Sur l'ensemble de distances entre les points d'un ensemble.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

E étant un ensemble donné de points (situé dans l'espace à m dimension) désignons par $D(E)$ l'ensemble de toutes les distances entre deux points quelconques de l'ensemble E. L'opération D fait donc correspondre à tout ensemble de points E un ensemble de nombres réels non négatifs $D(E)$ (*Distanzmenge* de E). Dans cette Note je prouverai (§ 1) que *si E est un ensemble mesurable (B), $D(E)$ est mesurable (L), mais pas nécessairement mesurable (B)* [1]. Je démontrerai notamment que *si E est un ensemble (A) de* M. Souslin (dans l'espace à m dimensions), *$D(E)$ est aussi un ensemble (A)*, et quiil *existe un ensemble plan G_δ* [2]*, E, pour lequel $D(E)$ est non mesurable (B)*.

Or, je prouverai (§ 3) qu'*il existe un ensemble linéaire E mesurable (L), pour lequel l'ensemble $D(E)$ est non mesurable (L)*.

En 191 M. Lebesgue a remarqué (sans le démontrer) [3] que l'opération qui consiste à joindre les points d'un ensemble E deux à deux permet de former les ensembles non mesurables (B) à partir d'ensembles mesurables (B). Je prouverai (§ 2) que cette opération effectuée sur un ensemble plan G_δ, peut donner un ensemble non mesurable (B), et qu'elle transforme toujours un ensemble (A) en un ensemble (A).

[1] Cf. *Fund Math.* t. V, p. 337, Problème 27.

[2] C'est-à-dire produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts.

[3] *Ann. Ec. Normale* (3) XXXV, p. 242.

§ 1. Il s'ensuit sans peine des résultats de M. Souslin[1]) qu'il existe un ensemble G_δ plan, P, dont la projection Π sur l'axe d'abscisses n'est pas mesurable (B), et tel que les coordonnées (x, y) de points de P satisfont aux inégalités $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. A tout point $p\,(x, y)$ de P faisons correspondre un point q du plan, dont les coordonnées polaires (ϱ, θ) sont

$$\varrho = x \text{ et } \theta = y.$$

Soit Q l'ensemble de tous les points q qui correspondent ainsi aux points p de P. On voit sans peine que les ensembles P et Q sont homéomorphes et que l'ensemble de toutes les distances ϱ des points $q\,(\varrho, \theta)$ de Q à l'origine de coordonnées coïncide avec l'ensemble Π. Or, P étant un G_δ et Q étant un homéomorphe de P, Q est aussi un G_δ[2]). Donc, *Q est un ensemble plan G_δ, tel que l'ensemble de distances de points de Q à l'origine des coordonnées est non mesurable* (B)[3]).

On voit sans peine qu'on pourrait déterminer l'ensemble Q de sorte que son diamètre soit $< {}^1/_2$ et que la distance de Q à l'origine des coordonnées soit $> {}^1/_2$ (Il suffirait à ce but de déterminer l'ensemble P de sorte que les coordonnées (x, y) de ses points satisfassent aux inégalités ${}^3/_4 < x < 1$ et $0 < y < {}^1/_2$). Supposons que l'ensemble Q est défini de sorte et désignons par E l'ensemble composé de l'ensemble Q et du point $(0, 0)$: ce sera encore un ensemble G_δ. Or, il est évident que l'ensemble de toutes ces distances entre deux points de E qui sont $> {}^1/_2$ coïncide avec l'ensemble de toutes les distances de points de Q à l'origine des coordonnées, et parsuite est non mesurable (B). Par conséquent l'ensemble $D(E)$ de toutes les distances entre deux points de E est non mesurable (B).

Nous avons ainsi démontré qu'il existe un ensemble G_δ plan, E, tel que l'ensemble $D(E)$ est non mesurable (B)[4]).

Remarquons que la condition que E soit un ensemble *plan* était essentielle dans la construction de notre exemple; or, je ne sais pas,

[1]) Voir: M. Souslin. C. R. t. 164 (note du 8 janvier 1917); aussi *Fund. Math.*, t. V, p. 158.

[2]) d'après un théorème de M. Mazurkiewicz; pour la démonstration voir p. e. M. Lavrentieff, *Fund. Math.* t. VI, p. 151.

[3]) Il est évident que si Q est un ensemble G_δ *linéaire*, l'ensemble de distances des points de Q à l'origine des coordonnées est aussi un G_δ.

[4]) On voit sans peine que si E est un ensemble F_σ (dans l'espace à m dimensions), $D(E)$ est aussi un F_σ.

si l'ensemble de distances d'un G_δ linéaire peut être non mesurable (*B*).

D'autre part on peut démontrer sans peine que l'ensemble des distances d'un ensemble (*A*) (dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions) est toujours un ensemble (*A*). Soit p. e. E un ensemble (*A*) plan. Désignons par S l'ensemble de tous les systèmes (x_1, y_1, x_2, y_2), où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont des points de E. Il résulte sans peine de la théorie des ensembles (*A*) que S est un ensemble (*A*) (situé dans l'espace à 4 dimensions). Or, l'ensemble $D(E)$ est évidemment l'ensemble de tous les nombres $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, où $(x_1, y_1) \varepsilon E$ et $(x_2, y_2) \varepsilon E$: c'est donc une image continue de l'ensemble S ($\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ étant une fonction continue du point (x_1, y_1, x_2, y_2)). L'image continue d'un ensemble (*A*) étant un ensemble (*A*), on en conclut que $D(E)$ est un ensemble (*A*), c. q. f. d.

§ **2.** E étant un ensemble plan, désignons par $\varphi(E)$ l'ensemble-somme de tous les segments qu'on obtient en joignant deux points quelconques de l'ensemble E [1]). Nous prouverons qu'il existe un ensemble E qui est un G_δ plan et pour lequel l'ensemble $\varphi(E)$ est non mesurable (*B*).

Soit à ce but P, comme dans le § 1, un ensemble G_δ plan, dont la projection Π sur l'axe d'abscisses est non mesurable (*B*), et tel que les coordonnées (x, y) de points de P satisfont aux inégalités $x > 0$ et $y > 0$.

A tout point $p(x, y)$ de P faisons correspondre un point $q(\xi, \eta)$ du plan, aux coordonnées

$$\xi = x(y+1), \quad \eta = y.$$

Soit Q l'ensemble de tous les points q correspondant ainsi aux points p de P. On voit sans peine que Q est un homéomorphe de P, donc un ensemble G_δ.

Désignons maintenant par E l'ensemble composé de l'ensemble Q et du point $(0, -1)$: c'est donc un ensemble G_δ. Or, on voit sans peine que l'ensemble de points, où l'axe d'abscisses rencontre

[1]) Remarquons que pour tout ensemble plan E, $\varphi\varphi(E)$ est le plus petit ensemble *convexe* contenant E (c'est-à-dire contenant tout segment dont les extrémités il contient), et qu'on a toujours $\varphi\varphi\varphi(E) = \varphi\varphi(E)$. Cf. W. Sierpiński: *Wektor* (Warszawa 1914 p. 268) et S. Straszewicz: *Inaugural-Dissertation*, Zürich 1914, p. 28 ss.

l'ensemble $\varphi(E)$ est précisément l'ensemble Π, d'où résulte tout de suite que l'ensemble $\varphi(E)$ ne peut être mesurable (B), c. q. f. d.

Or, si E est un ensemble (A) (plan), $\varphi(E)$ est aussi un ensemble (A). En effet, désignons par S l'ensemble de tous les systèmes (x_1, y_1, x_2, y_2, t), où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont des points de E et t est un nombre réel de l'intervalle $(0, 1)$. L'ensemble E étant un ensemble (A), S est un ensemble (A) dans l'espace à 5 dimensions. Or, $\varphi(E)$ est évidemment une image continue de S, comme ensemble de tous les points du plan aux coordonnées (x, y), où $x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t$, $y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t$, correspondant aux systèmes (x_1, y_1, x_2, y_2, t) de S. Donc $\varphi(E)$ est un ensemble (A), c. q. f. d.

Observons encore qu'on pourrait démontrer sans peine que l'ensemble $\varphi(E)$ n'est pas nécessairement mesurable (L) superficiellement, si l'ensemble (plan) E l'est.

§ 3. Nous allons maintenant à démontrer que la mesurabilité au sens de M. Lebesgue d'un ensemble linéaire E n'entraîne pas celle de l'ensemble $D(E)$.

Admettons la proposition P suivante: „Si E est un ensemble linéaire mesurable (L), l'ensemble $D(E)$ est aussi mesurable (L)". Il en résulte tout de suite la proposition Π que voici: „Si E est un ensemble linéaire mesurable (L), l'ensemble $\Delta(E)$ de toutes les différences $x - y$, où x et y sont des points de E, est aussi mesurable (L)". En effet, $D(E)$ est l'ensemble de tous les nombres $|x - y|$, où x et y sont des points de E, donc $\Delta(E)$ se compose de l'ensemble $D(E)$ et de son image symétrique par rapport au point 0.

Désignons généralement par E^* l'ensemble de tous les nombres de la forme rx, où r est un nombre rationnel et x un point de E. On voit sans peine que si E est un ensemble mesurable (L), E^* l'est aussi. Or, $\Delta(E^*)$ est évidemment l'ensemble E_2 de tous les nombres de la forme $r_1 x_1 + r_2 x_2$, où r_1 et r_2 sont rationnels et x_1 et x_2 sont des points de E. Donc, d'après la proposition Π, E_2 est mesurable (L). Il est de même de l'ensemble $E_4 = \Delta(E_2^*)$ qui est évidemment l'ensemble de tous les nombres de la forme $r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 + r_4 x_4$, où r_1, r_2, r_3, r_4 sont des nombres rationnels et x_1, x_2, x_3, x_4 sont des points de E. Généralement, en posant $E_{2n+2} = \Delta(E_{2n}^*)$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, nous concluons que les ensembles E_{2n} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont tous mesurables (L), donc aussi leur somme

$$E_2 + E_4 + E_6 + \cdots$$

qui est évidemment l'ensemble $R(E)$ de tous les nombres de la forme

$$r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_m x_m,$$

où m est un nombre naturel, $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sont des coefficients rationnels, et $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont des points de E.

Nous avons donc démontré que si la proposition P était vraie, la mesurabilité (L) de l'ensemble E entrainerait toujours celle de l'ensemble $R(E)$.

Or, soit B une *base* de M. Hamel mesurable (L), b — un nombre de B diffférent de 0. J'ai démontré autrefois dans ce journal [1]) qu'il existe des bases hameliennes mesurables (L), et que si B est une base hamelienne, b un nombre de B diffférent de 0, H — l'ensemble qu'on obtient en supprimant dans B l'élément b, l'ensemble $R(H)$ est toujours non mesurable (L). Il existe donc des ensembles E mesurables (L) pour lesquels l'ensemble $R(E)$ est non mesurable (L), ce qui est incompatible avec la conséquence que nous avons tiré plus haut de la proposition P.

Donc la proposition P n'est pas vraie, ce pui prouve qu'il existe un ensemble linéaire mesurable (L), dont l'ensemble de distances est non mesurable (L), c. q. f. d.

[1]) *Fund. Math.* t. I, p. 107 et p. 108.