Thus A_i is an m-group. Since A generates G, A_i generates $G_i = pr_i^* f^* G$. For any $i \in I$ and $a_1, \ldots, a_m \in A$ we have

$$[(fa_1)_i \ldots (fa_m)_i] = (f[a_1 \ldots a_m])_i = (f(a_1 \cdot \ldots \cdot a_m))_i = (fa_1 \cdot \ldots \cdot fa_m)_i = (fa_1)_i \cdot \ldots \cdot (fa_m)_i \, .$$

It follows that for any $i \in I$ and any $x_1, \ldots, x_m \in A_i$ we have

$$[x_1 \ldots x_m] = x_1 \cdot \ldots \cdot x_m \, .$$

Thus G_i covers A_i, as desired. This completes the proof.

THEOREM 2.10. *Let $X \subseteq A$ generate an m-group A freely covered by a group G. Then A is free on X if and only if G is free on X.*

Proof. First suppose that G is free on X. Consider any m-group B and any map $f\colon X \to B$. Let B be covered by a group H. Then there exists a homomorphism $g\colon G \to H$ such that $f \subseteq g$. Clearly $g|A$ is a homomorphism from A into the m-group reduct C of H. Since $g^* X \subseteq B$ and X generates A, $g^* A \subseteq B$. Thus $g|A$ is a homomorphism from A into B, as desired. [Note that in this part of the proof we did not use the assumption that G *freely* covers A.]

Conversely, suppose A is free on X. Let H be any group, and suppose that $f\colon X \to H$. Let B be the m-group reduct of H. Then there exists a homomorphism $g\colon A \to B$ with $f \subseteq g$. Define $g^+\colon A \to G \times H$ by $g^+ a = (a, ga)$ for all $a \in A$. Clearly g^+ is an isomorphism from A into the m-group reduct of $G \times H$. By the well-known replacement theorem of universal algebra there is a group $K \supseteq A$ with an isomorphism h of K onto $G \times H$ such that $g^+ \subseteq h$. Let K' be the subgroup of K generated by A. It is easily verified that K' covers A. Since G freely covers A, it follows that there is a homomorphism $k\colon G \to K'$ which is the identity on A. Then $pr_1 \circ h \circ k$ is a homomorphism from G into H which extends f, as desired.

References

[1] R. H. Bruck, *A survey of binary systems*, 1966, pp. viii+185.

[2] W. Dörnte, *Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff*, Math. Zeit. 29 (1928), pp. 1–19.

[3] П. Глускин, *Позиционные оперативы*, Mat. Sb. 68 (1965), pp. 444–472.

[4] G. Grätzer, *Universal algebra*, 1968, pp. xvi+368.

[5] L. Henkin, D. Monk and A. Tarski, *Cylindric algebras*, Part I, North-Holland, 1971, p. 508.

[6] D. Monk and F. Sioson, *m-semigroups, semigroups, and function representations*, Fund. Math. 59 (1966), pp. 233–241.

[7] E. Post, *Polyadic groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), pp. 208–350.

[8] R. Sikorski, *Products of abstract algebras*, Fund. Math. 39 (1952), pp. 211–228.

Reçu par la Rédaction le 2. 8. 1969

Nichtaxiomatisierbarkeit von Satzmengen durch Ausdrücke spezieller Gestalt

von

Kurt Hauschild (Berlin)

In der vorliegenden Arbeit geht es u.a. um folgende Fragen: (1) Ist die Menge der in einer Algebra $\mathfrak{A}$ gültigen (elementaren) Sätze durch Aussagen universell beschränkter Tiefe axiomatisierbar? (2) Gibt es in $\mathfrak{A}$ eine (elementar) definierbare Funktion, die sich von allen durch Ausdrücke einer universell beschränkten Tiefe (elementar) definierbaren Funktionen fast überall unterscheidet? Für den Fall, daß in $\mathfrak{A}$ eine Wohlordnung definierbar ist und für jedes Element ein Term zur Verfügung steht, wird gezeigt, dass (1) verneint werden muss, sobald (2) zu bejahen ist. Dieses Resultat läßt sich noch wesentlich verschärfen. Einerseits braucht in $\mathfrak{A}$ nur ein Teil des elementaren Wohlordnungsschemas zu gelten, andererseits kann man anstelle der Ausdrücke universell beschränkter Tiefe auch andere "hereditäre" Ausdrucksmengen betrachten. Dabei sind hereditäre Ausdrucksmengen im wesentlichen solche, die gegenüber der Bildung von Teilausdrücken abgeschlossen sind.

Die Terminologie ist die in der Modelltheorie allgemein übliche, so dass ich auf diesbezügliche Erörterungen glaube verzichten zu dürfen. Nur folgendes sei bemerkt: Variable werden grundsätzlich mit kleinen normalen lateinischen Buchstaben notiert $(x, y, z, \ldots)$. Elemente mit kleinen fettgedruckten lateinischen Buchstaben $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots)$, Ausdrücke mit kleinen griechischen Buchstaben $(\varphi, \psi, \ldots)$; $\mathfrak{A} \models \varphi(\boldsymbol{x})$ soll bedeuten, daß $\varphi(x)$ in der Algebra $\mathfrak{A}$ gültig wird bei jeder Belegung, die Variable x mit dem Element $\boldsymbol{x}$ belegt.

Es sei L eine elementare Sprache (mit Identität). $Y \subseteq L$ sei eine zunächst beliebige Menge von Ausdrücken. Wir wollen voraussetzen, daß L ein zweistelliges Relationszeichen $\leqslant$ enthält. $\mathfrak{A}$ sei eine Interpretation von L, für die folgendes gilt:

$$(1) \quad \mathfrak{A} \models \forall x\, x \leqslant x \wedge \forall x \forall y \forall z (x \leqslant y \wedge y \leqslant z \to x \leqslant z) \wedge \forall x \forall y (x \leqslant y \vee y \leqslant x) \wedge \wedge \forall x \forall y (x \leqslant y \wedge y \leqslant x \to x = y) \wedge \forall x \exists y (x \leqslant y \wedge x \neq y) \, ,$$

$$(2) \quad \mathfrak{A} \models \forall y_1 \ldots y_k \big(\exists y \varphi(y, y_1, \ldots, y_k) \to \exists y_0 \varphi(y_0, y_1, \ldots, y_k) \wedge \wedge \forall y^* (\varphi(y^*, y_1, \ldots, y_k) \to y_0 \leqslant y^*)\big) \, ,$$

für jedes $\varphi(y, y_1, \ldots, y_k) \in Y$.

Die Interpretation von $\leqslant$ liefert also eine Ordnung ohne letztes Element derart, daß jede mit Hilfe von Ausdrücken aus Y definierbare Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Es sei I die Trägermenge von $\mathfrak{A}$, und es seien $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x})$ Funktionen von I in I, sowie $\varphi(y, y_1, \ldots, y_k) \in Y$. Unter dem φ-*Indukt* der Funktionen $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x})$ verstehen wir die Funktion

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \min\{y \mid \mathfrak{A} \models \varphi(y, f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x}))\}, & \text{falls } \mathfrak{A} \models \exists y \varphi(y, f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x})), \\ \boldsymbol{x} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Minimumbildung ist natürlich im Sinne der Interpretation von $\leqslant$ zu verstehen; die Existenz des Minimums ist durch (2) gesichert.

Es sei Δ_Y die kleinste Menge von Funktionen von I in I, die die Identitätsfunktion $f(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x}$ enthält und mit Funktionen $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x})$ auch deren φ-Indukt enthält, für jedes $\varphi(y, y_1, \ldots, y_k) \in Y$.

Es sei $\mathfrak{U}$ Ultrafilter über I. Wir betrachten die Ultrapotenz $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{A}$. Die Elemente der Trägermenge von $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$ sind Äquivalenzklassen von Funktionen von I in I. Die zur Funktion $f(\boldsymbol{x})$ gehörige Äquivalenzklasse sei mit $\overline{f(\boldsymbol{x})}$ bezeichnet. Bekanntlich gilt dann für jedes $\varphi(y, y_1, \ldots, y_l) \in L$ und je l Funktionen $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_l(\boldsymbol{x})$ von I in I:

(3) $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \varphi(\overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$ genau dann, wenn

$$\{\boldsymbol{x} \mid \mathfrak{A} \models \varphi(f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_l(\boldsymbol{x}))\} \in \mathfrak{U}.$$

Daneben betrachten wir noch diejenige Unterstruktur von $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$, deren Elemente durch Funktionen aus Δ_Y repräsentiert werden können. Sie sei mit $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$ bezeichnet. Ein Ausdruck $\varphi(y_1, \ldots, y_l) \in L$ möge *normal* (bezüglich $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$) heißen, wenn für je l Funktionen $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_l(\boldsymbol{x})$ aus Δ_Y gilt

(4) $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \varphi(\overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$ genau dann, wenn

$$\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \varphi(\overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})}).$$

LEMMA 1. *Ist $\psi(y, y_1, \ldots, y_l) \in Y$ und normal, so ist $\exists y \psi(y, y_1, \ldots, y_l)$ normal.*

Beweis. Es sei $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \exists y \psi(y, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$. Dann gibt es ein $f(\boldsymbol{x}) \in \Delta_Y$ derart, daß $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \psi(\overline{f(\boldsymbol{x})}, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$. Wegen (4) gilt dann $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \psi(\overline{f(\boldsymbol{x})}, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$, also auch $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \exists y \psi(y, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$. Umgekehrt möge gelten $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \exists y \psi(y, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$; $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_l(\boldsymbol{x}) \in \Delta_Y$. Wegen (3) ist dann $\{\boldsymbol{x} \mid \mathfrak{A} \models \exists y \psi(y, f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_l(\boldsymbol{x}))\} \in \mathfrak{U}$. Für das ψ-Indukt $f(\boldsymbol{x})$ der Funktionen $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_l(\boldsymbol{x})$ muß also gelten $\{\boldsymbol{x} \mid \mathfrak{A} \models \psi(f(\boldsymbol{x}), f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_l(\boldsymbol{x}))\} \in \mathfrak{U}$, wegen (3) also auch $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \psi(\overline{f(\boldsymbol{x})}, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$. Da $\psi \in Y$ und mithin $f(\boldsymbol{x}) \in \Delta_Y$ ist, folgt in Verbindung mit (4) $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \psi(\overline{f(\boldsymbol{x})}, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$, also $\Delta\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \exists y \psi(y, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$. Q.E.D.

LEMMA 2. *Ist $\psi(y, y_1, \ldots, y_l) \in Y$ und normal, und ist $\sim\psi(y, y_1, \ldots, y_l) \in Y$, so ist $\forall y \psi(y, y_1, \ldots, y_l)$ normal.*

Beweis. Es sei $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \forall y \psi(y, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$. Wenn $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \exists y \sim\psi(y, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$ gelten würde, müßte zufolge Lemma 1 auch $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \exists y \sim\psi(y, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$ gelten, was unmöglich ist. Also gilt $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \forall y \psi(y, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_l(\boldsymbol{x})})$. Die Umkehrung beweist man analog. Q.E.D.

LEMMA 3. *Sei $Y \subseteq L$ derart, daß gilt:* (a) *Mit $\varphi \in Y$ ist $\sim\varphi \in Y$;* (b) *Mit $\varphi \in Y$ gehört auch die pränexe Normalform $\overline{\varphi}$ von φ zu Y;* (c) *die Teilausdrücke von $\overline{\varphi}$ gehören ebenfalls zu Y. Dann ist jeder Ausdruck von Y normal, sowie jeder Ausdruck,* der *durch Quantifizierung einer Variablen aus einem Ausdruck von Y entsteht.*

Beweis. Wegen (b) genügt es, pränexe Formen zu betrachten. Wegen (c) kann man diese Normalformen aus quantifikatorenfreien Ausdrücken durch sukzessives Quantifizieren erhalten, ohne daß man aus Y herauskommt. Für quantifikatorenfreie Ausdrücke ist (4) trivial auf Grund der Definition von $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$. Lemma 1 und Lemma 2, sowie (a), liefern nunmehr sofort die Behauptung. Q.E.D.

Zwei Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mögen Y-*äquivalent* heißen (in Zeichen: $\mathfrak{A} \equiv_Y \mathfrak{B}$), wenn für jede Aussage $\varphi \in Y$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{B} \models \varphi$. Lemma 3 zeigt insbesondere: $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \equiv_Y \mathfrak{A}$. Wenn $Y \subseteq Z$ ist und eine Aussage $\zeta \in Z$ existiert, die in $\mathfrak{A}$ nicht genau dann gilt, wenn sie in $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$ gilt, bedeutet das, daß die Menge der in $\mathfrak{A}$ gültigen Aussagen nicht durch Aussagen aus Y (oder durch aussagenlogische Verbindungen von solchen) axiomatisiert werden kann. Es ist daher zu erwarten, daß man Lemma 3 zum Ausgangspunkt für eine Methode für Nichtaxiomatisierbarkeitsbeweise machen kann.

Eine Funktion $f(\boldsymbol{x})$ von I in I möge *definierbar* heißen, wenn es einen Ausdruck $\varphi(x, y)$ gibt derart, daß für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in I$ gilt: $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

LEMMA 4. *Jede Funktion $f(\boldsymbol{x}) \in \Delta_Y$ ist durch einen Ausdruck $\varphi(x, y) \in L$ definierbar. Genügt Y den Bedingungen von Lemma* 3, *und enthält Y überdies mit einem beliebigen Ausdruck $\varphi(y^*)$ auch den Ausdruck $\varphi(y^*) \to y \leqslant y^*$, so gilt*

(5) $$\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \forall y(\varphi(\overline{x}, y) \to y = \overline{f(\boldsymbol{x})}).$$

Beweis. Wir führen den Beweis induktiv gemäss dem Erzeugungsprinzip von Δ_Y. Für die Identitätsfunktion $f(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x}$ ist alles klar: der Ausdruck $x = y$ leistet das Verlangte. Es sei nun $f(\boldsymbol{x})$ das φ-Indukt ($\varphi \in Y$) der Funktionen $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x})$, und für diese Funktionen sei die Behauptung bereits bewiesen. Es seien $\psi_1(x, y), \ldots, \psi_k(x, y)$ die entsprechenden Definitionen. Wir setzen

$$\psi(x, y) \equiv \exists y_1 \ldots y_k\Big(\bigwedge_{i \leqslant k} \psi_i(x, y_i) \vee \Big(\varphi(y, y_1, \ldots, y_k) \wedge \\ \wedge \forall y^*\big(\varphi(y^*, y_1, \ldots, y_k) \to y \leqslant y^*\big)\Big) \vee \big(\sim\exists z \varphi(z, y_1, \ldots, y_k) \wedge y = x\big)\Big)\Big).$$

Offenbar ist $\psi(x, y)$ eine Definition für $f(\boldsymbol{x})$; man braucht sich nur vor Augen zu halten, daß wenn die rechte Seite erfüllt ist, die Variablen $y_1, \ldots, y_k$ notwendig mit $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x})$ belegt sein müssen.

Y möge der genannten Zusatzbedingung genügen; die $\psi_1, \ldots, \psi_k$ genügen dann der Bedingung (5). Deswegen folgt aus $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \psi\big(\overline{\boldsymbol{x}}, g\overline{(\boldsymbol{x})}\big)$:

$$\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \Big(\varphi\big(\overline{g(\boldsymbol{x})}, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_k(\boldsymbol{x})}\big) \wedge \forall y^*\big(\varphi\big(y^*, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_k(\boldsymbol{x})}\big) \to g(\boldsymbol{x}) \leqslant y^*\big)\Big) \vee \\ \vee\Big(\sim\exists z \varphi\big(z, \overline{f_1(\boldsymbol{x})}, \ldots, \overline{f_k(\boldsymbol{x})}\big) \wedge \overline{g(\boldsymbol{x})} = \overline{\boldsymbol{x}}\Big).$$

Auf Grund der Voraussetzung über Y und Lemma 3, und weil aussagenlogische Verbindungen normaler Ausdrücke normal sind, gilt diese Beziehung auch in $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$. Wegen (3) gilt wiederum $\{\boldsymbol{x} |\ \mathfrak{A} \models \big(\varphi\big(g(\boldsymbol{x}), f_1(\boldsymbol{x}), \ldots \ldots, f_k(\boldsymbol{x})\big)\big) \wedge \forall y^*\big(\varphi\big(y^*, f_1(x), \ldots, f_k(x)\big) \to g(\boldsymbol{x}) \leqslant y^*\big) \vee \big(\sim\exists z \big(\varphi\big(z, f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x})\big) \wedge g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\big)\big\} \in \mathfrak{U}$. Dies bedeutet aber $\{\boldsymbol{x} |\ g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\} \in \mathfrak{U}$, also $\overline{f(\boldsymbol{x})} = \overline{g(\boldsymbol{x})}$. Demzufolge gilt (5) auch für φ. Q.E.D.

Der Ausdruck $\psi(x, y)$ soll im folgenden *Δ_Y-Definente* für $f(x)$ heißen.

Eine Funktion $h(\boldsymbol{x})$ von I in I möge *Δ_Y-Differente* heißen, wenn die Menge $\{\boldsymbol{x} |\ h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\}$ endlich ist, für jedes $f(\boldsymbol{x}) \in \Delta_Y$.

Später kommt es darauf an, diesen Sachverhalt durch ein Schema von Aussagen aus L zu beschreiben.

Es sei $h(\boldsymbol{x})$ eine Δ_Y-Differente. Wir nehmen an, daß $h(\boldsymbol{x})$ definierbar ist; $\chi(x, y)$ sei der definierende Ausdruck. Weiter nehmen wir an, daß jedes Element von I durch einen Term von L beschrieben werden kann. Es sei $\{f_i(\boldsymbol{x})\}_{i \in I}$ die Menge aller Funktionen aus Δ_Y und $\{\psi_i(x, y)\}_{i \in I}$ die Menge der ihnen entsprechenden Δ_Y-Definenten. Ferner sei $\{x |\ h(\boldsymbol{x}) = f_i(x)\} = M_i$ und $t_1^{(i)}, \ldots, t_{n_i}^{(i)}$ die Menge der Terme, die den Elementen von M_i entsprechen. Dann gilt offenbar

$$\mathfrak{A} \models \forall x\big(\underline{\exists y}\big(\chi(x, y) \wedge \psi_i(x, y)\big) \to x = t_1^{(i)} \vee \ldots \vee x = t_{n_i}^{(i)}\big), \tag{6}$$

und dieses Schema beschreibt bereits die Eigenschaft, Δ_Y-Differente zu sein.

Für später brauchen wir noch die Trivialität

$$\mathfrak{A} \models \forall x \exists y \chi(x, y). \tag{7}$$

Lemma 5. *Jedes Element von I sei durch einen Term aus L beschreibbar; $h(x)$ sei eine definierbare Δ_Y-Differente mit $\chi(x, y)$ als definierendem Ausdruck; Y genüge den in Lemma 4 genannten Voraussetzungen; $\mathfrak{U}$ sei kein Hauptfilter. Dann gilt mindestens einer der durch* (6) *und* (7) *beschriebenen Sachverhalte nicht in $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$.*

Beweis. Wir nehmen an, daß (7) in $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$ gilt. Dann gibt es speziell für $\overline{\boldsymbol{x}}$ ein $g(\boldsymbol{x}) \in \Delta_Y$, so daß

$$\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \chi\big(\boldsymbol{x}, \overline{g(\boldsymbol{x})}\big)'. \tag{8}$$

Es sei $\gamma(x, y)$ die Δ_Y-Definente für $g(x)$. Zufolge Lemma 4 gilt also auch

$$\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U} \models \gamma\big(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{g(\boldsymbol{x})}\big). \tag{9}$$

Es seien $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\gamma \in I$ diejenigen Elemente, für die $g(\boldsymbol{x})$ und $h(\boldsymbol{x})$ übereinstimmen, und $t_1, \ldots, t_\gamma$ die ihnen entsprechenden Terme. Dann gilt

$$\mathfrak{A} \models \forall x\big(\exists y\big(\chi(x, y) \wedge \gamma(x, y)\big) \to x = t_1 \vee \ldots \vee x = t_\gamma\big). \tag{10}$$

(10) ist ein Spezialfall von (6); würde (6) und somit auch (10) in $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$ gelten, müßte wegen (8) und (9) eine der Beziehungen $\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{a}}_i$ gelten ($i = 1, \ldots, \gamma$). Da $\mathfrak{U}$ kein Hauptfilter ist, kann aber keine der Einermengen $\{\boldsymbol{x} |\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_i\}$ zu $\mathfrak{U}$ gehören. Also gilt (6) nicht in $\Delta_Y\mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$. Q.E.D.

Wir wollen die bisherigen Ergebnisse in einem Theorem zusammenfassen und uns von der Bezugnahme auf die spezielle Interpretation $\mathfrak{A}$ von L lösen (in diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß die Menge der Δ_Y-Definenten allein durch die Menge Y bestimmt wird!). Eine Menge Y, die den in Lemma 4 gestellten Forderungen genügt, möge *hereditär* heißen. Eine Interpretation von L, in der jedes Element durch einen Term beschrieben werden kann, möge *Terminterpretation* (ggf. *Termmodell*) heißen.

Haupttheorem. *Es sei $Y \subseteq L$ eine hereditäre Menge und $X \subseteq L$ eine Menge mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $X \vdash \forall x x \leqslant x \wedge \forall x \forall y \forall z(x \leqslant y \wedge y \leqslant z \to x \leqslant z) \wedge \forall x \forall y(x \leqslant y \vee y \leqslant x)$
$\wedge \forall x \forall y(x \leqslant y \wedge y \leqslant x \to x = y) \wedge \forall x \exists y(x \leqslant y \wedge x \neq y)$.

(b) $X \vdash \forall y_1 \ldots y_k\big(\exists y \varphi(y, y_1, \ldots, y_k) \to \exists y_0 \varphi(y_0, y_1, \ldots, y_l) \wedge$
$\wedge \forall y^*\big(\varphi(y^*, y_1, \ldots, y_k) \to y_0 \leqslant y^*\big)\big)$.

(c) *X besitzt ein Termmodell.*

(d) *Es gibt einen Ausdruck $\chi(x, y)$, so daß gilt*

(i) $X \vdash \forall x \exists y \chi(x, y)$,

)ii) *Zu jeder Δ_Y-Definente $\psi(x, y)$ gibt es Terme $t_1, \ldots, t_\psi$, so daß*
$X \vdash \forall x\big(\exists y\big(\chi(x, y) \vee \psi(x, y)\big) \to x = t_1 \vee \ldots \vee x = t_\psi\big)$.

Dann ist X nicht durch Aussagen aus Y (oder durch aussagenlogische Verbindungen von solchen) axiomatisierbar.

Beweis. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Termmodell von X mit der Trägermenge I und $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter über I, der nicht Hauptfilter ist. Wegen (a), (b) und Lemma 3 gilt dann $\mathfrak{A} \equiv_Y \Delta_Y \mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$. Wegen (c), (d) und Lemma 5 kann $\Delta_Y \mathfrak{A}^I/\mathfrak{U}$ nicht Modell von X sein. Daraus folgt sofort die Behauptung. Q.E.D.

Um die Handhabung des Haupttheorems zu erleichten, werde ich einige Ausdrucksmengen, die in der mathematischen Logik eine Rolle spielen, als hereditär nachweisen. Ausserdem werde ich eine Erörterung über Definenten anschliessen und zeigen, daß sich die etwas unübersichtliche Bedingung (d) (ii) u.U. signifikanter formulieren läßt.

Bekanntlich gelten die logischen Äquivalenzen

$$(11) \qquad Qx\big(\varphi(x)*\psi\big) \equiv Qx\varphi(x)*\psi\,, \qquad Qx\big(\psi*\varphi(x)\big) \equiv \psi*Qx\varphi(x)\,,$$

wo Q für einen der Quantoren $\forall$ oder $\exists$ steht, $*$ eines der Zeichen $\wedge, \vee$ ist und die Variable x in ψ nicht vorkommt. Durch sukzessive Anwendung von (11) erhält man

$$(12) \qquad Q_1^{(1)}x_1 \ldots Q_n^{(1)}x_n\varphi(x, \ldots, x) * Q_1^{(2)}y_1 \ldots Q_m^{(2)}y_m\psi(y_1, \ldots, y_m)$$
$$\equiv Q_1^{(3)}z_1 \ldots Q_{n+m}^{(3)}z_{n+m}\big(\varphi(x_1, \ldots, x_n) * \psi(y_1, \ldots, y_m)\big)\,,$$

wo die $Q_1^{(3)}z_1, \ldots, Q_{n+m}^{(3)}z_{n+m}$ eine Permutation der $Q_1^{(1)}x, \ldots, Q_n^{(1)}x_n, Q_1^{(2)}y_1, \ldots$ $\ldots, Q_m^{(2)}y_m$ bilden, welche die Reihenfolge der $x_1, \ldots, x_n$ und der $y_1, \ldots, y_m$ untereinander nicht ändert. Beispielsweise ist also

$$\forall x_1 \exists x_2 \varphi(x_1, x_2) \vee \forall y_1 \exists y_2 \exists y_3 \forall y_4 \psi(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

äquivalent zu

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall y_1 \exists y_2 \exists y_3 \forall y_4 \big(\varphi(x_1, x_2) \vee \psi(y_1, y_2, y_3, y_4)\big)$$

oder auch zu

$$\forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 \exists y_2 \exists y_3 \forall y_4 \big(\varphi(x_1, x_2) \vee \psi(y_1, y_2, y_3, y_4)\big)\,.$$

Im folgenden bezeichne ich die Präfixlänge (= Quantorenzahl) einer pränexen Form φ mit $l(\varphi)$, ihre Tiefe (= Quantorenwechselzahl, den Uebergang vom Kern zum Präfix miteingerechnet) mit $T(\varphi)$. Unter $\overline{\varphi}$ verstehe ich die zu $\varphi \in L$ gehörige pränexe Normalform.

Lemma 6. *Die Menge der Ausdrücke, deren pränexe Normalform die Präfixlänge $\leqslant n$ hat, ist hereditär.*

Beweis. Offenbar ist $l\big(\overline{\varphi(y^*) \to y \leqslant y^*}\big) = l\big(\overline{\sim\varphi(y^*) \vee y \leqslant y^*}\big)$; wegen (12) ist letzteres gleich $l\big(\overline{\sim\varphi(y^*)}\big)$, und dieses ist gleich $l\big(\overline{\varphi(y^*)}\big)$, die anderen Bedingungen sind trivialerweise erfüllt. Q.E.D.

Lemma 7. *Die Menge der Ausdrücke, deren pränexe Normalform die Tiefe $\leqslant n$ hat, ist hereditär.*

Beweis. Genauso wie bei Lemma 6, nur mit T statt l. Q.E.D.

Weitere hereditäre Mengen liefern die Ausdrücke, die bestimmte Grundzeichen nicht enthalten, oder die Ausdrücke, in denen keine gebundene Variable mehr als zweimal vorkommt, und dergleichen. Diese Mengen scheinen jedoch in unserem Zusammenhang nicht besonders interessant zu sein. Einige Aufmerksamkeit verdienen vielleicht die von einer endlichen Menge erzeugten hereditären Mengen.

Unmittelbar klar sind die Beziehungen

$$(13) \qquad T(\overline{\sim\varphi}) = T(\overline{\varphi})$$

sowie

$$(14) \qquad T\big(\overline{Qy\varphi(x, y)}\big) = T\big(Qx\overline{Qy\varphi(x, y)}\big)\,.$$

Sodann gilt

(15) Ist $T\varphi = T\psi$ und beginnen φ und ψ mit dem gleichen Quantor, oder sind beide quantorenfrei, so ist $T(\varphi * \psi) = T\varphi = T\psi$.

Dies ergibt sich durch geeignete Anwendung von (12); vorher ist ggf. durch Umbenennung gebundener Variabler dafür zu sorgen, daß φ und ψ keine gebundene Variable gemeinsam haben. Ähnlich wie (15) ergibt sich

$$(16) \qquad \text{Ist } T\varphi < T\psi, \text{ so ist } T(\overline{\varphi * \psi}) = T\psi\,.$$

Wir begeben uns in die eingangs betrachtete Interpretation $\mathfrak{A}$ von L. Eine Funktion $f(\boldsymbol{x})$ von I in I möge *$\exists_m$-definierbar* heißen, wenn sie definierbar ist und für den definierenden Ausdruck $\psi(x, y)$ gilt: $T\psi \leqslant m$, wobei ψ mit $\exists$ beginnen soll, falls $T\psi = m$.

Lemma 8. *Die Funktionen $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x})$ seien $\exists_{n+2}$-definierbar, und es sei $T\varphi(y, y_1, \ldots, y_k) \leqslant n$. Dann ist das φ-Indukt dieser Funktionen ebenfalls $\exists_{n+2}$-definierbar. Dasselbe gilt, wenn $T\varphi = n+1$ ist und φ mit $\exists$ beginnt.*

Beweis. Wir betrachten die Δ_Y-Definente $\psi(x, y)$ des Indukts $f(\boldsymbol{x})$. Zu zeigen ist, daß $T\psi < n+2$ ist, oder daß $T\psi = n+2$ ist und daß ψ mit $\exists$ beginnt. Nach Konstruktion beginnt φ mit $\exists$, so dass wir also nur zu zeigen haben: $T\psi \leqslant n+2$.

Es sei zunächst $T\varphi(y^*, y_1, \ldots, y_k) \leqslant n$. Wegen (13) und (16) (bzw. (15), falls $T\varphi = 0$) ist also

$$T\big(\overline{\varphi(y^*, y_1, \ldots, y_k) \to y \leqslant y^*}\big) = T\big(\overline{\sim\varphi(y^*, y_1, \ldots, y_k) \vee y \leqslant y^*}\big) \leqslant n\,,$$

demzufolge $T\big(\overline{\forall y^*(\sim\psi(y^*, y_1, \dots, y_k) \to y \leqslant y^*)}\big) \leqslant n+1$. Aus analogen Gründen ist $T\big(\overline{\sim\exists z\varphi(z, y_1, \dots, y_k) \wedge y = x}\big) \leqslant n+1$. Mit Hilfe von (15), der Voraussetzung über die $\psi_1(x, y), \dots, \psi_k(x, y)$ und (14) ergibt sich hieraus $T\psi \leqslant n+2$.

Nunmehr sei $T\varphi = n+1$, und φ beginne mit $\exists$. Dann gilt zwar $T\big(\overline{\varphi(y^*, y_1, \dots, y_k) \to y \leqslant y^*}\big) = T\big(\overline{\sim\psi(y^*, y_1, \dots, y_k) \vee y \leqslant y^*}\big) = n+1$, aber wegen (14) ebenfalls $T\big(\overline{\forall y^*(\varphi(y^*, y_1, \dots, y_k) \vee y \leqslant y^*)}\big) = n+1$, denn $\big(\overline{\sim\varphi(y^*, y_1, \dots, y_k) \vee y \leqslant y^*}\big)$ beginnt mit $\forall$. Aus analogen Gründen gilt auch wieder $T\big(\overline{\sim\exists z(\varphi(z, y_1, \dots, y_k) \wedge y = x)}\big) = n+1$. Der Rest des Beweises verläuft analog zum Fall $T\varphi \leqslant n$. Q.E.D.

THEOREM 1. *Es sei Y die Menge aller Ausdrücke, deren pränexe Normalform die Tiefe $\leqslant n$ hat. Weiter sei $X \subseteq L$ eine Menge, die den Eigenschaften* (a), (b), (c) *des Haupttheorems genüge. Außerdem soll gelten*

(e) *Es gibt einen Ausdruck $\chi(x, y)$, so daß gilt*

(i) $X \vdash \forall x \exists y\, \chi(x, y)$,

(ii) *Zu jedem $\psi(x, y)$ mit $T\psi \leqslant n+2$ gibt es Terme $t_1, \dots, t_\psi$, so daß*

$$X \vdash \forall x \exists!! y\, \psi(x, y) \to \forall x\big(\exists y(\chi(x, y) \wedge \psi(x, y)) \to x = t_1 \vee \dots \vee x = t_\psi\big).$$

Dann ist X nicht durch Aussagen aus Y oder aussagenlogische Kombinationen davon axiomatisierbar.

Beweis. Auf Grund von Lemma 7 ist Y hereditär. Auf Grund von Lemma 8 (das nicht voll ausgenutzt wird) folgt (d) aus (e). Die Voraussetzungen des Haupttheorems sind also erfüllt. Q.E.D.

THEOREM 2. *Es sei Y die Menge aller Ausdrücke, deren pränexe Normalform die Präfixlänge $\leqslant n$ besitzt; $X \subseteq L$ genüge den Bedingungen* (a), (b), (d), (e) *des Haupttheorems. Dann ist X nicht durch Aussagen aus Y oder aussagenlogische Verbindungen davon axiomatisierbar.*

Beweis. Sonst wäre X auch durch Aussagen der Tiefe $\leqslant n$ oder aussagenlogische Kombinationen davon axiomatisierbar. Man kann auch wieder Lemma 8 in Verbindung mit Lemma 6 benutzen. Q.E.D.

Die Anwendungsfähigkeit der Resultate sei am Beispiel der Zahlentheorie kurz angedeutet. Mit Hilfe der Sätze über Definitionshierarchien (vgl. z. B. [1]) kann man von verschiedenen hereditären Mengen Y zeigen, dass sie eine Abzählung $f_0(\boldsymbol{x}), f_1(\boldsymbol{x}), \dots$ der Funktionen von Δ_Y besitzen, welche in dem Sinne definierbar ist, dass die Funktion

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$$

definierbar ist. In diesem Fall ist auch die Funktion

$$g(\boldsymbol{x}) = \max_{t \subseteq \boldsymbol{x}} \{f_t(\boldsymbol{x})\} + 1$$

definierbar, und als universelle Majorante für die Funktionen aus Δ_Y ist sie dann natürlich auch Δ_Y-Differente. Jedes Axiomensystem X der Zahlentheorie, in dem die Existenz von $g(\boldsymbol{x})$ und ihre Eigenschaft, Differente zu sein, bewiesen werden kann, ist also zufolge des Haupttheorems nicht Y-axiomatisierbar. Auf diese Weise kann man z. B. verschiedene Varianten der Resultate von Rabin (vgl. [2]) erhalten.

Literaturverzeichnis

[1] M. Davis, *Computability and unsolvability*, New York 1958.

[2] M. O. Rabin, *Non-standard models and the induction axiom*, Infinitistic methods, Jerusalem 1961.

Reçu par la Rédaction le 22. 9. 1969