Les fonctions continues et les ensembles (A).

Par

W. Sierpinski (Varsovie)

Le but de cette Note est de montrer qu'un problème assez simple concernant les fonctions continues conduit aux ensembles (A) de M. Souslin [1])

Soit $f(x, y)$ une fonction continue de deux variables réelles x, y, définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Considérons les valeurs de x dans $(0, 1)$, pour lesquelles il existe dans $(0, 1)$ une et seulement une valeur de y, telle que $f(x, y) = 0$, et soit A l'ensemble de toutes les valeurs y correspondant à ces x.

A toute fonction continue $f(x, y)$ (définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$) correspond ainsi un ensemble linéaire bien déterminé $A = A(f)$.

Nous prouverons que *pour toute fonction continue de deux variables, $f(x, y)$, définie pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, *$A(f)$ est un ensemble (A), situé dans l'intervalle* $(0, 1)$, *et qu'inversement, pour tout ensemble E, dans l'intervalle* $(0, 1)$, *qui est un ensemble (A), il existe une fonction continue $f(x, y)$, définie pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, *telle que $A(f) = E$.*

Soit donc $f(x,y)$ une fonction, définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ et continue par rapport à (x, y). n étant un nombre naturel donné, désignons par F_n l'ensemble de tous les nombres x de $(0, 1)$, pour lesquels il existe deux nombres a et b de $(0, 1)$, tels que

$$f(x, a) = f(x, b) = 0 \text{ et } b - a \geqslant \frac{1}{n}.$$

On voit sans peine que les ensembles F_n sont fermés.

[1]) Quant aux définitions des ensembles (A), voir p. e. *Fund. Math.* t. V, p. 155 ss., p. 160; t. VI, p. 100 et p. 161.

En effet, soit x_0 un point d'accumulation de l'ensemble F_n. Il existe donc une suite infinie x_k ($k=1, 2, 3 \ldots$) des points de F_n, telle que

$$\lim_{k=\infty} x_k = x_0. \tag{1}$$

Or, pour tout x_k de F_n il existe deux nombres a_k et b_k de $(0, 1)$, tels que

$$f(x_k, a_k) = f(x_k, b_k) = 0 \quad \text{et} \quad b_k - a_k \geqslant \frac{1}{n} \tag{2}$$

Les suites a_k et b_k ($k = 1, 2, \ldots$) étant bornés (puisque $0 \leqslant a_k \leqslant 1$ et $0 \leqslant b_k \leqslant 1$), il existe une suite infinie d'indices $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, telle que

$$\lim_{p=\infty} a_{k_p} = a_0 \quad \text{et} \quad \lim_{p=\infty} b_{k_p} = b_0,$$

où a_0 et b_0 sont deux nombres de l'intervalle $(0, 1)$. Or, la fonction $f(x, y)$ étant continue, nous trouvons tout de suite, d'après (1), (2) et (3):

$$f(x_0, a_0) = \lim_{p=\infty} f(x_{k_p}, a_{k_p}) = 0, \quad f(x_0, b_0) = \lim_{p=\infty} f(x_{k_p}, b_{k_p}) = 0,$$

et

$$b_{k_p} - a_{k_p} \geqslant \frac{1}{n},$$

donc, d'apres (3):

$$b_0 - a_0 \geqslant \frac{1}{n},$$

ce qui prouve que $x_0 \varepsilon F_n$ c. q. f. d.

Or, soit P l'ensemble de tous les nombres x de $(0, 1)$, pour lesquels il existe dans $(0, 1)$ au moins un nombre y, tel que $f(x, y) = 0$: on voit sant peine que P est un ensemble fermé. Or, en désignant par H l'ensemble de tous les nombres x de $(0, 1)$, pour lesquels il existe dans $(0, 1)$ un et seulement un nombre y, tel que $f(x, y) = 0$ — désignons le par $\varphi(x)$ — nous avons évidemment:

$$H = P - (F_1 + F_2 + F_3 + \ldots);$$

P et F_n ($n = 1, 2, \ldots$) étant fermés, il en résulte que l'ensemble H est un G_δ (produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts).

De la définition de la fonction $\varphi(x)$ résulte sans peine qu'elle est continue sur l'ensemble H. L'ensemble $A = A(f)$, qui est évidemment l'ensemble de toutes les valeurs de $\varphi(x)$ sur H, est donc une image univoque et continue d'un ensemble G_δ: c'est donc un ensemble (A) de M. Souslin.

Or, soit E un ensemble (A) donné, situé dans $(0, 1)$. D'après un théorème de M. Lusin[1]), il existe une fonction $\varphi(x)$, définie dans l'ensemble X de tous les nombres irrationnels de $(0, 1)$ et continue dans X, telle que E est l'ensemble de toutes les valeurs qu'admet $\varphi(x)$ pour les nombres x de X. Désignons par P l'ensemble (plan) formé de tous les points $(x, \varphi(x))$, où $x \varepsilon E$, et posons $\overline{P} = P + P'$. La fonction $\varphi(x)$ étant continue dans X, on voit sans peine que pour tout nombre a de X la droite $x = a$ rencontre l'ensemble $\overline{P}$ dans un seul point et que pour tout nombre rationnel a de $(0, 1)$ l'ensemble $\Pi(a)$ de tous les points, en lesquels la droite $x = a$ rencontre $\overline{P}$, est fermé et non vide. Soit $a = \frac{p}{q}$, où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible au dénominateur naturel, et soit $\eta(a)$ un point de l'ensemble $\Pi(a)$ (p. e. celui qui a la plus petite ordonnée). Posons $\eta_1(a) = \eta(a) \pm \frac{1}{2q}$, en prenant le signe $+$, si $\eta(a) \leqslant \frac{1}{2}$, et le signe $-$, si $\eta(a) > \frac{1}{2}$. Désignons par Q l'ensemble de tous les points $(a, \eta_1(a))$ correspondant aux nombres rationnels a de l'intervalle $(0, 1)$, et posons $R = \overline{P} + Q$. L'ensemble $\overline{P}$ étant fermé, on voit sans peine que R est fermé, et il est évident que pour tout nombre a de X la droite $x = a$ rencontre R dans un seul point, $(a, \varphi(a))$, et que pour tout nombre a rationnel de $(0, 1)$ la droite $x = a$ rencontre R en au moins deux points différents, $(a, \eta(a))$ et $(a, \eta_1(a))$. Or, les coordonnées des points de R sont évidemment des nombres de l'intervalle $(0, 1)$.

Définissons maintenant la fonction de deux variables réelles $f(x, y)$, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, comme la distance du point (x, y) à l'ensemble R. On voit sans peine que $f(x, y)$ est une fonction continue de deux variables (x, y) et qu'elle s'annulle dans les points de R et seulement dans les points de R. Or, des propriétés de l'ensemble R résulte tout de suite que $A(f) = E$.

Notre théorème est ainsi démontré complétement.

Observons encore qu'on pourrait obtenir tous les ensembles (A) linéaires en partant des fonctions continues de deux variables réelles $f(x, y)$, en prenant, pour tout nombre réel x, s'il existe, le plus

[1]) Voir p. e. W. Sierpiński: *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 163.

grand nombre y, tel que $f(x, y) = 0$, et en considérant l'ensemble A de tous ces nombres y.

Remarquons enfin que tous les ensembles (A) linéaires (et seulement ces ensembles) peuvent être obtenus en partant des ensembles fermés dans l'espace à 3 dimensions, si l'on projette ces ensembles sur le plan XY et si l'on projette ensuite sur l'axe X le complémentaire de cette projection par rapport au plan XY.