О псевдокружевных пространствах

Я. А. Кофнер (Кишинёв)

Введение. Настоящая работа посвящена новому классу пространств, естественно обобщающих сильно симметризуемые пространства Александрова–Немыцкого, равно как и пространства с σ-консервативной замкнутой сетью и кружевные пространства Сидера–Боржеса.

В работе эти пространства рассматриваются в связи с симметризуемыми пространствами Архангельского, для чего в §§ 1–5 приводится их теория удобная для приложений. Только в § 5 приводится теорема, представляющая, по мнению автора, самостоятельный интерес, о том, что пространство, диагональ квадрата которого есть множество типа G_δ, уплотняется на симметризуемое T_1-пространство.

В § 6 вводится вышеупомянутый класс пространств, а именно, класс таких пространств X, для которых существует множество пар

$$\{(P'_\alpha, P''_\alpha)|\ \alpha \in A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}, \qquad P'_\alpha \subseteq P''_\alpha \subseteq X,$$

с условиями:

1° для любой точки $x \in X$ и ее окрестности U_x имеет место $x \in P'_\alpha \subseteq \subseteq P''_\alpha \subseteq U_x$ для некоторого $\alpha \in A$ и

2° $B \subseteq A_n \Rightarrow [\bigcup_{\alpha}^{B} P'_\alpha] \subseteq \bigcup_{\alpha}^{B} P''_\alpha$.

Из определения непосредственно следует, что все пространства с σ-консервативной замкнутой сетью и все кружевные пространства суть псевдокружевные пространства. Класс псевдокружевных пространств оказывается наследственным, счетно мультипликативным, сохраняется при переходе к супремуму счетного числа топологий и к образу при замкнутом непрерывном отображении, а также содержит все пространства, для которых удается найти замкнутое σ-локально конечное покрытие псевдокружевными (под)-пространствами. Заметим, что открытый непрерывный образ псевдокружевного пространства, вообще говоря, не является псевдокружевным пространством. Действительно, пространство „две окружности“ П. С. Александрова ([1], пример A_2) является неметризуемым бикомпактом с первой аксиомой счетности. Все пространства с первой аксиомой счетности, как показал В. И. Пономарев [16], суть открытые непрерывные образы метрических (и, следовательно, псевдокружевных) пространств. Но, как будет показано, неметризуемые бикомпакты не являются псевдокружевными пространствами.

Естественным обобщением результатов А. В. Архангельского для пространств с σ-дискретной замкнутой сетью [2] и Дж. Сидера для кружевных пространств [20] является теорема из § 7 о том, что псевдокружевные пространства со слабой первой аксиомой счетности Архангельского симметризуемы. Обратное, вообще говоря, не верно, о чем свидетельствует один из примеров, построенных в настоящей работе; однако в классе пространств с первой аксиомой счетности положение меняется: пространство сильно симметризуемо тогда и только тогда, когда оно является псевдокружевным и удовлетворяет первой аксиоме счетности. Не всякое псевдокружевное пространство симметризуемо; в [8] автором построен пример регулярного счетного псевдокружевного симметризуемого пространства, квадрат которого не симметризуем. Тут же следует заметить, что свойство пространства быть псевдокружевным не эквивалентно свойству иметь σ-консерватижную замкнутую сеть или быть кружевным пространством: построенный ниже пример вполне регулярного сильно симметризуемого пространства без σ-консервативной сети, и построенный Хисом в [19] пример сильно симметризуемого паракомпакта, не являющегося кружевным пространством доказывают это.

В § 8 доказывается, что в псевдокружевном пространстве X во всякую систему γ открытых в X множеств можно вписать σ-дискретную в X систему замкнутых в X множеств, покрывающую $\bigcup\gamma$, и что коллективно нормальное псевдокружевное T_0-пространство наследственно паракомпактно и уплотняется на метрическое пространство, что является весьма естественным обобщением аналогичных результатов Бинга для пространств с измельчающейся последовательностью покрытий [4] и МакОли для сильно симметризуемых пространств [12]. Кроме того, устанавливается, что в классе псевдокружевных пространств свойства финальной компактности, наследственной финальной компактности, наследственной сепарабельности, наследственные свойства Шанина и Суслина и свойство о том, что всякая дискретная система подмножеств счетна эквивалентны. Некоторые из этих эквивалентностей были доказаны для разных классов симметризуемых пространств МакОли ([12], [13]) и С. Й. Недевом [15]. Нижеприведенный пример вполне регулярного сильно симметризуемого сепарабельного и, следовательно, со свойствами Шанина и Суслина пространства, не являющегося наследственно финально компактным, свидетельствует об окончательности в определенном смысле некоторых эквивалентностей из последнего результата. Автору неизвестен пример псевдокружевного финально компактного пространства без счетной сети.

Автор благодарит Ивана Ивановича Паровиченко и Александра Владимировича Архангельского, под руководством которых выполнена настоящая работа.

§ 1. Предварительные замечания. Пусть M — множество, $\Delta_M = \{(x,x)|\ x \in M\}$. Всякое подмножество $M\times M$ будем называть *бинарным отношением на* M. Если R — бинарное отношение на M, то $R^{-1} = \{(x,y)|\ (y,x)\in R\}$. R называется *симметричным*, если $R = R^{-1}$. Так как $(\bigcup_\lambda R_\lambda)^{-1} = \bigcup_\lambda R_\lambda^{-1}$ и аналогично для пересечения (см. [9], стр. 14), то для любого R отношения $R \cup R^{-1}$ и $R\cap R^{-1}$ симметричны. Положим далее $R(x) = \{y|\ (x,y)\in R\}$ и для $E\subseteq M$ принимаем $R(E) = \bigcup\{R(x)|\ x\in E\}$. Легко видеть, что

$$(\bigcup_\lambda R_\lambda)(E) = \bigcup_\lambda R_\lambda(E)\,,$$

$$(\bigcap_\lambda R_\lambda)(E) = \bigcap\{\bigcup_\lambda R_\lambda(E_\lambda)|\ \bigcup_\lambda E_\lambda = E\}\,, \qquad (\bigcap_\lambda R_\lambda)(x) = \bigcap_\lambda R_\lambda(x)\,.$$

Если дано отображение $F\colon M\to\mathfrak{P}(M)$ (¹), то по нему „восстанавливается" единственное бинарное отношение R на M такое, что $\forall x\big(F(x) = R(x)\big)$. Если R' и R'' — бинарные отношения, то, как обычно,

$$R'\circ R'' = R'R'' = \big\{(x,z)|\ \exists y\big((x,y)\in R'', (y,z)\in R'\big)\big\}\,.$$

Если $\{R'_n\}$ и $\{R''_n\}$ — две убывающие последовательности бинарных отношений, то положим $\{R'_n\}\lesssim\{R''_n\}$, если для всех x и n существует n_1 такое, что $R''_{n_1}(x)\subseteq R'_n(x)$. Это есть отношение квазипорядка. Соответствующее отношение эквивалентности будем обозначать тильдой. Если $\{R'_n\}\lesssim\{R_n^{-1}\}$, то $\{R_n\}\sim\{R_n\cup R_n^{-1}\}$ аналогично из $\{R_n^{-1}\}\lesssim\{R_{n_1}\}$ следует $\{R_n\}\sim\{R_n\cap R_n^{-1}\}$. Проверим, например, первое. Для произвольных n и x подберем такое n_1, что $R_{n_1}^{-1}(x)\subseteq R_n(x)$ и пусть $n_2 = \max(n, n_1)$. Тогда ввиду убывания $\{R_n\}$, а вместе с ним — и $\{R_n^{-1}\}$, имеет место $R_{n_2}^{-1}(x)\subseteq R_n(x)$ и $R_{n_2}(x)\subseteq R_n(x)$, откуда

$$(R_{n_2}^{-1}\cup R_{n_2})(x) = R_{n_2}^{-1}(x)\cup R_{n_2}(x)\subseteq R_n(x)\,.$$

Обратное очевидно. Легко также видеть, что если $x\in\operatorname{Int}\bigcap_n R_n(x)$ и $\{R'_n\}\lesssim\{R_n\}$, то $x\in\bigcap_n\operatorname{Int}R'_n(x)$.

Ниже убывающие последовательности рефлексивных бинарных отношений на M будем называть *допустимыми бинарными последовательностями на* M. Если такая последовательность состоит из симметричных отношений, то она будет называться *симметричной* бинарной последовательностью.

(¹) $\mathfrak{P}(M)$ — множество всех подмножеств M.

Ниже $d(x, y)$ обозначает неотрицательную действительную функцию на $M\times M$, для которой $d(x, x)=0$; такую функцию мы будем называть *симметричной*, если $d(x, y)=d(y, x)$. Для каждого n положим

$$O_n^d=\left\{(x, y)\mid d(x, y)<\frac{1}{n}\right\}.$$

Легко видеть, что если d симметрична, то $\{O_n^d\}$ есть симметричная бинарная последовательность.

Ниже X всюду обозначает топологическое пространство.

§ 2. gf-сети и gf-базы.

(2.1) Определение. Допустимая бинарная последовательность $\{R_n\}$ (см. § 1) называется *gf-сетью*, если для любой точки x и ее окрестности U_x существует такое n, что

$$R_n(x)\subseteq U_x$$

и *gf-базой*, если

$$(U \text{ открыто}) \Leftrightarrow \left(x\in U\Rightarrow \exists n\left(R_n(x)\subseteq U\right)\right).$$

Легко видеть, что gf-база есть gf-сеть, а также, что пространства с gf-базой суть в точности пространства со слабой первой аксиомой счетности (см. [2], стр. 148), если иметь в виду „восстановление“ бинарного отношения (§ 1).

(2.2) *Для любой допустимой бинарной последовательности $\{R_n\}$ на X существует единственная топология на M, для которой $\{R_n\}$ есть gf-база.*

(2.3) *Пусть τ' и τ'' суть две топологии на M. Если $\{R_n\}$ есть gf-база для τ' и gf-сеть для τ'', то $\tau''\subseteq\tau'$.*

(2.4) *Если $\{R_n\}$ есть gf-сеть в X и $\{R_n\}\lesssim\{R_n'\}$ то и $\{R_n'\}$ есть gf-сеть в X.*

(2.5) *Если $\{R_n\}$ есть gf-база в X и $\{R_n\}\sim\{R_n'\}$, то и $\{R_n'\}$ есть gf-база в X.*

(2.6) *Для того, чтобы X было T_1-пространством, необходимо и достаточно, чтобы всякая gf-сеть $\{R_n\}$ в X удовлетворяла условию $\bigcap_n R_n=\Delta_x$ (²).*

(2.7) *Для того, чтобы X было T_0-пространством, необходимо и достаточно, чтобы всякая симметричная gf-сеть $\{R_n\}$ в X удовлетворяла условию $\bigcap_n R_n=\Delta_x$ (²).*

Докажем достаточность. Пусть пространство X не есть T_0-пространство. Тогда существуют точки $x, y\in X$, $x\neq y$, $(x\in \operatorname{Int}E)\Leftrightarrow(y\in\operatorname{Int}E)$. Положим $R_n=\Delta_x\cup\{(x, y), (y, x)\}$ для всех n. Остальное очевидно.

(²) Легко видеть, что $\bigcap_n R_n=\Delta_M\Leftrightarrow\forall x\in M\left(\bigcap_n R_n(x)=\{x\}\right)$.

(2.8) *Пусть $\{R_n\}$ есть gf-база в X. Для того, чтобы X было T_1-пространством необходимо и достаточно, чтобы $\{R_n\}$ удовлетворяла условию $\bigcap_n R_n=\Delta_x$ (²).*

Докажем достаточность. Для всех x множество $X-\{x\}$ открыто, ибо вместе со всякой своей точкой y содержит $R_n(y)$ для некоторого n.

§ 3. gf-сети и последовательности.

(3.1) *Пусть $\{R_n\}$ есть gf-сеть в X, и пусть $\{x_n\}$ есть последовательность в X такая, что для некоторого $x\in X$ и для каждого n почти все ее члены принадлежат $R_n(x)$. Тогда $\{x_n\}$ сходится к x.*

(3.2) Всюду $L(E)$ будет обозначать множество всех пределов последовательностей из E, и по индукции — $L^0(E)=E$, а $L^{i+1}(E)=L\left(L^i(E)\right)$.

(3.3) *Пусть $\{R_n\}$ есть gf-сеть в X и $x\in X$. Если $E\cap R_n(x)\neq\emptyset$ для всех n, то $x\in L(E)$.*

(3.4) *Пусть $\{R_n\}$ есть gf-база в X, $\bigcap_n R_n=\Delta_X$ (²) и $\{x_n\}$-последовательность в X. Если все подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$ имеют единственный предел $x\in X$, то для каждого n почти все члены $\{x_n\}$ принадлежат $R_n(x)$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. существует такое n_0, что $R_{n_0}(x)$ не содержит бесконечного числа членов $\{x_n\}$. Но тогда существует последовательность $\{x_{n_i}\}$, все члены которой не принадлежат $R_n(x)$. Пусть E — множество значений $\{x_{n_i}\}$. Ясно, что $x\notin E$. Пусть теперь $y\notin E$ и $y\neq x$. Тогда $R_{k_0}(y)\cap E$ конечно для некоторого k_0, иначе из $\{x_{n_i}\}$ можно было бы выделить подпоследовательность $\{x_{n_{i_k}}\}$, $x_{n_{i_k}}\in R_k(y)$, что ввиду (3.1) означало бы сходимость $\{x_{n_{i_k}}\}$ к y, $y\neq x$. Но убывающая последовательность конечных множеств

$$R_{k_0}(y)\cap E\supseteq R_{k_0+1}(y)\cap E\supseteq\ldots$$

стабилизируется, начиная с некоторого номера e, и мы имеем

$$\emptyset=\{y\}\cap E=\bigcap_{k=k_0}^{\infty}R_k(y)\cap E=R_e(y)\cap E.$$

Итак, для всякого $y\notin E$ существует $R_e(y)$, не пересекающее E. Отсюда, ввиду (2.1), следует, что E замкнуто, а это противоречит тому, что $\lim x_{n_i}=x\notin E$.

Замечание. В (3.4) вместо $\bigcap_n R_n=\Delta_X$ нам достаточно было потребовать $\bigcap_n R_n(y)=\{y\}$ для всех $y\neq x$.

(3.5) Определение. Пространство X называется *T_2^s-пространством*, если всякая последовательность в X имеет не более одного предела.

(3.6) *Всякое T_2^s-пространство является T_1-пространством.*

Доказательство. Пусть $y \in [\{x\}]$ и положим $x_n = x$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Тогда, очевидно, $\lim x_n = x$ и в то же время $\lim x_n = y$. Так как наше пространство есть T_2^s-пространство, то $x = y$.

(3.7) *Пусть* $\{R_n\}$ *есть gf-база в* T_2^s-*пространстве* X *и* $E \subseteq X$. *Если* $x \in L(E)$, *то* $R_n(x) \cap E \neq \emptyset$ *для всех* n.

(3.8) *Пусть* $\{R_n'\}$ *есть gf-база, а* $\{R_n''\}$ — *gf-сеть в* T_2^s-*пространстве* X. *Тогда* $\{R_n'\} \precsim \{R_n''\}$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. существуют x и n_0 такие, что для всех n имеет место $R_n''(x) \not\subseteq R_{n_0}'(x)$, т. е. $R_n''(x) \cap (X - R_{n_0}'(x)) \neq \emptyset$. Тогда, ввиду (3.3), $x \in L(X - R_n'(x))$, что противоречит (3.7).

(3.9) *Пусть* $\{R_n\}$ *есть gf-база в* X *и* $E \subseteq X$ — *незамкнутое множество. Тогда существует точка* $x \in X - E$ *и последовательность точек в* E, *сходящаяся к* x. *В случае, когда* X *есть* T_1-*пространство, все значения выбранной последовательности можно считать различными.*

Доказательство. В $X - E$ найдется такая точка x, что $R_n(x) \cap E \neq \emptyset$ для всех n, иначе $X - E$ было бы открытым множеством в силу (2.1). Пусть $x_n \in R_n(x) \cap E$. По (3.1) $\{x_n\}$ сходится к x. В дополнительном предположении, что X есть T_1-пространство, последовательность $\{x_n\}$ принимает бесконечное число различных значений, иначе не было бы $\bigcap_n R_n(x) = \{x\}$ (см. (2.8)); следовательно, из $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность, все значения которой различны.

Замечание. Для выбранной в (3.9) последовательности выполняется более сильное, чем сходимость свойство, а именно: для каждого n почти все члены последовательности принадлежат $R_n(x)$.

§ 4. *gf*-сети и *k*-пространства.

(4.1) *Всякое пространство с gf-базой является секвенциальным пространством* [18] *и, следовательно, k-пространством* ([2], *стр.* 173).

Доказательство следует из (3.9).

(4.2) Определение. Пространство X называется k_i^s-*пространством*, если для $E \subseteq X$ имеет место $L^i(E) = [E]$.

(4.3) k_1^s-*пространства суть в точности пространства Фреше-Урысона* ([2], стр. 147), а k_i^s-*пространства суть k-пространства класса i* ([2], стр. 175).

(4.4) Для последовательности бинарных отношений $\{R_n\}$ в X определим индукцией другую последовательность $\{{}^i\hat{R}\}$ отображений ${}^i\hat{R}\colon X \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ (¹) нижеследующим способом.

${}^0\hat{R}(x) = \{\{x\}\}$,

${}^1\hat{R}(x)$ состоит из всех множеств вида $R_n(x)$,

${}^2\hat{R}(x)$ состоит из всех множеств, представимых в виде объединения множеств вида $R_{n(y)}(y) \in {}^1\hat{R}(y)$ где y пробегает некоторое $R_n(x)$.

Переход от ${}^i\hat{R}$ к ${}^{i+1}\hat{R}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ отличается от перехода от ${}^1\hat{R}$ к ${}^2\hat{R}$ лишь тем, что вместо ${}^1\hat{R}(y)$ из определения ${}^2\hat{R}$ берется ${}^i\hat{R}(y)$, т. е.

$$ {}^{i+1}\hat{R}(x) = \bigcup_n \Big\{ \bigcup \{f(y) \mid y \in R_n(x)\} \mid f \in \prod_y^{R_n(x)} {}^i\hat{R}(y) \Big\}. $$

(4.5) *Пусть* $\{R_n\}$ *есть gf-сеть в* X, $E \subseteq X$ *и* $x \in X$. *Если* $E \cap V \neq \emptyset$ *для любого* $V \in {}^i\hat{R}(x)$, *то* $x \in L^i(E)$.

Доказательство проведем по индукции. Для $i = 0$ утверждение тривиально. Предположим, что оно верно для i и пусть $V \cap E \neq \emptyset$ для любого $V \in {}^{i+1}\hat{R}(x)$. Тогда в каждом $R_n(x)$ найдется y такой, что всякое множество V_y, $V_y \in {}^i\hat{R}(y)$ пересекает E, и, по предположению индукции, $y \in L^i(E)$. Следовательно, все $R_n(x)$ пересекают $L^i(E)$, и, по (3.3), имеем $x \in L(L^i(E)) = L^{i+1}(E)$.

(4.6) *Если* $\{R_n\}$ *есть gf-сеть в* X *и для всех* $x \in X$ *имеет место*

$$ x \in \bigcap \{\operatorname{Int} V \mid V \in {}^i\hat{R}(x)\} \tag{4.6.1} $$

то X *есть* k_i^s-*пространство.*

Доказательство. Пусть $E \subseteq X$ и $x \in [E]$. Тогда ввиду (4.6.1) $V \cap E \neq \emptyset$ для любого V из ${}^i\hat{R}(x)$. В силу (4.5) $x \in L^i(E)$.

(4.7) *Пусть* $\{R_n\}$ *есть gf-база в* T_2^s-*пространстве* X *и* $E \subseteq X$. *Если* $x \in L^i(E)$, *то* $V \cap E \neq \emptyset$ *для любого* $V \in {}^i\hat{R}(x)$.

Доказательство проведем по индукции.

Для $i = 0$ утверждение тривиально. Предположим, что оно верно для i, и пусть $x \in L^{i+1}(E) = L(L^i(E))$. Тогда по (3.7) все $R_n(x)$ пересекают $L^i(E)$, т. е. в каждом $R_n(x)$ найдется y такая, что $y \in L^i(E)$, и, по предположению индукции, всякое множество V_y, $V_y \in {}^i\hat{R}(y)$, пересекает E. Следовательно, $V \cap E \neq \emptyset$ для любого $V \in {}^{i+1}\hat{R}(x)$.

(4.8). *Если* $\{R_n\}$ *есть gf-база в* T_2^s- *и* k_i^s-*пространстве* X, *то для всех* $x \in X$ *имеет место*

$$ x \in \bigcap \{\operatorname{Int} V \mid V \in {}^i\hat{R}(x)\}. $$

Доказательство. Пусть $V \in {}^i\hat{R}(x)$ и пусть $E = X - V$. Так как V не пересекает E, то ввиду (4.7) $x \notin L^i(E)$. Ввиду того, что X есть k_i^s-пространство, имеем

$$ L^i(E) = [E] = [X - V] = X - \operatorname{Int} V \ (^3) $$

откуда

$$ x \in \operatorname{Int} V. $$

(³) $\operatorname{Int} E = X - [X - E]$.

§ 5. 0-метрики и симметрики.

(5.1) Определение. Неотрицательная действительная функция $d(x,y)$ на $X\times X$, для которой $d(x,x)=0$, называется *0-метрикой на X* (ср. [14], стр. 513), если последовательность $\{O_n^d\}$ (см. § 1) образует gf-базу. Если 0-метрика в X симметрична (см. § 1), то она называется *симметрикой на X* (ср. [2], стр. 144).

(5.2) (Конструирование 0-метрик). *Пусть $\{R_n\}$ есть gf-база в X; пусть*

$$d=d(x,y)=d(\{R_n\},x,y)=\begin{cases}0 & \text{если}\quad (x,y)\in\bigcap_n R_n\,,\\ \dfrac{1}{m(x,y)} & \text{если}\quad \exists m\big((x,y)\notin R_m\big)\,,\end{cases}$$

где $m(x,y)=\min\{m|\ (x,y)\notin R_m\}$. Тогда d есть 0-метрика на X, для которой $O_n^d=R_n$.

Доказательство. Ввиду определения gf-базы достаточно проверить, что $O_n^d=R_n$.

Пусть $(x,y)\in R_n$. Тогда возможны два случая:

(1) $(x,y)\in\bigcap_n R_n$, тогда $d(x,y)=0$, и, следовательно, $(x,y)\in O_n^d$.

(2) $\exists m\big((x,y)\notin R_m\big)$. Тогда, $m(x,y)>n$ ввиду убывания $\{R_n\}$ и $d(x,y)=1/m(x,y)<1/n$, и снова $(x,y)\in O_n^d$.

Итак $R_n\subseteq O_n^d$. Для доказательства обратного включения аналогично доказывается, что если $(x,y)\notin R_n$, то $(x,y)\notin O_n^d$.

(5.3) *Имеют место следующие формулы для 0-метрик из* (5.2)

(5.3.1) $$d(\{R_n\},x,y)=d(\{R_n^{-1}\},y,x)\,,$$

(5.3.2) $$d(\{R_n'\cup R_n''\},x,y)=\min\big(d(\{R_n'\},x,y),\,d(\{R_n''\},x,y)\big)\,,$$

(5.3.3) $$d(\{R_n'\cap R_n''\},x,y)=\max\big(d(\{R_n'\},x,y),\,d(\{R_n''\},x,y)\big)\,.$$

(5.4) *Пространство 0-метризуемо тогда и только тогда, когда оно имеет gf-базу.*

(5.5) *Пространство симметризуемо тогда и только тогда, когда оно имеет симметричную gf-базу.*

Докажем достаточность. Пусть $\{R_n\}$-симметричная gf-база пространства. Тогда требуемое следует из (5.3.1).

(5.6) *Пространство симметризуемо тогда и только тогда, когда оно имеет gf-базу $\{R_n\}$, для которой $\{R_n\}\prec\{R_n^{-1}\}$ или $\{R_n^{-1}\}\prec\{R_n\}$.*

Докажем снова только достаточность.

Пусть $\{R_n\}$ есть gf-база и, например, $\{R_n\}\prec\{R_n^{-1}\}$. Имеет место $\{R_n\}\sim\sim\{R_n\cup R_n^{-1}\}$ (см. § 1). Ввиду (2.5) $\{R_n\cup R_n^{-1}\}$ — *gf-база.*

(5.7). *Если диагональ Δ_X есть множество типа G_δ в $X\times X$, то X уплотняется на симметризуемое T_1-пространство.*

Доказательство. Пусть $\Delta_X=\bigcap_{n=1}^{\infty}R_n$, где все R_n открыты в $X\times X$. Без нарушения общности можно считать, что все R_n убывают и симметричны: последнее ввиду того, что если R открыто в $X\times X$, то R^{-1}, а следовательно, и $R\cap R^{-1}$ открыты в $X\times X$. Ввиду (2.2) $\{R_n\}$ есть gf-база симметризуемого пространства $\widetilde{X}$, а ввиду (2.8) $\widetilde{X}$ есть T_1-пространство. Но всякое открытое в $\widetilde{X}$ множество складывается из некоторых $R_n(x)$ $(x\in\widetilde{X},\ n=1,2,\ldots)$, которые открыты в X.

§ 6. Псевдокружевные пространства.

(6.1) Определение. Множество пар $\{(P_a',P_a'')|\ a\in A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\}$, $P_a'\subseteq\subseteq P_a''\subseteq X$, назовем *$\sigma$-биконсервативной парасетью,* (4) если

(6.1.1) для $x\in X$ и ее окрестности U_x существует $a\in A$ такой, что $x\in P_a'\subseteq P_a''\subseteq U_x$.

(6.1.2) $B\subseteq A_n\Rightarrow[\bigcup_a^{\beta}P_a']\subseteq\bigcup_a^{\beta}P_a''$ для $n=1,2,\ldots$

Пространства с σ-биконсервативной парасетью назовем *псевдокружевными.*

(6.2) Основная теорема. *Следующие три условия эквивалентны.*

(6.2.1) *в X существует σ-биконсервативная парасеть;*

(6.2.2) *в X существует gf-сеть $\{P_n\}$ такая, что $[E]\subseteq\bigcap_n P_n(E)$ для всех $E\subseteq X$;*

(6.2.3) *для X существует последовательность отображений $\{F_n\}$, ставящих в соответствие каждому открытому в X множеству U замкнутые множества $F_n(U)$, причем*

(6.2.3.1) $$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n(U)=U\,,$$

(6.2.3.2) $$(U\subseteq V)\Rightarrow\big(F_n(U)\subseteq F_n(V)\big)\qquad(n=1,2,\ldots)\,.$$

Доказательство. (6.2.1) $\Rightarrow$ (6.2.2). Положим $P_n(x)=\bigcap\{P_a''|\ x\in P_a',\ a\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i\}$ (5). Ясно, что $x\in P_n(x)$ и $P_{n+1}(x)\subseteq P_n(x)$, ибо $P_a'\subseteq P_a''$, а с увеличением n увеличивается система, подвергаемая пересечению, следовательно, для всех n имеет место $\Delta_X\subseteq P_{n+1}\subseteq P_n\subseteq X\times X$. $\{P_n\}$ есть gf-сеть, так как если $x\in\operatorname{Int}U$, то $x\in P_a'\subseteq P_a''\subseteq U$, $a\in A_n$. Следовательно $P_n(x)\subseteq\subseteq P_a''\subseteq U$. Пусть теперь $y\notin P_n(E)$; тогда для каждого $x\in E$ существует

(4) Ср. в [20] „σ-cushioned pairbase“.

(5) Не исключается пересечение пустой системы!

$a_x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, для которого $x \in P'_{a_x}$, но $y \notin P''_{a_x}$. Имеем $[E] \subseteq [\bigcup\limits_{x}^{E} P'_{a_x}]$. Пусть $B_i = A_i \cap \{a_x |\ x \in E\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ тогда

$$[\bigcup_{x}^{E} P'_{a_x}] = [\bigcup_{i=1}^{n} (\bigcup_{a}^{B_i} P'_a)] = \bigcup_{i=1}^{n} [\bigcup_{a}^{B_i} P'_a] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{a}^{B_i} P''_a$$

последнее ввиду (6.1.2). Но последнее множество есть $\bigcup\limits_{x}^{E} P''_{a_x}$, которое не содержит y, откуда $y \notin [E]$.

(6.2.2) $\Rightarrow$ (6.2.3). Положим

$$\mathcal{E}_n(U) = \{x |\ P_n(x) \subseteq U\} \quad \text{и} \quad F_n(U) = [\mathcal{E}_n(U)] .$$

Проверяем (6.2.3.1). В силу (6.2.2) и (2.1) для $x \in U$ существует n, для которого $P_n(x) \subseteq U$, а значит и $x \in \mathcal{E}_n(U)$. Далее, ввиду (6.2.2) имеем $F_n(U) \subseteq P_n(\mathcal{E}_n(U))$. А последнее множество содержится в U, что явствует из определения $\mathcal{E}_n(U)$. Для (6.2.3.2) заметим, что $\forall n\Big(\big(P_n(x) \subseteq U\big) \Rightarrow \big(P_n(x) \subseteq V\big)\Big)$, а значит $\forall n\big(F_n(U) \subseteq F_n(V)\big)$.

(6.2.3) $\Rightarrow$ (6.2.1). Положим $A_i = \{(U, i) |\ X \supseteq U = \operatorname{Int} U\}$ и $(P'_{(U,i)}, P''_{(U,i)}) = \big(F_i(U), U\big)$. Пусть $B \subseteq A_n$. Тогда $B = \{(U_\lambda, n)\}$, $[\bigcup\limits_{\lambda} F_n(U_\lambda)] \subseteq [F_n(\bigcup\limits_{\lambda} U_\lambda)] \subseteq \bigcup\limits_{\lambda} U_\lambda$, первое включение ввиду (6.2.3.2), второе ввиду (6.2.3.1).

(6.3) *Пространство с σ-консервативной (в частности, с σ-дискретной) замкнутой сетью Σ является псевдокружевным (см. ниже (9.1)).*

Доказательство. В качестве σ-биконсервативной парасети достаточно взять $\{(S, S) |\ S \in \Sigma\}$.

(6.4) *Кружевное пространство (см. [2], стр. 159) является псевдокружевным.*

Доказательство следует из (6.2.3).

(6.5) *Всякое псевдокружевное пространство есть R_0-пространство* [6]. *Если в пространстве X существует gf-сеть $\{P_n\}$ со свойством (6.2.2), то тогда при $\bigcap\limits_{n} P_n = \Delta_X$* [2] *$X$ есть T_1-пространство, а при $\bigcap\limits_{n} P_n \neq \Delta_X$ X не есть T_0-пространство.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что какова бы ни была gf-сеть $\{P_n\}$ из (6.2.2), всегда $[\{x\}] \subseteq \bigcap\limits_{n} P_n(x)$. Отсюда, во-первых, следует R_0, так как тогда $[\{x\}]$ содержится во всякой окрестности x. Далее, если $\bigcap\limits_{n} P_n = \Delta_X$, то $[\{x\}] \subseteq \bigcap\limits_{n} P_n(x) = \{x\}$ [2], т. е. аксиома T_1 выполнена.

Наконец, если $\bigcap\limits_{n} P_n \neq \Delta_X$ и пространство было бы одновременно R_0- и T_0-пространством, то оно было бы T_1-, что противоречит (2.6).

[6] Т. е. обладают замкнутой сетью [6].

(6.6) *Пусть $\{X_i |\ i = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность топологических пространств и X — пространство с наименьшей топологией, при которой некоторые заданные отображения $f_i: X \to X_i$ непрерывны. Тогда, если все X_i суть псевдокружевные пространства, то и X есть псевдокружевное пространство.*

Доказательство. Пусть $\{P_n^i\}$ есть gf-сеть из (6.2.2) для X_i. Положим

$$P_n = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1} \circ P_n^i \circ f_i .$$

Легко видеть, что P_n убывают и рефлексивны. Покажем, что $\{P_n\}$ есть gf-сеть. Пусть $x \in X$ и U — окрестность x в пространстве X. Так как базу в X образуют множества вида $\bigcap\limits_{i=1}^{m} f_i^{-1}(U^i)$, где U^i открыты в X_i, то существуют такие U^i, открытые в X_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, что $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} f_i^{-1}(U^i) \subseteq U$.

Ввиду последней формулы $f_i(x) \in U^i$.

Пусть теперь для номера n_i имеем $P_{n_i}^i(f_i(x)) \subseteq U^i$. Положим $n = \max\{m, n_i |\ i = 1, 2, \ldots, m\}$, и тогда

$$P_n(x) = \bigcap_{i=1}^{n} (f_i^{-1} \circ P_n^i \circ f_i)(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} (f_i^{-1} \circ P_n^i \circ f_i)(x) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcap_{i=1}^{m} (f_i^{-1} \circ P_{n_i}^i \circ f_i)(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(U^i) \subseteq U .$$

Наконец, покажем, что $\{P_n\}$ обладает свойством (6.2.2). Действительно, пусть $E \subseteq X$; тогда для всех n в силу § 1

$$P_n(E) = (\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1} \circ P_n^i \circ f_i)(E) =$$

$$= \bigcap \Big\{\bigcup_{i=1}^{n} \big((f_i^{-1} \circ P_n^i \circ f_i)(E_i)\big) \Big|\ \cup E_i = E\Big\} =$$

$$= \bigcap \Big\{\bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}\big(P_n^i(f_i(E_i))\big) \Big|\ \cup E_i = E\Big\} .$$

В силу (6.2.2) для $\{P_n^i\}$ и непрерывности f_i имеем

$$f_i^{-1}\big(P_n^i(f_i(E_i))\big) \supseteq f_i^{-1}([f_i(E_i)]) \supseteq [E_i]$$

и мы получаем

$$P_n(E) \supseteq \bigcap \{\bigcup_{i=1}^{n} [E_i] |\ \bigcup_{i} E_i = E\} = [E] .$$

(6.7) Следствие. *Класс псевдокружевных пространств является наследственным, счетно* [7] *мультипликативным и сохраняется при переходе к супремуму счетного* [7] *числа топологий.*

[7] Конечный случай не исключается.

(6.8) *Пусть* $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ *есть замкнутое непрерывное отображение. Если* X *есть псевдокружевное пространство, то и* Y *есть псевдокружевное пространство.*

Доказательство. Обозначим F_n из (6.2.3) для X через F_n^X и положим для открытых U в Y и $n = 1, 2, \ldots$ $F_n^Y(U) = f\big(F_n^X(f^{-1}(U))\big)$. Остальное очевидно.

Пусть φ — система замкнутых множеств произвольного пространства X. Если для произвольной ее подсистемы $\varphi' \subseteq \varphi$ всякое подмножество $F \subseteq \bigcup \varphi'$, следы которого $F \cap \Phi$ на всех элементах $\Phi \in \varphi'$ замкнуты в X, является замкнутым в X множеством, то говорят, что *топология* X *слаба относительно* φ ([11], стр. 232), или φ *доминирует* в X ([5], 7.1) ([8]).

(6.9) *Пусть* X *покрыто системой замкнутых множеств,* σ*-доминирующей в* X *(т. е. распадающейся на счетное число подсистем, каждая из которых доминирует в* X*). Если каждый элемент этого покрытия является псевдокружевным (под)пространством, то* X *является псевдокружевным пространством.*

Доказательство. Из (6.1) непосредственно следует, что если $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, где все X_n замкнуты и являются псевдокружевными (под)пространствами, то X является псевдокружевным пространством. Поэтому, как легко видеть, нам достаточно показать, что если Y доминируется замкнутым покрытием φ из псевдокружевных (под)пространств, то Y является псевдокружевным пространством. Пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех пар вида $(\Phi, \{F_n\})$, где Φ — объединение (очевидно, замкнутое) некоторых множеств из φ, а $\{F_n\}$ — последовательность из (6.2.3) для Φ. Упорядочим $\mathfrak{F}$, положив $(\Phi', \{F_n'\}) \leqslant (\Phi'', \{F_n''\})$, если $\Phi' \subseteq \Phi''$ и для всех U, открытых в Φ'' и $n = 1, 2, \ldots$ $F_n''(U) \cap \Phi' = F_n'(U \cap \Phi')$. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию леммы Куратовского–Цорна. Действительно, если $\big\{(\Phi^\nu, \{F_n^\nu\})\big\}$ — цепь в $\mathfrak{F}$, то, положив $\Phi^\mu = \bigcup\limits_\nu \Phi^\nu$ и $F_n^\mu(U) = \bigcup\limits_\nu F_n^\nu(U \cap \Phi^\nu)$ для каждого U, открытого в Φ^μ и $n = 1, 2, \ldots$, получаем по свойству цепи

$$F_n^\mu(U) \cap \Phi^\nu = F_n^\nu(U \cap \Phi^\nu)\,.$$

Отсюда, во-первых, следует, что все $F_n^\mu(U) \cap \Phi^\nu$ замкнуты, а так как φ доминирует в Y, то замкнуто и $F_n^\mu(U)$. Во-вторых, имея в виду определение порядка в $\mathfrak{F}$, нам остается показать, что $\{F_n^\mu\}$ есть последовательность из (6.2.3) для Φ^μ; легко видеть, однако, что (6.2.3.1) и (6.2.3.2) выполняются. Итак, в $\mathfrak{F}$ существует максимальный элемент $(\Phi^0, \{F_n^0\})$. По (6.2)–(6.2.3) Φ^0

([8]) Это имеет место, например, если всякая система, комбинаторно вписанная в φ ([17], стр. 114), консервативна в X, в частности, если φ — локально-конечна в X, например, если X есть топологическая (дискретная) сумма элементов φ.

есть псевдокружевное (под)пространство, и доказательство будет закончено, если окажется, что $\Phi^0 = Y$. Но, в противном случае, существует $\Phi \in \varphi$, для которого $\Phi \nsubseteq \Phi^0$. Пусть $\{F_n\}$ есть последовательность из (6.2.3) для Φ. $\{F_n^+\}$, определенная по правилу: для U, открытого в $\Phi^+ = \Phi^0 \cup \Phi$ и $n = 1\, 2, \ldots$

$$F_n^+(U) = F_n^0(U \cap \Phi^0) \cup F_n(U - \Phi^0)$$

есть последовательность из (6.2.3) для Φ^+. Имеет место $(\Phi^0, \{F_n^0\}) \leqslant (\Phi^+, \{F_n^+\})$, что противоречит максимальности $(\Phi^0, \{F_n^0\})$.

§ 7. Симметризуемость псевдокружевных пространств.

(7.1) Лемма. *Для любого бинарного отношения* R *на* M *и для* $x \in M$ *имеет место*

(7.1.1.) $$x \notin R\big(M - R^{-1}(x)\big)\,.$$

Действительно, пусть $y \in M - R^{-1}(x)$ для некоторой $(y, x) \in R$; тогда $y \notin R^{-1}(x)$ и одновременно $y \in R^{-1}(x)$, т. е. противоречие.

(7.2) Лемма. *Пусть* P — *бинарное отношение на* X. *Для того, чтобы для всех* $E \subseteq X$ *имело место*

(7.2.1.) $$[E] \subseteq P(E)$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in X$ *внутренность* $P^{-1}(x)$ *содержала* x.

Необходимость. Ввиду (7.1.1) $x \notin P\big(X - P^{-1}(x)\big)$, а ввиду (7.2.1) отсюда следует $x \notin [X - P^{-1}(x)]$, т. е. $x \in \operatorname{Int} P^{-1}(x)$ ([3]).

Достаточность. Пусть $x \in [E]$, так как $x \in \operatorname{Int} P^{-1}(x)$, то $P^{-1}(x) \cap E \neq \emptyset$. Берем $y \in P^{-1}(x) \cap E$, тогда $y \in E$ и $(y, x) \in P$, откуда $x \in P(E)$.

(7.3) *Если* $\{P_n\}$ *есть* gf*-сеть с условием* (6.2.2), *то существует симметричная бинарная последовательность* $\{R_n\}$ (*см.* § 1) *такая, что* $\{R_n\} \sim \{P_n\}$.

Доказательство. Положим $R_n = P_n \cap P_n^{-1}$. Для доказательства ввиду § 1 достаточно показать, что $\{P_n^{-1}\} \lesssim \{P_n\}$. Пусть x и n произвольны. Ввиду (7.2) $x \in \operatorname{Int} P_n^{-1}(x)$, откуда следует существование n_1, такого, что $P_{n_1}(x) \subseteq P_n^{-1}(x)$.

(7.4) Теорема. *Псевдокружевное пространство с* gf*-базой симметризуемо* (*ср. ниже* (9.2)).

Доказательство. Пусть $\{P_n\}$ есть gf-сеть из (6.2.2) для X, и пусть $\{R_n\}$ есть gf-база в X. Положим $Q_n = P_n \cup R_n$. Тогда легко видеть, что $\{Q_n\}$ есть тоже gf-база в X, но со свойством (6.2.2). В силу (7.3) в X существует симметричная бинарная последовательность $\{S_n\} \sim \{Q_n\}$, которая будет gf-базой ввиду (2.5). Остается обратиться к (5.5).

(7.5) Следствие (А. В. Архангельский). *Пространство с σ-дискретной замкнутой сетью и слабой первой аксиомой счетности симметризуемо* (ср. *ниже* 9.1)).

(7.6) Следствие (Дж. Сидер). *Кружевное пространство с первой аксиомой счетности симметризуемо.*

Доказательства последних двух предложений легко получаются из (7.4), если учесть (6.3), (6.4) и замечание после (2.1).

(7.7). *Для того, чтобы симметричная gf-сеть $\{R_n\}$ удовлетворяла условию* (6.2.2), *необходимо и достаточно, чтобы x была внутренней точкой всех $R_n(x)$.*

Доказательство следует из (7.2).

(7.8) Определение. Пространство X называется *сильно симметризуемым*, если для него существует симметрика d такая, что для всех n и $x \in X$ имеет место

(7.8.1) $$x \in \operatorname{Int} O_n^d(x) \qquad (\text{см. } \S\,1)\,.$$

(7.9) Теорема. *Для того, чтобы пространство было сильно симметризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было псевдокружевным и удовлетворяло первой аксиоме счетности.*

Доказательство. Необходимость следует из (7.7). Достаточность доказывается аналогично (7.4), но с предположением дополнительного условия: $x \in \bigcap\limits_n \operatorname{Int} R_n(x)$. Ясно, что в этом случае $x \in \bigcap\limits_n \operatorname{Int} Q_n(x)$, а ввиду § 1 также соответственно $x \in \bigcap\limits_n \operatorname{Int} S_n(x)$.

§ 8. Псевдокружевные пространства и покрытия.

(8.1) *Всякое открытое множество в псевдокружевном пространстве есть множество типа G_δ.*

Доказательство следует из (6.2.3.1).

(8.2) *Если X есть псевдокружевное T_2-пространство, то диагональ Δ_X есть множество типа G_δ и X уплотняется на симметризуемое T_1-пространство.*

Доказательство. По теореме Бурбаки диагональ Δ_X замкнута в $X \times X$. Ввиду (6.7) X^2 есть псевдокружевное пространство, и, следовательно, ввиду (8.1) Δ_X есть множество типа G_δ. Остальное следует из (5.7).

(8.3) *Во всякую систему γ открытых множеств псевдокружевного пространства X можно вписать σ-дискретную в X систему замкнутых множеств, покрывающую $\bigcup \gamma$.*

Доказательство следует из приводимого ниже утверждения.

(8.4) *Пусть в псевдокружевном пространстве X задана система γ открытых множеств, вполне упорядоченная отношением „$\leqslant$“. Тогда существует система замкнутых множеств $\varphi = \{\Phi_n(U) |\ U \in \gamma,\ n = 1, 2, \ldots\}$, всякая подсистема которой $\varphi_n = \{\Phi_n(u) |\ U \in \gamma\}$ дискретна, а для любого инициального отрезка* ([9]) *$\gamma' \subseteq \gamma$ система $\varphi' = \{\Phi_n(U) |\ U \in \gamma',\ n = 1, 2, \ldots\}$ покрывает $\bigcup \gamma'$.*

Доказательство проведем сначала для случая $\bigcup \gamma = X$. Положим

$$\Phi_n(U) = F_n(U) - \bigcup\{V \in \gamma |\ V < U\},$$

где $F_n(U)$ взяты из (6.2.3), соответственно $\varphi_n = \{\Phi_n(U) |\ U \in \gamma\}$ и $\varphi = \bigcup\limits_n \varphi_n$. Пусть $x \in X$ и положим $U_x = \min\{U \in \gamma |\ U \ni x\}$.

Пусть γ' — инициальный отрезок ([9]) в γ. Тогда, если $x \in \bigcup \gamma'$, то ввиду инициальности γ' имеем $U_x \in \gamma'$. Ввиду (6.2.3.1) $x \in \bigcup\limits_n F_n(U_x)$ и, следовательно,

$$x \in \bigcup_n F_n(U_x) - \bigcup\{V \in \gamma |\ V < U_x\} = \bigcup_n \Phi_n(U_x)\,.$$

Таким образом $\{\Phi_n(U) |\ U \in \gamma',\ n = 1, 2, \ldots\}$ покрывает $\bigcup \gamma'$.

Докажем теперь, что все φ_n дискретны в X. Пусть

$$O_x^n = U_x - F_n(\bigcup\{V \in \gamma |\ V < U_x\})\,.$$

Легко видеть, что O_x^n — окрестность x; покажем, что если O_x^n пересекает $\Phi_n(U)$, то $U = U_x$. Рассмотрим два случая:

(1) $U > U_x$.

Тогда

$$O_x^n \cap \Phi_n(U) \subseteq U_x \cap \big(F_n(U) - \bigcup\{V \in \gamma |\ V < U\}\big) \subseteq U_x \cap \big(F_n(U) - U_x\big) = \emptyset\,.$$

(2) $U < U_x$.

Тогда

$$O_x^n \cap \Phi_n(U) \subseteq O_x^n \cap F_n(U) \subseteq O_x^n \cap F_n(\bigcup\{V \in \gamma |\ V < U_x\})\,,$$

последнее следует из (6.2.3.2). Но последнее множество есть

$$\big(U_x - F_n(\bigcup\{V \in \gamma |\ V < U_x\})\big) \cap \big(F_n(\bigcup\{V \in \gamma |\ V < U_x\})\big) = \emptyset\,.$$

Случай произвольной системы γ открытых множеств сводится к уже рассмотренному, если положить $\gamma^+ = \gamma \cup \{X\}$ и $U \leqslant X$ для всех $U \in \gamma^+$. Действительно, применяя к γ^+ доказанное выше, получим систему $\{\Phi_n(U) |\ U \in \gamma^+,\ n = 1, 2, \ldots\}$, из которой остается выбросить $\Phi_n(X)$.

(8.5) *Коллективно нормальное псевдокружевное пространство X регулярно и наследственно паракомпактно.*

([9]) Относительно „$\leqslant$“.

Доказательство. Так как X — нормальное R_0-пространство (см. (6.5)), то оно регулярно. Пусть γ — открытая система в X. В силу теоремы Майкла из [10] достаточно доказать, что в γ можно вписать σ-дискретную открытую систему, покрывающую $\bigcup\gamma$, для чего сначала, воспользовавшись (8.3), вписываем в γ σ-дискретное в X замкнутое в X покрытие $\bigcup\gamma$. Воспользовавшись леммой 1 Даукера из [7], каждый элемент последнего покрытия можно так окружить окрестностью, чтобы получилось снова σ-дискретное, но уже открытое покрытие $\bigcup\gamma$, вписанное в γ; для того, чтобы удовлетворить последнему требованию нужно пересечь все окрестности множествами из γ.

(8.6) *Коллективно нормальное псевдокружевное T_0-пространство уплотняется на метрическое.*

Доказательство. Так как X есть R_0-пространство, то оно является T_1-пространством, а, следовательно, и T_2-пространством ввиду нормальности. Но тогда по теореме Бурбаки диагональ Δ_X замкнута, откуда по (6.7) и (8.1) есть множество типа G_δ в $X\times X$. С другой стороны, ввиду предыдущего предложения X паракомпактно, но по теореме Боржеса ([11], 8.2) паракомпактное пространство, диагональ квадрата которого есть множество типа G_δ, уплотняется на метрическое.

(8.7) *Следующие свойства для псевдокружевного пространства эквивалентны*:

(8.7.1) *наследственная финальная компактность*;

(8.7.2) *финальная компактность*;

(8.7.3) *наследственное свойство Суслина* ([2], *стр.* 162);

(8.7.4) *любая дискретная система множеств пространства не более чем счетна*;

(8.7.5) *наследственная сепарабельность*;

(8.7.6) *наследственное свойство Шанина* ([3], *стр.* 993).

Доказательство. Импликации $(8.7.1)\Rightarrow(8.7.2)\Rightarrow(8.7.4)$; $(8.7.1)\Rightarrow\Rightarrow(8.7.3)\Rightarrow(8.7.4)$ и $(8.7.5)\Rightarrow(8.7.6)\Rightarrow(8.7.3)$ легко доказываются для любого топологического пространства; $(8.7.4)\Rightarrow(8.7.1)$ следует из (8.3).

Докажем $(8.7.3)\Rightarrow(8.7.5)$. Пусть $E\subseteq X$, $\{P_n\}$ есть gf-сеть из (6.2.2) для X и пусть для каждого n $\mathfrak{F}_n=\{f\}$ — множество всех отображения в E, подчиненных следующим условиям:

(1) область определения $f^{-1}(E)$ каждого $f\in\mathfrak{F}_n$ есть некоторый полусегмент порядковых чисел вида $[0,\lambda)$,

(2) для всех $\tau\in f^{-1}(E)$ $f(\tau)\notin(X)\big[f\big([0,\tau)\big)\big]$ [10],

(3) для всех $\tau\in f^{-1}(E)$ $P_n\big(f(\tau)\big)\cap f\big([0,\tau)\big)=\emptyset$.

[10] $(X)[A]$ обозначает замыкание A в X.

Покажем, что все $ff^{-1}(E)$ счетны. Действительно, пусть $f^{-1}(E)=[0,\lambda)$ и $\mu<\lambda$. Тогда

$$(X)\big[f\big([0,\lambda)-\{\mu\}\big)\big]=(X)\big[f\big([0,\mu)\big)\big]\cup(X)\big[f\big([\mu+1,\lambda)\big)\big]\subseteq$$
$$\subseteq(X)\big[f\big([0,\mu)\big)\big]\cup P_n\Big(f\big([\mu+1,\lambda)\big)\Big),$$

так как включение следует из (6.2.2). Но последнее множество, которое в силу §1 равно $(X)\big[f\big([0,\mu)\big)\big]\cup\Big(\bigcup\big\{P_n(f(\nu))\big|\ \mu<\nu<\lambda\big\}\Big)$, не содержит $f(\mu)$ в силу (2) и (3). Таким образом, всякая точка подпространства $ff^{-1}(E)$ изолирована, а в силу (8.7.3) все $ff^{-1}(E)$ счетны.

Легко видеть, что порядок в $\mathfrak{F}_n$: „f_1, есть сужение f_2" совпадает с включением (отображения суть бинарные отношения, т. е. множества!). Покажем, что в $\mathfrak{F}_n$ есть максимальный в смысле этого порядка элемент, для чего проверим, что выполнено условие лемму Куратовского–Цорна. Действительно, пусть $\mathfrak{F}$ есть цепь в $\mathfrak{F}_n$. Покажем, что $\bigcup\mathfrak{F}\in\mathfrak{F}_n$; проверим только условие (2). Пусть

$$\tau\in\big((\bigcup\mathfrak{F})^{-1}\big)(E)=\big((\bigcup\{f|\ f\in\mathfrak{F}\})^{-1}\big)(E)=$$
$$=(\bigcup\{f^{-1}|\ f\in\mathfrak{F}\})(E)=\bigcup\{f^{-1}(E)|\ f\in\mathfrak{F}\}\quad(\text{см. }\S 1).$$

Тогда $\tau\in\big(f^{-1}(E)\big)$ для некоторого $f\in\mathfrak{F}$, и, в силу (1) и линейной упорядоченности $\mathfrak{F}$ имеем $(\bigcup\mathfrak{F})\big([0,\tau)\big)=f\big([0,\tau)\big)$, следовательно, в силу (2) для f имеем

$$f(\tau)\notin(X)\big[f\big([0,\tau)\big)\big]=(X)\big[(\bigcup\mathfrak{F})\big([0,\tau)\big)\big].$$

Фиксируем теперь f_n — максимальный по включению элемент в $\mathfrak{F}_n$.

Теперь можно закончить доказательство, для чего достаточно показать, что

$$(X)[\bigcup_n f_nf_n^{-1}(E)]\supseteq E.$$

Предположим противное, и пусть $x\in E-(X)[\bigcup_n f_nf_n^{-1}(E)]$. Тогда для некоторого n_0 имеем $P_{n_0}(x)\cap\big(\bigcup f_nf_n^{-1}(E)\big)=\emptyset$ (см. (2.1)), в частности $P_{n_0}(x)\cap f_{n_0}f_{n_0}^{-1}(E)=\emptyset$. Пусть $f_{n_0}^{-1}(E)=[0,\lambda)$. Полагая $f_{n_0}^{+}=f_{n_0}\cup\{(\lambda,x)\}$ получаем, как легко видеть, что $f_{n_0}^{+}\in\mathfrak{F}_{n_0}$, а это противоречит максимальности f_{n_0}.

(8.8) *Хаусдорфово счётно компактное псевдокружевное пространство бикомпактно и метризуемо.*

Доказательство. Пространство финально компактно в силу (8.7)–(8.7.4), ибо в счетно компактном пространстве всякая дискретная система множеств конечна, и, следовательно, бикомпактно. По (8.6) оно уплотняется на метрическое пространство; а уплотнение бикомпакта есть гомеоморфизм.

§ 9. Примеры. В настоящем параграфе замыкание множества E в эвклидовой топологии плоскости обозначается через $\overline{E}$.

(9.1) Пример вполне регулярного сильно симметризуемого T_1-пространства без σ-консервативной сети.

Пусть C — множество точек комплексной плоскости и пусть $U_n(x)$ — объединение одноточечного множества $\{x\}$ и двух открытых кругов радиуса $1/n$, касающихся в x горизонтальной прямой.

По $U_n(x)$ „восстановим“ (см. § 1) бинарные отношения U_n. В силу (2.2) $\{U_n\}$ в качестве gf-базы индуцирует топологию пространства X на C, которая по (2.3) больше эвклидовой, причем все множества $U_n(x)$ открыты.

Из геометрических соображений следует, что $x \in U_n(y) \Rightarrow y \in U_n(x)$, т. е. U_n суть симметричные бинарные отношения, и, следовательно, ввиду (5.2), (5.3.1) и (7.8) пространство X сильно симметризуемо.

Для доказательства вполне регулярности X для произвольной точки $x \in X$ и ее окрестности $U_n(x)$ определим действительную функцию f следующим способом. Положим $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$ для $y \in X - U_n(x)$. Для любого из двух кругов, составляющих вместе с $\{x\}$ множество $U_n(x)$ уже определены значения f на концах любой хорды, проходящей через точку x; во всех остальных точках такой хорды доопределим f линейной интерполяцией. Таким способом определенная функция во всех точках $\neq x$ непрерывна уже в эвклидовой топологии плоскости. Из геометрических соображений следует, что для $y \in U_m(x)$ $(m > n)$ имеет место $f(y) < \frac{1}{m}\Big/\frac{1}{n} = \frac{n}{m}$ в силу чего f непрерывно в точке x в топологии X.

Перейдем теперь к доказательству того, что в нашем пространстве X нет σ-консервативной сети, для чего предположим противное, т. е. что в X есть сеть $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$ где все Σ_i — консервативные системы. Ввиду регулярности X достаточно считать, что система Σ замкнута. Пусть a — действительное число. Рассмотрим горизонтальную прямую e^a с ординатой a. Для натуральных чисел m и n определим следующие ее подмножества e^a_{mn}: $x \in e^a_{mn}$ тогда и только тогда, когда выполнены *сразу* два условия:

(9.1.1) существует $S \in \Sigma_m$, которое имеет на e^a одноточечный след $\{x\}$ и

(9.1.2) $U_n(x)$ не пересекает объединения всех S из Σ_m которые не содержат x.

Легко видеть, что

$$e^a = \bigcup_{m,n} e^a_{mn},$$

действительно, если $x \in e^a$, то, во-первых, для некоторого m найдется $S \in \Sigma_m$ такое, что $x \in S \subseteq U_1(x)$ (свойство сети) и $x \in S \cap e^a \subseteq U_1(x) \cap e^a = \{x\}$ а во-вторых — объединение всех элементов Σ_m (для этого m), не содержащих x, есть замкнутое множество, не содержащее x, так что существует $U_n(x)$, не пересекающее указанное объединение, и мы будем иметь $x \in e^a_{mn}$.

По теореме Бэра о категориях для каждого a найдутся такие m, n, p и q, что

$$\overline{e^a_{mn}} \geqslant I^a_{pq}, \tag{9.1.3}$$

где I^a_{pq} есть отрезок на e^a с рациональными абсциссами p и q $(p < q)$ концов. Легко видеть, что существует несчетное множество $E = \{a\}$ действительных чисел, которым отвечает один и тот же набор (m, n, p, q) (т. е. выполняется (9.1.3)), который мы и зафиксируем для дальнейшего. Пусть a_0 — предельная точка E в пространстве действительных чисел. Введем прямоугольник F с проекциями: $[p, q]$ — на ось абсцисс, и $[a_0 - (1/2n), a_0 + (1/2n)]$ на ось ординат; он очевидно, замкнут в нашем пространстве. Пусть

$$P = \bigcup \{e^a_{mn} \cap F \mid a \in E - \{a_0\}\}$$

и выберем, пользуясь условием (9.1.1), для каждой точки $x \in P$ множество $S(x)$ из Σ_m, высекающее на горизонтальной прямой e^a, проходящей через x, след, равный $\{x\}$. Покажем, что

$$S(x) \cap F = \{x\}.$$

Действительно, объединение всех $U_n(y)$, где y пробегает $e^a_{mn} \cap I^a_{pq} - \{x\}$, содержит в силу (9.1.3) все точки прямоугольника F, не лежащие на I^a_{pq}, так как диаметры кругов, составляющих $U_n(y)$ равны $2/n$. Вместе с тем, ввиду (9.1.2), никакое $U_n(y)$ не пересекает $S(x)$. В силу консервативности и замкнутости Σ_m множество $\bigcup_x^P S(x)$ замкнуто, и, следовательно, $\bigcup_x^P S(x) \cap F$ также замкнуто. Но, как мы только что показали, последнее множество совпадает с P. Легко видеть, однако, что все точки средней горизонтали $I^{a_0}_{pq}$ прямоугольника суть точки прикосновения для P в нашем пространстве, не лежащие в P.

Замечание. Построенное в (9.1) пространство является однородным, сепарабельным, и, следовательно, удовлетворяющим условиям Шанина и Суслина, но не финально компактным пространством, уплотняющимся на плоскость с эвклидовой топологией. Кроме того, любые две его точки можно соединить подпространством, гомеоморфным отрезку прямой с эвклидовой топологией, и этим же свойством обладает всякий элемент некоторой базы открытых множеств.

Действительно, всякая горизонтальная прямая является дискретным подпространством, и поэтому X не является наследственно финально компактным, и, следовательно (8.7), не является финально компактным. Если две точки не лежат на горизонтальной прямой, то на отрезке, соединяющем эти точки, индуцируется эвклидова топология. Все остальные случаи взаимного расположения двух точек в X и во множествах $U_n(x)$ сводятся к этому.

(9.2) Пример вполне регулярного симметризуемого T_1 и K_2^s-пространства, не являющегося псевдокружевным пространством.

Пусть C и $U_n(x)$ обозначают то же, что и в (9.1), и пусть $\widetilde{U}_n(x)$ будет объединением одноточечного множества $\{x\}$ и двух открытых кругов радиуса $1/n$, касающихся в x вертикальной прямой. Положим еще:

$$V_n(x) = U_n(x) \cup \left(\bigcup_{i>n}\left(\widetilde{U}_{2^{i+n}}\left(x+\frac{1}{2^i}\right) \cup \widetilde{U}_{2^{i+n}}\left(x-\frac{1}{2^i}\right)\right)\right).$$

По $V_n(x)$ „восстановим" (см. § 1) бинарные отношения V_n. В силу (2.2) $\{V_n\}$ в качестве gf-базы индуцирует топологию пространства X на C, которая по (2.3) больше эвклидовой. Из геометрических соображений следует, что $x \in V_n(y) \Rightarrow y \in V_n(x)$, т. е. V_n — симметричные отношения, и, следовательно, ввиду (5.5), пространство X симметризуемо.

Пусть $\gamma = \{n_i|\ i>n\}$ — произвольная последовательность натуральных чисел, $n = 1, 2, \ldots$ Легко видеть, что

$$V_\gamma(x) = V_n(x) \cup \left(\bigcup_{i>n}\left(U_{n_i}\left(x+\frac{1}{2^i}\right) \cup U_{n_i}\left(x-\frac{1}{2^i}\right)\right)\right)$$

открыто в X, так как все точки из $V_\gamma(x)$, кроме x, являются внутренними уже в эвклидовой топологии и, следовательно, для каждой точки $y \in V_\gamma(x)$ имеем $V_{n(y)}(y) \subseteq V_\gamma(x)$ для некоторого $n(y)$ (см. (2.1)). Все множества $V_\gamma(x)$ даже образуют базу точки x. Действительно, если U — открытое множество, содержащее точку x, то $V_n(x) \subseteq U$ для некоторого n в силу (2.1), и так как $x+(1/2^i), x-(1/2^i) \in U$ $(i>n)$, то для некоторого n_i в силу (2.1)

$$V_{n_i}\left(x+\frac{1}{2^i}\right) \subseteq U \quad \text{и} \quad V_{n_i}\left(x-\frac{1}{2^i}\right) \subseteq U \quad (i>n),$$

но тогда для $\gamma = \{n_i|\ i>n\}$

$$V_\gamma(x) \subseteq V_n(x) \cup \left(\bigcup_{i>n}\left(V_{n_i}\left(x+\frac{1}{2^i}\right) \cup V_{n_i}\left(x-\frac{1}{2^i}\right)\right)\right) \subseteq U.$$

Для доказательства вполне регулярности X для произвольной точки $x \in X$ и ее окрестности $V_\gamma(x)$ $(\gamma = \{n_i|\ i>n\}$ с достаточно большими n_i $(n_i \geqslant 2^{n+i})$, чтобы все множества:

$$U_n(x), \quad \widetilde{U}_{2^{n+i}}\left(x+\frac{1}{2^i}\right) \cup U_{n_i}\left(x+\frac{1}{2^i}\right), \quad \widetilde{U}_{2^{n+i}}\left(x-\frac{1}{2^i}\right) \cup U_{n_i}\left(x-\frac{1}{2^i}\right),$$

составляющие $V_\gamma(x)$ оказались дизъюнктными).

Определим действительную функцию f следующим способом. Положим $f(x) = f(x+(1/2^i)) = f(x-(1/2^i)) = 0$ $(i>n)$ и $f(y) = 1$ для $y \in X - V_\gamma(x)$. Для любого из множеств

$$U_n(x), \quad \widetilde{U}_{2^{n+i}}\left(x+\frac{1}{2^i}\right) \cup U_{n_i}\left(x+\frac{1}{2^i}\right),$$

$$\widetilde{U}_{2^{n+i}}\left(x-\frac{1}{2^i}\right) \cup U_{n_i}\left(x-\frac{1}{2^i}\right) \quad (i>n)$$

уже определены значения f на концах отрезков, соединяющих центры симметрии этих множеств с их (эвклидовыми) границами. Во всех остальных точках этих отрезков доопределяем f линейной интерполяцией. Таким способом определенная функция во всех точках, отличных от x непрерывна уже в эвклидовой топологии плоскости. Из геометрических соображений следует, что для $y \in V_\delta(x)$

$$\left(\delta = \{m_i|\ i>m\},\ m>n,\ m_i > \frac{m\cdot n_i}{n}\ (i>m)\right)$$

имеет место $f(y) < \dfrac{1}{m}\Big/\dfrac{1}{n} = \dfrac{n}{m}$ в силу чего f непрерывно в точке x в топологии X.

Докажем, что X есть k_2^s-пространство. Действительно, каково бы ни было $V \in {}^2\hat{V}(x)$ (см. (4.4)), найдется $\gamma = \{n_i|\ i>n\}$, для которого $V_\gamma(x) \subseteq V$, а так как все $V_\gamma(x)$ открыты, то $x \in \bigcap \{\mathrm{Int}\, V|\ V \in {}^2\hat{V}(x)\}$ и нам остается сослаться на (4.6).

И, наконец, покажем, что X не есть псевдокружевное пространство, для чего предположим противное, и пусть $\{P_n\}$ есть gf-сеть из (6.2.2) для X. В силу (3.8) $\{V_n\} \prec \{P_n\}$ а, следовательно, для каждого $x \in C$ существует такое n, что

(9.2.1) $$P_n(x) \subseteq V_1(x).$$

Положим $K_n = \{x|\ P_n(x) \subseteq V_1(x)\}$.

По теореме Бэра о категориях найдется (эвклидов) круг D с центром x_0 и такое n_0, что

(9.2.2) $$\overline{K_{n_0}} \supseteq D.$$

Пусть $E = K_{n_0} - V_1(x_0)$. Из геометрических соображений следует, что

(9.2.3) $$x_0 \in (X)[E].$$

Докажем теперь, что $x_0 \notin V_1(E)$, для чего предположим противное: $x_0 \in V_1(E)$. Тогда $E \cap V_1(E) \neq \emptyset$ в силу симметричности V_1 (см. § 1), что невозможно, ибо $E = K_{n_0} - V_1(x_0)$. Тогда $x_0 \notin P_{n_0}(E)$ ввиду (9.2.1). Но $P_{n_0}(E) \geqslant (X)[E]$ (см. (6.2.2)), откуда следует

$$x_0 \notin (X)[E]. \tag{9.2.4}$$

(9.2.3) и (9.4.4) дают требуемое противоречие.

Замечание. Построенное в (9.2) пространство является однородным пространством, уплотняющимся на плоскость с эвклидовой топологией. Кроме того, любые две его точки можно соединить подпространством, гомеоморфным отрезку прямой с эвклидовой топологией (ср. предыдущее замечание).

Цитированная литература

[1] П. С. Александров и П. С. Урысон, *О компактных топологических пространствах*, в книге П. С. Урысон, *Труды по топологии и другим областям математики*, т. 2, Москва–Ленинград 1951.

[2] А. В. Архангельский, *Отображения и пространства*, УМН 21 (1966), стр. 133–184.

[3] — и В. И. Пономарев, *О диадических бикомпактах*, ДАН 182 (1968), стр. 993–996.

[4] R. H. Bing, *Metrization of topological space*, Canad. Journ. Math. 3 (1951), стр. 175–186.

[5] C. J. R. Borges, *On stratifiable spaces*, Pacific Journ. Math. 17 (1966), стр. 1–16.

[6] A. S. Devis, *Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces*, Amer. Math. Monthly 61 (1961), стр. 886–894.

[7] C. H. Dowker, *On a theorem of Hanner*, Ark. Mat. 2 (1952), стр. 307–313.

[8] Я. А. Кофнер, *О двух задачах из теории симметризуемости*, Бюлл. Польской Акад. Наук 18 (1970), стр. 81–87.

[9] А. Г. Курош, *Лекции по общей алгебре*, Москва 1962.

[10] E. Michael, *A note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), стр. 831–838.

[11] K. Morita, *Products of normal spaces with metric spaces*, Math. Ann. 154 (1964), стр. 365–382.

[12] L. F. McAuley, *A note on complete collectionwise normality and paracompactness*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), стр. 796–799.

[13] — *A relation between perfect separability, completeness and normality in semi-metric spaces*, Pacific Journ. Math. 6 (1956), стр. 315–326.

]14] С. Й. Недев, *Об обобщенно-метризуемых пространствах*, Доклады Болгарской Академии Наук 20 (1967), стр. 513–516.

[15] — *Симметризуемые пространства и финальная компактность*, ДАН 175 (1967), стр. 532–534.

[16] В. И. Пономарев, *Аксиомы счетности и непрерывные отображения*, Бюлл. Польской Акад. Наук 8 (1960), стр. 127–134.

[17] — *О пространствах, соабсолютных с метрическими*, УМН 21 (1966), стр. 101–132.

[18] S. P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice*, Fund. Math. 57 (1965), стр. 107–115.

[19] R. W. Heath, *A paracompact semi-metric space which is not an M_3-space*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), стр. 868–870.

[20] J. G. Ceder, *Some generalizations of metric spaces*, Pacific Journ. Math. 2 (1961), стр. 105–126.

МОЛДАВСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ПОЧВОВЕДЕНИЯ И АГРОХИМИИ ИМ. Н. А. ДИМО
Кишинёв

Reçu par la Rédaction le 27. 8. 1969