[7] A. Lelek and W. Nitka, *On convex metric spaces I*, Fund. Math. 49 (1961), pp. 183–204.
[8] W. Nitka, *On convex metric spaces II*, Fund. Math. 72 (1971), pp. 115–129.
[9] — *On locally convex metric spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys. 19 (1971), pp. 383–386.
[10] D. Rolfsen, *Characterizing the 3-cell by its metric*, Fund. Math. 68 (1970), pp. 215–223.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
WROCŁAW UNIVERSITY

*Reçu par la Rédaction le 20. 11. 1970*

# An algebraic equivalent of a multiple choice axiom

by

**M. K. Armbrust** (Köln)

Adopting the notation of Bleicher [1], let $FS_1$ be the following statement:

For every set $\mathcal{C}$ of non-empty sets there exists a function $f$ defined on $\mathcal{C}$ such that, for each $T \in \mathcal{C}$, $f(T)$ is a non-empty finite subset of $T$.

It has been shown (op. cit.) that $FS_1$ can be derived in a suitable set theory without the axiom of choice (e.g., the system $S$ of Mostowski [4]) from the assumption that there exists a field $F$ such that, for every vector space $V$ over $F$, each subspace of $V$ is a direct summand of $V$.

Now a vector space over the rationals is the same thing as a torsion-free divisible abelian group. So, clearly, if we assume the apparently stronger condition that, for every abelian group $A$, each torsion-free divisible subgroup of $A$ is a direct summand of $A$, then $FS_1$ can be effectively proved. It turns out, in fact, that this condition is equivalent to $FS_1$.

THEOREM. *$FS_1$ effectively implies that, for every abelian group $A$, each torsion-free divisible subgroup of $A$ is a direct summand of $A$.*

Proof. Let $D$ be a torsion-free divisible subgroup of $A$. We will construct a homomorphism $h\colon A \to D$ such that $h(d) = d$ for each $d \in D$. To this end, let $f$ be a multiple choice function for the set of all non-empty subsets of $A$, and let $g$ be a multiple choice function for the set of all non-empty sets of homomorphisms from subgroups of $A$ into $D$. The following recursion defines a chain of homomorphisms $h_\alpha$ from subgroups $B_\alpha$ of $A$ into $D$ such that $D \subseteq B_\alpha$ and $h_\alpha(d) = d$ for each $d \in D$:

$$h_0 = \mathrm{id}_D .$$

If $\alpha$ is a limit ordinal,

$$h_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} h_\beta .$$

If $\alpha = \beta+1$: Let $H$ be the set of all homomorphic extensions of $h_\beta$ to the subgroup generated by $B_\beta$ and the elements in $f(A \setminus B_\beta)$. The proof that $H$ is non-empty is completely constructive since $f(A \setminus B_\beta)$ is finite, even if $D$ were not torsion-free. Let $g(H) = \{h_1', \ldots, h_n'\}$. Then we define

$$h_\alpha = \frac{1}{n}(h_1' + \ldots + h_n') .$$

This is the only place where we need the fact that $D$ is torsion-free. We arrive at the desired $h\colon A \to D$ when $A \setminus B_\beta$ is empty; that this must occur for some ordinal $\beta$ obviously follows from the axiom of substitution.

Lévy [3] has shown that $FS_1$ is strictly weaker than the axiom of choice. On the other hand, $FS_1$ is still not provable in the set theory $S$ (see Bleicher [2]). It would be nice to know to what extent the statement that every divisible subgroup (not necessarily torsion-free) of an abelian group is a direct summand is stronger than $FS_1$.

### References


[1] M. N. Bleicher, *Some theorems on vector spaces and the axiom of choice*, Fund. Math. 54 (1964), pp. 97–107.

[2] — *Multiple choice axioms and axioms of choice for finite sets*, Fund. Math. 57 (1965), pp. 247–252.

[3] A. Lévy, *Axioms of multiple choice*, Fund. Math. 50 (1961), pp. 475–483.

[4] A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund. Math. 32 (1939), pp. 201–252.


*Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1970*

# Sur la dérivation $k$-pseudo-symétrique des fonctions numériques (1)

par

**Santi Valenti** (Palermo)

**Introduction.** Dans son mémoire [1] consacré aux fonctions (2) mesurables, M. Khintchine souligne, entre autre, les considérations suivantes:

"... sous la condition de négliger les ensembles de mesure nulle, la notion de dérivée symétrique ne généralise point la notion ordinaire de dérivée; d'une manière plus précise, l'existence d'une dérivée symétrique presque partout dans un intervalle (ou dans un ensemble) entraîne l'existence d'une dérivée ordinaire presque partout dans l'intervalle (resp. ensemble) considéré...".

Ces observations sont là justifiées par un théorème qui est, en effet, assez plus général, dès que l'Auteur utilise seulement l'hypothèse que la limite

$$\text{(I)} \qquad \overline{\lim_{h,0}} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

soit finie dans l'ensemble considéré.

Ici, au moyen d'une proposition donnée en § 2, nous montrons que les observations de M. Khintchine peuvent s'étendre au cas où le mot "symétrique" soit remplacé par l'autre "$k$-pseudo-symétrique", tout en laissant inalteré son caractère de généralité à l'hypothèse traduisante la (I).

La dérivée que nous appellons "$k$-pseudo-symétrique", à savoir la limite

$$\text{(II)} \qquad \lim_{h,0+} \frac{f(x+kh)-f(x-h)}{(k+1)h}$$

considérée pour une valeur fixée de $k>0$, a reçu en [2] (on ne comprend pas pourquoi) la dénomination de "dérivée de Schwarz généralisée"; on donne là l'énoncé d'un cas particulier de notre résultat.

(1) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Raggruppamenti di Ricerca del Comitato per le Scienze Matematiche del C.N.R.

(2) Nous nous occupons, dans toute cette note, de fonctions numériques d'une variable réelle.