This is the only place where we need the fact that $D$ is torsion-free. We arrive at the desired $h\colon A \to D$ when $A \setminus B_\beta$ is empty; that this must occur for some ordinal $\beta$ obviously follows from the axiom of substitution.

Lévy [3] has shown that $FS_1$ is strictly weaker than the axiom of choice. On the other hand, $FS_1$ is still not provable in the set theory $S$ (see Bleicher [2]). It would be nice to know to what extent the statement that every divisible subgroup (not necessarily torsion-free) of an abelian group is a direct summand is stronger than $FS_1$.

**References**

[1] M. N. Bleicher, *Some theorems on vector spaces and the axiom of choice*, Fund. Math. 54 (1964), pp. 97–107.
[2] — *Multiple choice axioms and axioms of choice for finite sets*, Fund. Math. 57 (1965), pp. 247–252.
[3] A. Lévy, *Axioms of multiple choice*, Fund. Math. 50 (1961), pp. 475–483.
[4] A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund. Math. 32 (1939), pp. 201–252.

*Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1970*

# Sur la dérivation $k$-pseudo-symétrique des fonctions numériques (1)

par

**Santi Valenti** (Palermo)

**Introduction.** Dans son mémoire [1] consacré aux fonctions (2) mesurables, M. Khintchine souligne, entre autre, les considérations suivantes:

"... sous la condition de négliger les ensembles de mesure nulle, la notion de dérivée symétrique ne généralise point la notion ordinaire de dérivée; d'une manière plus précise, l'existence d'une dérivée symétrique presque partout dans un intervalle (ou dans un ensemble) entraîne l'existence d'une dérivée ordinaire presque partout dans l'intervalle (resp. ensemble) considéré...".

Ces observations sont là justifiées par un théorème qui est, en effet, assez plus général, dès que l'Auteur utilise seulement l'hypothèse que la limite

$$\text{(I)} \qquad \overline{\lim_{h,0}} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

soit finie dans l'ensemble considéré.

Ici, au moyen d'une proposition donnée en § 2, nous montrons que les observations de M. Khintchine peuvent s'étendre au cas où le mot "symétrique" soit remplacé par l'autre "$k$-pseudo-symétrique", tout en laissant inalteré son caractère de généralité à l'hypothèse traduisante la (I).

La dérivée que nous appellons "$k$-pseudo-symétrique", à savoir la limite

$$\text{(II)} \qquad \lim_{h,0+} \frac{f(x+kh)-f(x-h)}{(k+1)h}$$

considérée pour une valeur fixée de $k > 0$, a reçu en [2] (on ne comprend pas pourquoi) la dénomination de "dérivée de Schwarz généralisée"; on donne là l'énoncé d'un cas particulier de notre résultat.

---

(1) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Raggruppamenti di Ricerca del Comitato per le Scienze Matematiche del C.N.R.

(2) Nous nous occupons, dans toute cette note, de fonctions numériques d'une variable réelle.

§ **1.** Nous ferons recours, pour les nombres dérivés d'une fonction $f(x)$, aux notations suivantes:

$f^{+}(x) =$ dérivé supérieur droit de $f(x)$;
$f^{-}(x) =$ dérivé supérieur gauche de $f(x)$;
$f_{+}(x) =$ derivé inférieur droit de $f(x)$;
$f_{-}(x) =$ derivé inférieur gauche de $f(x)$.

Nous rappelons aussi le théorème suivant (de M. me Young [3]), dont nous ferons usage dans ce qui suit.

Ce théorème, qui est une généralisation du théorème de M. Denjoy [4] pour les nombres dérivés des fonctions continues et qui a été à la fois généralisé par M. Banach et par M. Saks [5] aux fonctions quelconques, affirme:

THÉORÈME. *Si $f(x)$ est une fonction mesurable sur l'ensemble $E$, les implications suivantes ont lieu sur une épaisseur pleine de $E$:*

1) $f_{+}(x)$ *et* $f^{+}(x)$ *finis* $\Rightarrow f_{+}(x) = f^{+}(x)$;
2) $f_{-}(x)$ *et* $f^{-}(x)$ *finis* $\Rightarrow f_{-}(x) = f^{-}(x)$;
3) $f_{+}(x)$ *ou* $f^{+}(x)$ *infini* $\Rightarrow f_{+}(x) \neq f^{+}(x)$;
4) $f_{-}(x)$ *ou* $f^{-}(x)$ *infini* $\Rightarrow f_{-}(x) \neq f^{-}(x)$;
5) $f_{+}(x)$ *et* $f^{-}(x)$ *finis* $\Rightarrow f_{+}(x) = f^{-}(x)$;
6) $f^{+}(x)$ *et* $f_{-}(x)$ *finis* $\Rightarrow f^{+}(x) = f_{-}(x)$;
7) $f_{+}(x)$ *et* $f^{-}(x)$ *infinis* $\Rightarrow f_{+}(x) \neq f^{-}(x)$;
8) $f^{+}(x)$ *et* $f_{-}(x)$ *infinis* $\Rightarrow f^{+}(x) \neq f_{-}(x)$.

Il en suit immédiatement le

LEMME (Y). *Si $f(x)$ est une fonction mesurable sur l'ensemble $E$ et si, sur une épaisseur pleine de $E$, les inégalités suivantes ont lieu:*

$$f^{+}(x) \leqslant 0 \quad \textit{et} \quad f^{-}(x) \leqslant 0\,,$$

*alors $f(x)$ a une dérivée (finie) en presque tout point de $E$.*

Nous allons maintenant préciser la question qui est l'objet de cet article et démontrer le théorème annoncé dans l'Introduction.

§ **2.** Soient:

1) $D$ un sous-ensemble de la droite réelle, désignée par $R$;
2) $\Delta$ un intervalle qui contient $D$;
3) $F(x)$ une fonction numérique mesurable (au sens de M. Lebesgue) assignée sur $\Delta$;
4) $\mathfrak{P}(D)$ l'ensemble des parties de $D$;
5) $\Phi$ une correspondance, entre $J \equiv )0, +\infty($ et un sous-ensemble $\{S_k\}$ de $\mathfrak{P}(D)$, ainsi définie:

$$\Phi\colon\ \forall k \in J,\ k \to \Phi(k) = S_k \in \{S_k\}$$



avec

$$S_k \equiv \left\{x \in D \,\middle|\, \overline{\lim_{h,0+}} \frac{F(x+kh)-F(x-h)}{(k+1)h} < +\infty\right\}.$$

Le théorème suivant a lieu:

THÉORÈME. *$F(x)$ a une dérivée (finie) en presque tout point de $\Phi(k)$, $\forall k \in J$.*

Démonstration. Désignons par:

a) $E \subset D$ l'ensemble où $F(x)$ a une dérivée (finie);
b) $\bar{E} \subset D$ le complémentaire de $E$ par rapport à $D$;
c) $X_k$ l'ensemble $\bar{E} \cap \Phi(k)$;
d) $m(A)$ (resp. $m_e(A)$) la mesure lebesguienne (resp. extérieure) de l'ensemble $A \subset R$, $\forall A \subset R$;
e) $N^{+}$ l'ensemble des entiers positifs $n$;
f) $\hat{A}$ l'ensemble des points de densité extérieure de l'ensemble $A \subset R$, $\forall A \subset R$.

Définissons, en outre, une correspondance $\Gamma_k$, entre $N^{+}$ et un sous-ensemble $\{Y_k^n\}$ de l'ensemble $\mathfrak{P}(X_k)$ des parties de $X_k$, de la façon suivante:

$$\Gamma_k\colon\ \forall n \in N^{+},\ n \to \Gamma_k(n) = Y_k^n \in \{Y_k^n\} \tag{1}$$

avec

$$Y_k^n \equiv \left\{x \in X_k \,\middle|\, 0 < h < \frac{1}{n} \Rightarrow F(x+kh)-F(x-h) < (k+1)hn\right\}. \tag{1 bis}$$

L'implication suivante a lieu:

$$F(x+kh)-F(x-h) < (k+1)hn$$
$$\Longleftrightarrow F(x+kh)-n(x+kh)-F(x-h)+n(x-h) < 0\,,$$

d'où, pour la fonction mesurable

$$f_n(x) = F(x)-nx\,,$$

on tire:

$$x \in \Gamma_k(n) \Longleftrightarrow \left[0 < h < \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x+kh)-f_n(x-h) < 0\right],\ \forall n \in N^{+}. \tag{2}$$

Supposons maintenant, par impossible, qu'il soit:

$$m_e(X_k) > 0\,; \tag{3}$$

la définition donnée pour $X_k$ nous assure qu'on aura:

$$X_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_k(n)\,,$$

d'où:

$$\exists r \in N^{+}\colon\ m_e[\Gamma_k(r)] > 0\,. \tag{4}$$

Or ça nous dit que $\hat{\Gamma}_k(r)$ n'est pas vide, ce qui donne sens à l'implication:

(5) $$z \in \hat{\Gamma}_k(r) \Rightarrow \left\{ \exists t,\ 0 < t < \frac{1}{r}:\ y \in )z, z+t( \right.$$

$$\Rightarrow m_e[\Gamma_k(r) \cap )z, y(] > \left\langle \begin{array}{ll} \dfrac{2k+1}{2k+2}(y-z) & \text{si} \quad k \geqslant 1 \\ \dfrac{k+2}{2k+2}(y-z) & \text{si} \quad 0 < k < 1 \end{array} \right\} .$$

A l'aide de cette-ci on peut prouver que:

(6) $$y \in )z, z+t( \Rightarrow f_r(z) > f_r(y) .$$

Supposons, en effet, que ce ne soit pas, c'est-à-dire que l'ensemble:

$$V_r \equiv \{y \in )z, z+t( |\ f_r(y) \geqslant f_r(z)\}$$

ne soit pas vide; et considérons les ensembles suivants (tous les deux mesurables):

(7) $$I_r \equiv \{x \in )z, y( |\ f_r(x) \geqslant f_r(z)\} ;$$

(8) $$I'_r \equiv )z, y( - I_r ;$$

(il vient:

(9) $$x \in I'_r \Rightarrow f_r(x) < f_r(z) \leqslant f_r(y) ,$$

tout de suite de la définition).

Définissons, en outre, sur $I_r \cup I'_r \equiv )z, y($, la transformation $T$ de la manière suivante:

(10) $$T: \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I_r,\ x \to Tx = \dfrac{1}{k+1}(kz+x) ; \\ \forall x \in I'_r,\ x \to Tx = \dfrac{k}{k+1}\left(x + \dfrac{y}{k}\right) . \end{array} \right.$$

Or, l'une au moins des inégalités suivantes a lieu:

(11) $$m(I_r) \geqslant \frac{y-z}{2} ;$$

(12) $$m(I'_r) \geqslant \frac{y-z}{2} ;$$

d'autre part, en tenant compte de (10) et (5), on peut écrire les implications:

(11 bis) $$(11) \Rightarrow m[T(I_r)] \geqslant \frac{y-z}{2k+2} \Rightarrow T(I_r) \cap \Gamma_k(r) \neq \emptyset ;$$

(12 bis) $$(12) \Rightarrow m[T(I'_r)] \geqslant \frac{y-z}{2k+2} k \Rightarrow T(I'_r) \cap \Gamma_k(r) \neq \emptyset ;$$



on en conclut que l'une au moins des inégalités suivantes a lieu:

(11 ter) $$T(I_r) \cap \Gamma_k(r) \neq \emptyset ;$$

(12 ter) $$T(I'_r) \cap \Gamma_k(r) \neq \emptyset .$$

Si la première a lieu, on déduit, en utilisant (10) et (7):

$$x \in T(I_r) \cap \Gamma_k(r) \Rightarrow (k+1)x - kz \in I_r \Rightarrow f_r[x + k(x-z)] \geqslant f_r(z)$$
$$= f_r[x-(x-z)] \Rightarrow f_r[x+k(x-z)] - f_r[x-(x-z)] \geqslant 0 ,$$

ce qui est en contradiction avec (2), dès qu'on a:

$$x - z < t < \frac{1}{r} .$$

Si, au contraire, la seconde a lieu, la (10) et la (8) imposent:

$$x \in T(I'_r) \cap \Gamma_k(r) \Rightarrow \frac{1}{k}[(k+1)x - y] \in I'_r \Rightarrow f_r\left[x - \frac{1}{k}(y-x)\right] < f_r(y)$$
$$= f_r[x+(y-x)] \Rightarrow f_r[x+(y-x)] - f_r\left[x - \frac{1}{k}(y-x)\right] > 0 ,$$

ce qui est encore en contradiction avec (2), dès qu'on a:

$$\frac{1}{k}(y-x) < t < \frac{1}{r} .$$

La conclusion c'est que l'ensemble $V_r$ est dépourvu d'éléments, ce qui se ramène à dire que:

(13) $$\forall z \in \hat{\Gamma}_k(r) , \quad f_r^+(z) \leqslant 0 .$$

On démontre de la même façon qu'il est:

(14) $$\forall z \in \hat{\Gamma}_k(r) , \quad f_r^-(z) \leqslant 0 .$$

La (13) et la (14) assurent, d'après le Lemme (Y), que la fonction $f_r(x)$ a une dérivée (finie) en presque tout point de $\hat{\Gamma}_k(r)$, donc en presque tout point de $\Gamma_k(r)$.

Par conséquent, $F(x)$ aura aussi une dérivée (finie) en presque tout point de $\Gamma_k(r)$, qui est une des composantes de $X_k$. Mais cette affirmation est contradictoire avec les positions c), b) et a). D'où la thèse.

**Conclusions.** Il va sans dire que, pour $k = 1$, on retrouve le résultat cité [1] de M. Khintchine; et en effet, dans ce cas, l'entente de considérer la plus grande limite du rapport

$$\frac{F(x+kh) - F(x-h)}{(k+1)h}$$

seulement pour $h>0$ n'affaiblit l'hypothèse que d'un point de vue étroitement formal.

Notons encore que le théorème en § 2, que nous avons donné sous la forme de condition suffisante, est tout de suite ramené à la forme de condition nécessaire au moyen de la décomposition:

$$\frac{F(x+kh)-F(x-h)}{(k+1)h}=\frac{F(x+kh)-F(x)}{(k+1)h}+\frac{F(x)-F(x-h)}{(k+1)h}.$$

Ça suffit pour en déduire que l'existence de la dérivée $k$-pseudo-symétrique pour une valeur fixée de $k>0$ entraîne son existence pour toute valeur positive de $k$.

**Bibliographie**


[1] A. Khintchine, *Recherches sur la structure des fonctions mesurables*, Fund. Math., 9 (1927), pp. 217–219.

[2] U. Oliveri, *Sulla derivata di Schwarz generalizzata*, Rendiconti Circ. Mat. Palermo, s. II, t. XVII, f. II, (1968), pp. 217–225. (La démonstration est insatisfaisante).

[3] G. C. Young, *On the derivates of a function*, Proc. London Math. Soc., (2) 15 (1916), pp. 360–384.

[4] A. Denjoy, *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*, Journal de Math., (7) 1 (1915), pp. 174–195.

[5] S. Saks, *Sur les nombres dérivés des fonctions*, Fund. Math., 5 (1924), pp. 98–104.


*Reçu par la Rédaction le 11. 12. 1970*

# Concerning product of paracompact spaces

by

**R. Telgársky** (Bratislava)

This paper is a continuation of [9]. It has 3 sections. Section 1 deals with absolute paracompactness (see [9], Section 3) for which a product theorem is proved (Th. 1.1). Section 2, based on an analysis of a construction of E. Michael ([6], Examples 1.4 and 1.5), treats of the property $C''$ (see [4], p. 527, Th. 5) and of some singular spaces. Section 3 contains some positive facts about the Hurewicz property (see [5], p. 209), e.g. that it is $\sigma$-additive (Th. 3.3), perfect (Cor. 3.11) and productive if at least one of the two factors is $C$-scattered (Th. 3.4 and 3.5).

The topological terminology is that of [1]. $N$ denotes the set of all positive integers.

**1.** A Cartesian product of an absolutely paracompact space (see [9], Section 3) by a discrete space is absolutely paracompact. This assertion can be generalized as follows:

THEOREM 1.1. *If $X$ is a scattered paracompact space and $Y$ is an absolutely paracompact space, then the product space $X\times Y$ is absolutely paracompact.*

Proof. Let $Z$ be a paracompact space such that $X\times Y$ is a closed subspace of $Z$. Let $\mathcal{B}$ be an outer base for $X\times Y$ in $Z$. We shall prove by transfinite induction over $\alpha$ such that $X^{(\alpha)}=0$ that $\mathcal{B}$ contains a locally finite covering of $X\times Y$ in $Z$.

If $X^{(0)}=0$, then $X=0$, and so the theorem is trivially true.

If $X^{(\alpha+1)}=0$, then $X^{(\alpha)}$ is a closed discrete set in $X$. Clearly, $X^{(\alpha)}\times Y$ is closed in $Z$ and absolutely paracompact as a free union of absolutely paracompact spaces. So $\mathcal{B}$ contains a locally finite covering $\mathcal{A}_1$ of $X^{(\alpha)}\times Y$ in $Z$. Since $(X\times Y)-\bigcup\mathcal{A}_1$ is closed in $Z$, it is paracompact. Now it is sufficient to prove that $(X\times Y)-\bigcup\mathcal{A}_1$ has a relatively open cover by sets whose closures are absolutely paracompact. If $\langle x,y\rangle\in(X\times Y)-\bigcup\mathcal{A}_1$, then $x\notin X^{(\alpha)}$. Since $X$ is regular, there is an open nbhd $U_x$ of $x$ in $X$ such that $\overline{U_x}\cap X^{(\alpha)}=0$. So $\overline{U}_x^{(\beta)}=0$ for some $\beta<\alpha$. Hence $\overline{U_x}\times Y$ is absolutely paracompact by the inductive assumption. Now, $(U_x\times Y)-\bigcup\mathcal{A}_1$ is an open nbhd of $\langle x,y\rangle$ in $(X\times Y)-\bigcup\mathcal{A}_1$ whose closure is absolutely