in T$ alors $F \in \mathcal{F}$. On démontre facilement que la transformation $\varphi(f) = F$ est un isomorphisme de A sur une sous-algèbre de $\mathcal{F}$ et le théorème est démontré.

Dans le cas particulier des algèbres de Boole la démonstration que nous venons d'indiquer coïncide avec la démonstration du théorème de représentation de M. Stone (1936) pour ces algèbres.

3. Le radical trivalent d'une algèbre de Heyting.

Nous allons indiquer une construction qui permet d'obtenir une algèbre H_3 à partir d'une algèbre de Heyting donnée.

3.1. Définition. *Le radical trivalent d'une algèbre de Heyting A* est l'intersection $R_3(A)$ de tous les filtres bivalents et trivalents de A.

Cette notion est à rapprocher de celle de radical de A, qui est, d'après A. Monteiro ([7], p. 157), l'intersection $R_2(A)$ de tous les ultrafiltres de A. On peut démontrer les résultats suivants, que nous indiquons sans démonstration car ils ne seront pas utilisés par la suite.

3.2. Théorème. *$R_3(A)$ est le filtre engendré par les éléments de la forme*

$$((a \to c) \to b) \to (((b \to a) \to b) \to b).$$

3.3. Théorème. *Si A est une algèbre de Heyting alors $t(A) = A/R_3(A)$ est une algèbre H_3.*

3.4. Théorème. *Pour qu'une algèbre de Heyting A soit H_3 il faut et il suffit que $R_3(A) = \{1\}$.*

3.5. Théorème. *Si h est un homomorphisme d'une algèbre de Heyting A dans A' (ou A' est une algèbre H_3) et si D est le noyau de cet homomorphisme alors $R_3(A) \subseteq D$.*

3.6. Théorème. *Si A' (algèbre H_3) est une image homomorphe de l'algèbre de Heyting A alors A' est une image homomorphe de $t(A) = A/R_3(A)$.*

4. Les algèbres H_3 avec un nombre fini de générateurs libres. La notion d'algèbre H_3 libre se définit à la manière habituelle.

4.1. Définition. Si c est un nombre cardinal ($c > 0$) nous dirons que L_3 est une *algèbre H_3 avec c générateurs libres* si les conditions suivantes sont vérifiées:

(L′) L_3 contient un ensemble G de puissance c, telle que L_3 soit la sous-algèbre de L_3 engendrée par G.

(L″) Si f est une application de G dans une algèbre (H_3) A alors il existe un homomorphisme $\bar{f}$ de L_3 dans A que prolonge f, c'est-à-dire tel que $\bar{f}(g) = f(g)$ pour tout $g \in G$.

Lorsque nous voudrons mettre en évidence le nombre cardinal c nous écrirons $L_3 = L_3(c)$. Si n est un nombre entier ($n > 0$) nous écrirons $L_3(n)$ pour indiquer l'algèbre H_3 avec n générateurs libres.

D'après G. Birkhoff [3] on peut affirmer: l'existence de $L_3(c)$, quelque soit le nombre cardinal $c > 0$; que l'homomorphisme $\bar{f}$ indiquée dans (L″) est unique et que $L_3(n)$ est unique a moins d'un isomorphisme.

Nous nous proposons de déterminer l'algèbre $L_3(n)$ avec un nombre fini $n > 0$ de générateurs libres.

Soit $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un ensemble de générateurs libres de $L_3(n)$. D'après la définition de $L_3(n)$ toute application f de G dans T peut être prolongée a un et un seul homomorphisme $\bar{f}$ de $L_3(n)$ dans T.

Si X est une partie d'une algèbre de Heyting A, nous représenterons par $\overline{X}$ la sous-algèbre de A engendrée par l'ensemble X. Alors on peut affirmer que: (I) $\bar{f}(L_3(n)) = \overline{f(G)}$.

Comme B et T sont les seules sous-algèbres de T, alors on voit de suite que:

(II) $\bar{f}(L_3(n)) = B$ si et seulement si "$f(g) \neq a$ pour tout $g \in G$".

(III) $\bar{f}(L_3(n)) = T$ si et seulement si "il existe $g \in G$ tel que $f(g) = a$".

Soit P_f le noyau de $\bar{f}$ alors comme $\{1\}$ est un filtre premier de $\bar{f}(L_3(n))$ (dans chacun des deux cas possibles), on voit de suite que P_f est un filtre premier de $L_3(n)$.

4.2. Lemme. *Si $f, h \in T^G$ sont telles que $P_f = P_h$ alors $f = h$.*

Démonstration. Comme $P_f = P_h$ alors $L_3(n)/P_f = L_3(n)/P_h = L'$. Mais par 2.4, L' est isomorphe à B ou T, alors nous avons deux cas à considérer.

1) $L' = B$. Alors si $x \in P_f = P_h$ on a $\bar{f}(x) = \bar{h}(x) = 1$ et si $x \in L_3(n) - P_f = L_3(n) - P_h$ on a $\bar{f}(x) = \bar{h}(x) = 0$, c'est-à-dire $\bar{f}(x) = \bar{h}(x)$ pour tout $x \in L_3(n)$, et en particulier $\bar{f}(g) = \bar{h}(g)$ pour tout $g \in G$, et comme

$\bar{f}(g) = f(g)$ et $\bar{h}(g) = h(g)$ pour tout $g \in G$, nous avons démontré que $f(g) = h(g)$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire $f = h$.

2) $L' = T$. Soit U le seul ultrafiltre de $L_3(n)$ qui contient $P_f = P_h$, alors nous avons:

$$\bar{f}(x) = \bar{h}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in P_f = P_h\,, \\ a & \text{si} \quad x \in U - P_f = U - P_h\,, \\ 0 & \text{si} \quad x \in L_3(n) - U \end{cases}$$

et on démontre, comme dans le premier cas, que $f = h$.

Représentons par $\mathfrak{I}$ la famille de tous les filtres premiers de $L_3(n)$, alors:

4.3. Théorème. *La transformation $\psi(f) = P_f$ qu'à chaque élément f de T^G fait correspondre l'élément P_f de $\mathfrak{I}$, est une transformation biunivoque de T^G sur $\mathfrak{I}$.*

Démonstration. Soit $P \in \mathfrak{I}$, alors l'algèbre quotient $C = L_3(n)/P$ est isomorphe a B ou T. Soit m l'homomorphisme naturel de $L_3(n)$ sur C, alors m est un homomorphisme de $L_3(n)$ dans T, et soit f la restriction de m a l'ensemble G, alors f est une application de G dans T. Il est clair que le prolongement $\bar{f}$ de f vérifie $\bar{f} = m$ et que $P_f = P$, alors $\psi(f) = P$.

Si $f, g \in T^G$ sont tels que $\psi(f) = \psi(h)$, c'est-à-dire $P_f = P_h$ alors par 4.2 nous avons $f = h$.

Comme l'ensemble T^G a 3^n éléments alors l'ensemble $\mathfrak{I}$ a 3^n éléments et alors $\mathfrak{I}$ est fini. Soit E la famille de tous les filtres premiers minimaux de $L_3(n)$, alors nous savons (voir 2.10) que $L_3(n)$ est isomorphe à une sous-algèbre de l'algèbre $P = \prod_{i \in E} T_i$, où $T_i = T$ pour tout $i \in E$. Comme l'algèbre T est finie et l'ensemble E est aussi fini (E est un sous-ensemble de l'ensemble fini $\mathfrak{I}$), donc l'algèbre P est finie et par conséquence $L_3(n)$ est finie.

Comme $L_3(n)$ est un réticulé distributif fini, tous les filtres F de $L_3(n)$ sont des filtres principaux, c'est-à-dire que pour chaque filtre F il existe un élément $f \in L_3(n)$ tel que F est le filtre engendré par f, nous dirons aussi que f est le générateur de F. Il est bien connu que pour que P soit un filtre premier il faut et il suffit que le générateur p de P soit un élément premier.

D'après un résultat de G. Birkhoff [2] un réticulé distributif est déterminé a moins d'un isomorphisme par l'ensemble ordonné de ses éléments premiers. Dans ces conditions pour déterminer $L_3(n)$ il nous suffit de connaître l'ensemble ordonné $\Pi_3(n)$ de ses éléments premiers.

Si $f \in T^G$, nous écrirons $\varphi(f) = p_f$ où p_f est le générateur du filtre premier P_f, alors comme il existe une correspondance biunivoque entre les ensembles $\mathfrak{I}$ et $\Pi_3(n)$, il est évident que φ est une application biunivoque de T^G sur $\Pi_3(n)$, donc $\Pi_3(n)$ a 3^n éléments.

Il ne nous reste qu'à indiquer la relation d'ordre entre les éléments de $\Pi_3(n)$.

Pour connaître $f \in T^G$ il suffit de connaître les valeurs $f(g_i) = f_i \in T$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Nous pouvons donc représenter f par la suite $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et d'après 4.3 nous pouvons utiliser aussi cette suite pour représenter l'élément p_f.

Remarquons que si P est un ultrafiltre de $L_3(n)$ alors le générateur p de P est un élément minimal de $\Pi_3(n)$ et que si P est un filtre premier minimal de $L_3(n)$ alors p est un élément maximal de $\Pi_3(n)$. D'après le théorème 2.4 tout élément de $\Pi_3(n)$ est minimal ou maximal.

Caractérisons maintenant les suites qui représentent les éléments minimaux de $\Pi_3(n)$.

4.4. THÉORÈME. *Pour que p_f soit un élément minimal de $\Pi_3(n)$ il faut et il suffit que f_i soit égal à 0 ou 1.*

Démonstration. Si p_f est un élément minimal de $\Pi_3(n)$, P_f est un ultrafiltre et alors $L_3(n)/P_f = B$, c'est-à-dire $f_i = 0$ ou $f_i = 1$.

Reciproquement si $f_i = 0$ ou $f_i = 1$, alors l'homomorphisme $\bar{f}$ (extension de f) peut prendre seulement les valeurs 0 et 1, c'est-à-dire $\bar{f}(L_3(n)) = B$, ce qui montre que P_f est un ultrafiltre et par conséquent p_f est un élément minimal de $\Pi_3(n)$.

D'après 4.4 si p_f n'est pas un élément minimal de $\Pi_3(n)$ alors il existe un indice $i = 1, 2, \ldots, n$ tel que $f_i = a$.

4.5. THÉORÈME. *Pour que $p_f < p_h$ il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

(I) $f_i = 0$ *ou* $f_i = 1$,

(II) *il existe au moins un indice i tel que $f_i \neq h_i$,*

(III) $h_i = 0$ *si et seulement si* $f_i = 0$,

(IV) *si* $f_i = 1$ *alors* $h_i = a$ *ou* $h_i = 1$.

Démonstration. *La condition est nécessaire*: Si $p_f < p_h$ alors $P_h \subset P_f$ donc P_f est un ultrafiltre et alors (I) $f_i = 0$ ou $f_i = 1$.

Si $f_i = h_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, alors $f = h$ et par conséquent $\varphi(f) = \varphi(h)$, c'est-à-dire $p_f = p_h$, ce qui est impossible par hypothèse. Alors (II) est verifiée.

Si $f_i = f(g_i) = 0$, alors $\bar{f}(g_i) = f(g_i) = 0$, c'est-à-dire $g_i \notin P_f$, et comme $P_h \subset P_f$ on a $h(g_i) = \bar{h}(g_i) = 0$.

Si $\bar{h}(g_i) = h(g_i) = h_i = 0$, alors $g_i \notin P_h$. Si $g_i \in P_f - P_h$ on devrait avoir $\bar{h}(g_i) = a$, ce qui est impossible, alors $g_i \notin P_f$ c'est-à-dire $f_i = f(g_i) = \bar{f}(g_i) = 0$.

(IV) est une conséquence de (III).

La condition est suffisante: Soient f et h applications de G dans T vérifiant les conditions (I) à (IV). Nous allons démontrer que $P_h \subset P_f$ ou ce qui est équivalent: $p_f < p_h$.

D'après (I) et théorème 4.4 P_f est un ultrafiltre et d'après (II) $f \neq h$, d'où par 4.2 on peut affirmer que (a) $P_f \neq P_h$.

Soit U_h l'ultrafiltre qui contient P_h et considérons les ensembles suivants: $B = P_h \cap P_f$; $C = U_h \cap P_f \cap \complement P_h$; $D = \complement(U_h \cup P_f) = \complement U_h \cap \complement P_f$, alors:

$z \in B$ si et seulement si (1) $\bar{h}(z) = 1$ et (2) $\bar{f}(z) = 1$,
$z \in C$ si et seulement si (3) $\bar{h}(z) = a$ et (4) $\bar{f}(z) = 1$,
$z \in D$ si et seulement si (5) $\bar{h}(z) = 0$ et (6) $\bar{f}(z) = 0$,

(7) B est un filtre, (8) $B \cup C = P_f \cap U_h$ est un filtre, (9) D est un idéal, (10) les ensembles B et D ne sont pas vides.

(11) C n'est pas vide. En effet par (II) il existe $g' \in G$ tel que $f(g') \neq h(g')$, d'où par (I), (III) et (IV) on a $\bar{f}(g') = f(g') = 1$ et $\bar{h}(g') = h(g') = a$, c'est-à-dire $g' \in P_f$ et $g' \in U_h \cap \complement P_h$.

(12) Les ensembles B, C et D sont disjointes deux à deux.

Considérons l'ensemble $X = B \cup C \cup D$, alors on peut démontrer que X est une sous-algèbre de $L_3(n)$ qui contient l'ensemble G (nous n'indiquons pas la démonstration parce qu'elle est assez large, mais assez facile).

Alors on peut affirmer que $X = L_3(n)$, d'où

$$P_h = P_h \cap L_3(n) = P_h \cap (B \cup C \cup D) = (P_h \cap B) \cup (P_h \cap C) \cup (P_h \cap D)$$
$$= B \cup \emptyset \cup \emptyset = B = P_h \cap P_f$$

c'est-à-dire (b) $P_h \subseteq P_f$.

De (a) et (b) on tire $P_h \subset P_f$.

Nous savons que le nombre d'éléments minimaux de $\Pi_3(n)$ est égal au nombre d'ultrafiltres de $L_3(n)$ et par 4.4, ce nombre est égal à 2^n (nombre d'applications de G dans B).

Représentons les éléments minimaux de $\Pi_3(n)$ par $p_1, p_2, \ldots, p_{2^n}$, et considérons les ensembles:

$$C(p_i) = \{p \in \Pi_3(n) \colon p_i \leqslant p\} \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, 2^n.$$

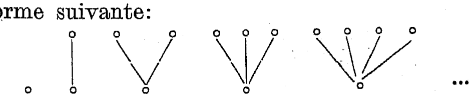
Il est facile de voir que $\Pi_3(n) = \sum_{i=1}^{2^n} C(p_i)$, où $\sum$ indique la somme cardinal d'ensembles ordonnés.

Observons encore que comme tout élément de $\Pi_3(n)$ est maximal ou minimal, alors les ensembles $C(p_i)$ ont les propriétés suivantes:

(1) Si $p \in C(p_i)$ alors $p_i \leqslant p$.

(2) Si $p, q \in C(p_i)$ et $p \neq q$ alors p et q sont incomparables.

Cela montre que les diagrammes de Hasse de les ensembles $C(p_i)$ sont de la forme suivante:



D'après Birkhoff [2], p. 450, si $R_i = R(C(p_i))$ est le réticulé distributif dont l'ensemble des éléments premiers est isomorphe à $C(p_i)$, pour $i = 1, 2, \ldots, 2^n$, alors

$$L_3(n) = \prod_{i=1}^{2^n} R_i \,. \tag{3}$$

Si nous représentons par $N(X)$ le nombre d'éléments d'un ensemble fini X, alors d'après (3) on a:

$$N(n) = N\big(L_3(n)\big) = N(R_1)N(R_2)\ldots N(R_{2^n}) = \prod_{i=1}^{2^n} N(R_i) \,.$$

Nous savons que chaque élément minimal de $\Pi_3(n)$ peut être représenté par une suite $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ d'éléments $f_i \in \{0, 1\}$. Alors le nombre n_k des éléments minimaux dont la suite $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ a exactement k *uns*, est donné par

$$n_k = \binom{n}{k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \,.$$

Par le théorème 4.5 on peut affirmer que le nombre p_k des éléments de $C(p_i)$, où p_i est une suite avec exactement k *uns*, est égal au nombre d'applications d'un ensemble avec k éléments dans un ensemble avec deux éléments, c'est-à-dire:

$$p_k = 2^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \,.$$

Alors le nombre m_k des éléments maximaux de $C(p_i)$, où p_i est une suite avec exactement k *uns*, est

$$m_k = p_k - 1 = 2^k - 1 \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \,.$$

Dans ces conditions le nombre r_k des éléments de $R_i = R\big(C(p_i)\big)$, où p_i est une suite avec exactement k *uns*, est donné par

$$r_k = 2^{m_k} + 1 = 2^{2^k - 1} + 1 \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

et alors

$$N(n) = \prod_{k=0}^{n} (r_k)^{n_k} = \prod_{k=0}^{n} (2^{2^k-1} + 1)^{\binom{n}{k}}.$$

En particulier $N(1) = 6$; $N(2) = 162$; $N(3) = 5078214$.

Bibliographie

[1] G. Birkhoff, *On the combination of subalgebras*, Proc. Camb. Phil. Soc. 29 (1933), pp. 441–464.

[2] — *Rings of sets*, Duke Math. J. 3 (1937), pp. 443–454.

[3] — *Lattice theory*, Revised edition, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 25, New York 1948.

[4] — and O. Frink Jr., *Representations of lattice by sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), pp. 299–316.

[5] A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys. mathem. Klasse, (1930), pp. 42–56.

[6] J. Łukasiewicz, *Die Logik und das Grundlagenproblem*, Les Entretiens de Zürich (1938), p. 82–100, discussion, pp. 100–108.

[7] A. Monteiro, *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques*, Segundo Symposium Latino Americano de Matemática. Centro de Cooperación Científica de la Unesco para América Latina. Montevideo (1954), pp. 129–162.

[8] — *Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer*, Revista de la Unión Matemática Argentina 17 (1955), pp. 149–160.

[9] — *Algebra de la Lógica I*, Cours réalizé à l'Universidad Nacional del Sur Bahía Blanca, Argentina 1958.

[10] — *Algebra de la Lógica II*, Cours réalizé à l'Universidad Nacional del Sur Bahía Blanca, Argentina 1960.

[11] H. Rasiowa and R. Sikorski, *Algebraic treatment of the notion of satisfiability*, Fund. Math., 40 (1953), pp. 62–95.

[12] — and — *The Mathematics of Metamathematics*, Monografie Matematyczne, tom 41, Warszawa 1963.

[13] L. Rieger, *On the lattice theory of Brouwerian propositional logic*, Acta Fac. Nat. Univ. Carol. Prague 189 (1949), pp. 3–40.

[14] T. Skolem, *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations — und Summatuons — probleme, welche Gewise Klassen von Aussagen betreffen*, Videnskapsselskapets Skrifter, I. Math. Nat. Klasse 3 (1919), p. 37.

[15] M. H. Stone, *The theory of representation of Boolean algebras*, Trans. of the Amer. Math. Soc. 40 (1936), pp. 37–111.

[16] I. Thomas, *Finite limitations on Dummett's LC*, Notre Dame J. Formal Logic 3 (1962), pp. 170–174.

[17] M. Ward, *Structure residuation*, Ann. of Math., 33 (1938), pp. 558–568.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR BAHÍA BLANCA
Argentina

Reçu par la Rédaction le 31. 3. 1970