Sur une propriété de l'opération A.

Par

Otton Nikodym (Cracovie).

MM. Lusin et Sierpiński ont étudié une opération très générale sur une infinité dénombrable d'ensembles, dite *opération* A [1]), et définie comme il suit.

Supposons qu'à tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \dots, n_k$ corresponde un ensemble $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Désignons par E l'ensemble de tous les éléments x, tels que pour chacun d'eux au moins une suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \dots$ existe telle que x appartienne à chacun d'ensembles

$$E_{n_1}, E_{n_1, n_2}, E_{n_1, n_2, n_3}, \dots$$

On dit que l'ensemble E est le résultat d'une *opération* A, effectuée sur le système d'ensembles $S = \{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$.

MM. Lusin et Sierpiński ont démontré dans le mémoire cité que l'opération A, effectuée sur un système d'ensembles mesurables (L), donne toujours un ensemble mesurable (L). En modifiant convenablement la démonstration de ces auteurs, je prouverai la proposition suivante:

Théorème. *L'opération A effectuée sur un système d'ensembles jouissants de la propriété de Baire donne toujours un ensemble jouissant de la propriété de Baire.*

Soit P un ensemble parfait donné (dans l'espace à m dimensions). Nous dirons qu'un ensemble E est sur P *de première caté-*

1) N. Lusin et W. Sierpiński: *Sur quelques propriétés des ensembles* (A), Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie 1918, p. 47 et 48.

gorie au point p (appartenant à E ou non), s'il existe une sphère (m-dimensionnelle) S entourant p et telle que l'ensemble PES est de première catégorie sur P; s'il n'existe pas une telle sphère, nous dirons que E et sur P de deuxième catégorie au point p [1]).

On dit qu'un ensemble E est sur P *partout de deuxième catégorie*, s'il est sur P de deuxième catégorie en tout point p de P. On démontre sans peine que si l'ensemble E est sur l'ensemble parfait P de deuxième catégorie, il existe une portion Π de P, telle que E est sur Π partout de deuxième catégorie [2]).

On dit qu'un ensemble E *jouit de la propriété de Baire*, s'il n'existe aucun ensemble parfait P, sur lequel F et son complémentaire CE seraient partout de deuxième catégorie. Nous dirons qu'un ensemble E jouit de la propriété de Baire relativement à l'ensemble parfait P, s'il n'existe aucune portion Π de P, sur laquelle E et CE seraient partout de deuxième catégorie.

En démontrant notre théorème nous nous bornerons au cas où P est l'ensemble de tous les nombres réels. On verra sans peine quelles modifications il faudra faire pour le cas où P est un ensemble parfait quelconque, situé dans l'espace à m dimensions.

Au lieu de dire que l'ensemble E jouit de la propriété de Baire relativement à l'ensemble de tous les nombres réels, nous dirons, pour abréger, que E est un β. On voit sans peine que pour démontrer qu'un ensemble E est un β, il suffit de prouver qu'il existe un ensemble $H \subset E$ qui est un β et qui est en tout point p de la même catégorie (sur l'ensemble de tous les nombres réel) que l'enemble E.

Lemme I. *Si les ensembles M et $Q \subset M$ sont des β, tous les deux de la même catégorie en tout point, l'ensemble $R = M - Q$ est de première catégorie.*

Dém. Si l'ensemble R était de deuxième catégorie, il serait partout de deuxième catégorie dans un intervalle δ, et, à plus forte raison, l'ensemble $M \supset R$, donc aussi l'ensemble Q, serait partout de deuxième catégorie dans δ. Les ensembles $R = M - Q$ et $CR \supset Q$ seraient donc tous les deux partout de deuxième catégorie dans δ,

[1]) N. Lusin et W. Sierpiński *Journal de Mathématiques* 7-e série t. II. (1923), p. 68—69.

[2]) Voir p. e. H. Lebesgue: *Journ. de Math.*, 6-e série t. I (1905) p. 185.

ce qui est impossible, puisque R, comme différence de deux β. est un ensemble β. Notre lemme est ainsi démontré.

Lemme II. *Si H est un β et $E \subset H$, il existe un ensemble M qui est un β, de la même catégorie que E en tout point, tel que $E \subset M \subset H$.*

Dém. Soit Q l'ensemble de tous les points p (appartenant à E ou non) en lesquels E est de deuxième catégorie. Posons $M = HQ + E$: on voit sans peine que l'ensemble M satisfait aux conditions de notre lemme.

En effet, l'ensemble de tous les points p en lesquels E est de 1re catégorie est lui même de 1re catégorie, donc le complémentaire de Q. et, à plus forte raison, celui de $Q+E$, est de 1re catégorie, d'où résulte que l'ensemble $Q+E$ est un β. L'ensemble M, comme produit de deux β. est donc un β. Or, si E est de 1re catégorie au point p, il existe un intervalle Δ entourant p, tel que $E\Delta$ est de 1re catégorie, donc $\Delta Q = 0$ et $M\Delta$ est de 1re catégorie, ce qui prouve que M est de 1re catégorie au point p. D'autre part, si E est de deuxième catégorie au point p, il en est de même, à plus forte raison, de l'ensemble $M \supset E$. Notre lemme est ainsi démontré.

Lemme III. *Si M_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ est une suite infinie d'ensembles β, E_n — un ensemble $\subset M_n$ qui est en tout point de la même catégorie que M_n (pour $n = 0, 1, 2, \ldots$). et si $E_0 = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, l'ensemble $M_0 - (M_1 + M_2 + \ldots)$ est de première catégorie.*

Dém. Posons $T = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$, $R = M_0 - T$, $Q = M_0 - R = M_0 T$: l'ensemble Q sera donc un β (comme produit de deux β). D'après $E_0 = E_1 + E_2 + \ldots$ et $E_n \subset M_n$ (pour $n = 0, 1, 2, \ldots$), nous aurons $E_0 \subset M_0$ et $E_0 \subset T$, donc $E_0 \subset M_0 T = Q$. Il est donc $E_0 \subset Q \subset M_0$: les ensembles Q et M_0 sont donc en tout point de la même catégorie; Q et M_0 étant des β, il en résulte, d'après le lemme I. que l'ensemble $R = M_0 - Q$ est de première catégorie, c. q. f. d.

Soit maintenant E un ensemble qui est le résultat de l'opération A effectuée sur le système d'ensembles $S = \{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ et supposons que les ensembles $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sont tous des β. On voit sans peine qu'on peut supposer que le système S est régulier, c'est-à-dire qu'on a toujours

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \supset E_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}},$$

puisque si le système S ne satisferait pas à cette condition, il suffirait de remplacer tout ensemble $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ par le produit $E_{n_1} E_{n_1, n_2} \ldots E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et d'observer qu'un produit fini d'ensembles β est un β.

Désignons généralement par $E^{p_1, p_2, \ldots, p_s}$, l'ensemble déterminé par le système

$$S^{p_1, p_2, \ldots, p_s} = \{E^{p_1, p_2, \ldots, p_s}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\},$$

où

$$E^{p_1, p_2, \ldots, p_s}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E_{p_1, p_2, \ldots, p_s, n_1, n_2, \ldots, n_k}, \text{ pour } n_1, n_2, \ldots, n_k = 1, 2, 3, \ldots$$

Le système S étant régulier, nous aurons évidemment:

(1) $$E^{p_1, p_2, \ldots, p_s} \subset E_{p_1, p_2, \ldots, p_s}.$$

Or, on voit sans peine que

(2) $$E = E^1 + E^2 + E^3 + \ldots$$

et

(3) $$E^{p_1, p_2, \ldots, p_s} = E^{p_1, p_2, \ldots, p_s, 1} + E^{p_1, p_2, \ldots, p_s, 2} + E^{p_1, p_2, \ldots, p_s, 3} + \ldots$$

Les ensembles $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ étant des β, il existe, d'après (1) et en vertu du lemme II, pour tout système d'indices $p_1, p_2, \ldots p_s$ un ensemble $M^{p_1, p_2, \ldots, p_s}$ qui est un β, de la même catégorie en tout point que l'ensemble $E^{p_1, p_2, \ldots, p_s}$ et tel que

(4) $$E^{p_1, p_2, \ldots, p_s} \subset M^{p_1, p_2, \ldots, p_s} \subset E_{p_1, p_2, \ldots, p_s},$$

et il existe aussi un ensemble M qui est un β, de la même catégorie en tout point que l'ensemble E, tel que

(5) $$E \subset M$$

Posons

(6) $$T = M^1 + M^2 + M^3 + \ldots,$$

(7) $$T^{p_1, p_2, \ldots, p_s} = M^{p_1, p_2, \ldots, p_s, 1} + M^{p_1, p_2, \ldots, p_s, 2} + M^{p_1, p_2, \ldots, p_s, 3} + \ldots$$

— ce seront des ensembles β, en tant que sommes d'infinités dénombrables d'ensembles β. Posons encore:

(8) $$R = M - T,$$

(9) $$R^{p_1, p_2, \ldots, p_s} = M^{p_1, p_2, \ldots, p_s} - T^{p_1, p_2, \ldots, p_s},$$

$$(10) \qquad N = R + \Sigma R^{p_1, p_2, \ldots, p_s},$$

la sommation Σ s'étendant à tous les systèmes finis de nombres naturels $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

Les ensembles M et $M^{p_1, p_2, \ldots, p_s}$ étant des β, nous concluons d'après (5), (6) et (8), resp. d'après (4), (7) et (9), et en vertu du lemme III, que les ensembles R et $R^{p_1, p_2, \ldots, p_s}$ sont de première catégorie. Donc, d'après (10), l'ensemble N est de 1^re^ catégorie (en tant que somme d'une infinité dénombrable d'ensemble de 1^re^ catégorie). L'ensemble

$$(11) \qquad H = M - N$$

est donc un β (comme différence de deux β), de la même catégorie en tout point que l'ensemble M (puisque N est de 1^re^ catégorie), donc aussi que E. D'après la remarque faite plus haut, il suffira donc de prouver que $H \subset \dot{E}$, pour démontrer que l'ensemble $\dot{E}$ est un β.

Soit donc $x \varepsilon H$. D'après (11) nous avons donc $x \varepsilon M$ et x non εN, donc, d'après (10), x non εR, ce qui donne, d'après (8): $x \varepsilon T$. D'après (6) il existe donc un indice n_1, tel que $x \varepsilon M^{n_1}$. D'après (10) la formule x non εN donne x non εR^{n_1}, donc, d'après $x \varepsilon M^{n_1}$ et d'après (9), $x \varepsilon T^{n_1}$. D'après (7) il existe donc un indice n_2, tel que $x \varepsilon M^{n_1, n_2}$. En repetant notre raisonnement, nous obtenons une suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$, telle que

$$x \varepsilon M^{n_1} . M^{n_1, n_2} . M^{n_1, n_2, n_3} \ldots,$$

ce qui donne, d'après (4):

$$x \varepsilon E_{n_1} E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \ldots$$

et prouve que $x \varepsilon \dot{E}$.

Nous avons ainsi prouvé que $H \subset \dot{E}$ et nous pouvons regarder notre théorème comme démontré.

Tout ensemble (A) de M. Souslin pouvant être regardé comme résultat de l'opération A effectuée sur les intervalles (ou, plus généralement, sur les ensembles fermés), il résulte tout de suite de notre théorème le suivant

Corollaire: *Tout ensemble (A) jouit de la propriété de Baire.*

Cette propriété importante des ensembles (A) a été démontré en 1923 sur une autre voie par MM. Lusin et Sierpiński [1]). Vue l'existance des ensembles (A) non mesurables (B), il en résulte l'existence des ensembles non mesurables (B), jouissant de la propriété do Baire, ce qui resoût négativement un problème difficile posé par M. Lebesgue sur les fonctions représentables analytiquement [2]).

[1]) *Journal de Mathématiques*, 7-e série t. II, p. 68 ss.
[2]) *Journ. de Math.* 6-e série, t. I, (1905), p. 188.